S A D R Ž A J :

E L E K T R O S T A T I K A

ELEKTROKINETIKA.

M A G N E T I Z A M

R E Š E N J A :

E L E K T R O S T A T I K A

1. OSNOVNI POJMOVI O ELEKTRICITETU I ELEKTRIČNIM OSOBINAMA MATERIJE

Odnos između materije mase m *i* energije W određen je sledećom relaciom :

$W = m \cdot c^2$, gde je c brzina svetlosti

Masa elektrona, protona i neutrona iznosi:

$m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-31}\ kg,$

$m_p = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}\ kg,$

$m_n = 1{,}6747 \cdot 10^{-27}\ kg.$ ($m_p = 1836 \cdot m_e$)

Masa elektrona u stanju kretanja (po **teoriji relativiteta**) je:

$$m_e = \frac{m_{eo}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$, gde je:

m_e...... masa elektrona u stanju kretanja [kg],

m_{eo}.......masa elektrona u stanju mirovanja ($m_{eo} = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ kg) [kg],

v...........brzina kretanja elektrona u odnosu na posmatrača [m/s] i

c...........brzina svetlosti u vakumu [m/s]

Naelektrisanje elektrona, protona i neutrona je jednako :

$q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C,$

$q_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C,$

$q_n = 0\ C.$

Gustina naelektrisanja:

Naelektrisanje može da bude raspoređeno:

1. Površinski : $\sigma = Q / S$ [C/m^2], gde je S površina na kojoj je raspoređeno naelektrisanje Q,
2. Linijski : $q = Q / l$[C/m] , gde je l dužina provodnika po kojoj je raspoređeno naelektrisanje Q, i
3. Zapreminski : $\rho = Q / V$ [C/m^3], gde je V zapremina po kojoj je raspoređena kol. naelektrisanja Q.

Z A D A C I:

1.1. Izračunati masu jednog atoma litijuma $_{3}Li^{7}$.

1.2. Za koliko je puta masa jednog atoma urana $_{92}U^{238}$ veća od mase atoma helijuma $_{2}He^{4}$?

1.3. Bakarna kugla poluprečnika 5 cm naelektrisana je količinom naelektrisanja Q = – 5 C.
Izračunati : a) koliki je broj slobodnih elektrona na kugli i
b) površinsku gustinu naelektrisanja.

1.4. Aluminijski provodnik dužine l = 50 cm i preseka S = 1,5 mm^2 naelektrisan je količinom naelektrisanja Q = – 1 C (kroz provodnik teče struja od 1 A u vremenu od 1 s).
Izračunati : a) linijsku (dužinsku) gustinu naelektrisanja.
b) zapreminsku gustinu naelektrisanja uz pretpostavku da su elektroni zapreminski ravnomerno raspoređeni.

1.5. Koliko će iznositi masa elektrona ako pretpostavimo da je njegova brzina kretanja duplo manja od brzine svetlosti ?

1.6. Kolika je ukupna količina naelektrisanja svih protona koji se nalaze u 1 cm^3 nekog čvrstog tela, računajući da je broj protona u jezgru atoma tog tela 50, a broj atoma u 1 m^3 neka iznosi približno 10^{29}. Rešenje prokomentarisati.

2. KULONOV ZAKON I JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA

2.1. KULONOV ZAKON

Sila koja deluje između dva tačkasta naelektrisanja iznosi:

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \quad [N]$$

gde je:

Q_1, Q_2… količine naelektrisanja [C],
ε_o…. dielektrična propustljivost (konstanta) vakuma [F/m],
ε_r….. relativna dielektrična propustljivost,
r….. rastojanje između naelektrianja [m] i
F ….. sila kojom naelektrisanja deluju jedno na drugo [N].
ε….. apsolutna dielektrična konstanta (propustljivost)

$\varepsilon = \varepsilon_o\, \varepsilon_r \Rightarrow \varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_o$; $\varepsilon_o = 8{,}854\cdot 10^{-12}$ [F/m] $\Rightarrow 1/\, 4\,\pi\, \varepsilon_o \cong 9\cdot 10^9$ [m/F] $\Rightarrow$

$$F \cong \frac{9\cdot 10^9 Q_1 \cdot Q_2}{\varepsilon_r r^2} \quad [N]$$

Relativna dielektrična konstanta govori za koliko je puta sila između dva naelektrisanja u vakuumu veća od sile kad se naelektrisanja nađu u nekoj drugoj sredini. Usled toga relativna dielektrična konstanta je neki broj koji nema svoju jedinicu, a ona se može izraziti i u procentualnom iznosu (broju). Ona iznosi:

$$\varepsilon_r = \frac{F_0}{F}$$

Kako je $4\pi r^2$ površina lopte, $\Rightarrow F = Q_1 Q_2 / \varepsilon S$, te je :

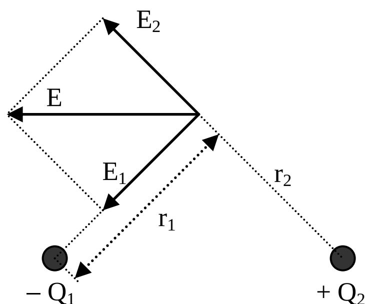
$F \sim Q_1$ i Q_2 (sila je proporcionalna količinama naelektrisanja),
$F \sim 1/\, S$ (sila je obrnuto proporcionalna površini lopte).

2.2 ELEKTRIČNO POLJE

Električno polje je vektorska veličina, dakle, ima pravac, smer i intezitet. Smer je, dogovorom uzet, smer putanje pozitivnog probnog naelektrisanja, čime je ujedno određen i pravac polja.Da bi se odredila jačine električnog polja u bilo kojoj tački u električnom polju, u tu tačku se unese probno naelektrisanje (jedinično pozitivno) q_p. Jačina električnog polja za svaku tačku u električnom polju jednaka je F / q_p.
Kako je $F = Q\, q_p / 4\, \pi\, \varepsilon\, r^2 \Rightarrow E = Q / 4\, \pi\, \varepsilon\, r^2$. Dakle, jačina polja je jednaka :

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Jačina polja je srazmerna naelektrisanju Q, koje čini to polje, a obrnuto srazmerna kvadratu rastojanja r (površini lopte). Da se primetiti da jačina polja ne zavisi od koločine naelektrisanja probnog naelektrisanja q_p, što znači da q_p ima ulogu samo za definiciju jačine električnog pola. Ako je $q_p = +1\ C \Rightarrow E = F$, a samim tim definicija jačine električnog polja postaje jednostavnija.



Sl.1.

Ako jačinu električnog polja u nekoj tački čine više naelektrisanja, kao na sl. 1, tada se za svako od tih naelektrisanja odredi pojedinačna jačina električnog polja ($E_1, E_2 \ldots E_n$).
Rezultantno polje se dobije vektorskim zbirom, te je:

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \ldots\ldots + \overline{E}_n$$

Kako je $E = F / q \Rightarrow F = E\, q$, odnosno $F_o = E_o\, q \Rightarrow$

$$\varepsilon_r = \frac{F_0}{F} = \frac{E_0}{E}$$

Relativna dielektrična konstanta govori za koliko je puta jačina električnog polja u vakuumu jača od jačine polja u nekoj drugoj sredini. Za približno računajne jačine električnog polja koristi se sledeća relacija:

$$E = 9 \cdot 10^9 \frac{Q}{\varepsilon_r r^2} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Z A D A C I :

2.1. Dva jednaka tačkasta naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C nalaze se na međusobnom rastojanju od $5 \cdot 10^{-12}$ cm u vakuumu. Odrediti pravac, smer i jntezitet sile koja deluje između naelektrisanja.

2.2. Naelektrisanja $Q_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ C i $Q_2 = -6 \cdot 10^{-9}$ C nalaze se u dva suprotna temena kvadrata stranice a = 3 cm u vazduhu. Odrediti pravac, smer i intezitet sile između datih naelektrisanja.

2.3. Dva naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = Q = 100$ μC nalaze se u vazduhu. Ako između datih naelektrisanja deluje sila od $F = 9 \cdot 10^{-7}$ N odrediti :

a) rastojanje između naelektrisanja i
b) kolika bi bila sila između istih naelektrisanja ako se ona nalaze na istom rastojanju ali u sredini čija je relativna dielektrična konstanta jednaka $\varepsilon_r = 4$?

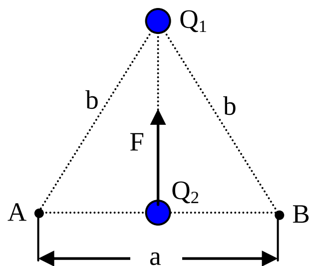
2.4. Na kom međusobnom rastojanju se nalaze dva tačkasta naelektrisanja čija su opterećenja $Q_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ C i $Q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ C ako se nalaze u ulju ($\varepsilon_r = 2{,}5$) i ako između njih deluje sila od F = 0,9 N?

2.5. Rastojanje između dve jednako naelektrisane kugle iznosi a. Tačno na sredini između naelektrisanih kugli smešteno je probno naelektrisanje q. Odrediti silu na probno naelektrisanje ako su naelektrisanja kugli: a) istoimena ($Q_1 = Q_2 = Q$) , b) suprotnih predznaka (Q_1 pozitivno a Q_2 negativno)

2.6. Četiri tačkasta naelektrisanja $Q_1 = -4$ nC , $Q_2 = -6$ nC , $Q_3 = +8$ nC i $Q_4 = +10$ nC nalaze se u temenima kvadrata stranice $a = 3\sqrt{2}$ cm. U preseku dijagonala nalazi se tačkasto telo sa naelektrisanjem q = + 1 nC. Koliko će iznositi sila koja deluje na tačkasto telo ?

2.7∗. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 25$ pC i nepoznato Q_2 nalaze se na rastojanju od a = 5 cm. Ako se između njih, na rastojanju x od naelektrisanja Q_1 ubaci tačkasto naelektrisanje q = – 16 pC, na njega će delovati rezultantna Kulonova sila koja je jednaka nuli. Odrediti iznos naelektrisanja Q_2 i položaj tačke u kojoj se nalazi tačkasto naelektrisanje q.

2.8.



Sl.2.8.

Dva usamljena tačkasta naelektrisanja Q_1 i Q_2 nalaze se na jednokrakom trouglu (sl.2.8.) čiji su kraci dužine a = 5 cm i b = 6 cm. Naelektrisanje $Q_1 = 10$ nC smešteno je u temenu naspram osnovice, a Q_2 na sredini osnovice. Tačke A i B su druga dva temena trougla. Izračunati naelektrisanje Q_2 ako na njega deluje sila inteziteta F = 180 μN sa smerom koji je prikazan na slici.

2.9. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 0{,}6$ μC i $Q_2 = 1$ μC privlače se u ulju silom od F = 0,215 N. Kolika će biti sila između tih naelektrisanja ako se ona premeste u vakuum i ako je između naelektrisanja rastojanje od 10 cm?

2.10. Tri tačkasta naelektrisanja u vakuumu $Q_1 = Q_3 = -10^{-7}$ C i $Q_2 = 5 \cdot 10^{-8}$ C leže na istom pravcu. Naelektrisanje Q_2 se nalazi tačno na sredini između naelektrisanja Q_1 i Q_3 i to na rastojanju od po 10 cm. Odrediti kolika je sila na svako od navedenih naelektrisanja.

2.11. Dve jako male kuglice nalaze se na rastojanju od 4m. Prva kuglica sadrži višak od 10^9 elektrona dok druga manjak od $2 \cdot 10^9$ elektrona. Kolikom će silom delovati kuglice jedna na drugu ako se nalaze u vakuumu? Šta će se promeniti ako bi iste kuglice preneli u destilovanu vodu ($\varepsilon_r = 81$), uz isto rastojanje između kuglica?

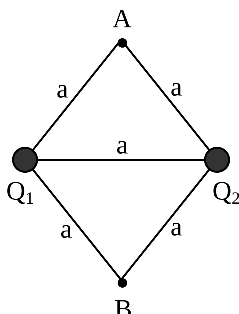
2.12. Međusobno rastojanje r dva tačkasta naelektrisanja $2 \cdot 10^{-5}$ C i $3 \cdot 10^{-5}$ C može proizvoljno da se menja od 1 m do 6 m. Prikazati grafički kako se menja sila uzajamnog delovajna naelektrisanja.

2.13. Dva tačkasta naelektrisanja nalaze se na rastojanju r. Ako se rastojanje između njih smanji za $\Delta r = 50$ cm, sila uzajamnog delovanja se uveća dva puta. Odrediti rastojanje r.

2.14. Dve lake male kuglice nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju 30 cm i sadrže jednake količine naelektrisanja od 1 μC. Kolika je rezultantna sila kojom ove kuglice deluju na treću, ako je ona od obe kuglice udaljena $10\sqrt{3}$ cm? Naelektrisanje treće kuglice iznosi 2μC.

2.15. Tri jednaka naelektrisanja od po $4 \cdot 10^{-9}$ C raspoređena su u temena jednakostraničnog trougla. Ako na svako naelektrisanje deluje sila od $2 \cdot 10^{-2}$ N, kolika je stranica trougla?

2.16.



Sl.2.16

Dva naelektrisanja Q_1 i Q_2 nalaze se na rastojanu a = 10 cm. Odrediti silu koja deluje na naelektrisanje Q_3 koje iznosi $Q_3 = 2 \cdot 10^{-9}$ C ako se ono postavi u tačku A, odnosno B (sl.2.16.). Tačke A i B su na rastojanju a i od Q_1 i od Q_2, a vrednosti naelektrisanja su :

a) $Q_1 = Q_2 = Q_3$;
b) $Q_1 = Q_3 = -Q_2$

2.17. Kuglica mase 0,4 g naelektrisana je količinom naelektrisanja $Q = -10 \cdot 10^{-9}$ C i obešena je o tanak konac (neprovodljiv), tako da se nalazi vertikalno iznad druge nepokretne kuglice koja je postavljena na izolatorski štap. Rastojanje između centara kuglica je 40 cm. Ako se nepokretna kuglica naelektriše sa $Q' = -150 \cdot 10^{-9}$ C, kolika će biti sila zatezanja konca? Kuglice su smeštene u vakuumu. Masa konca je zanemarljiva.

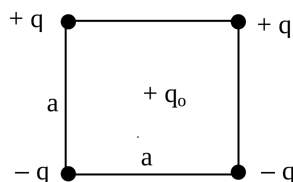
2.18. Kuglica mase 0,5 g visi o tankom koncu. Kuglica je naelektrisana količinom naelektrisanja $q_o = 0{,}1$ μC. Ispod kuglice je postavljena na rastojanju 10 cm druga kuglica naelektrisanja $q_1 = -0{,}1$ μC. Za koliko rastojanje treba pomeriti donju kuglicu da se sila zatezanja smanji na polovinu? ($\varepsilon_r = 1$, $g \cong 10$ m/s^2).

2.19. Dve jednake male kuglice od kojih svaka ima masu 0,5 g obešene su lakim koncima jednakih dužina od po 25 cm o istu tačku. Kada se kuglice naelektrišu jednakim količinama istoimenog naelektrisanja, odbiju se tako da rastojanje među njihovim centrima iznosi 4 cm. Ako se kuglice nalaze u vakuumu, odrediti naelektrisanja kuglica.

2.20.** Dve vrlo male kuglice jednakih poluprečnika naelektrisane su različitim količinama istoimenog elektriciteta, tako da se na rastojanju od r = 2 cm odbijaju silom inteziteta 2 mN. Kada se kuglice dodirnu i ponovo udalje na rastojanje r, sila kojom se odbijaju ima intezitet 2,25 mN. Odrediti količine naelektrisanja kuglica pre dodirivanja. Zadatak prokomentarisati. Kuglice su u vakumu.

2.21. U temenima kvadrata nalaze se naelektrisane kuglice $q_1 = 2$ nC, $q_2 = -4$ nC, $q_3 = 2$ nC i $q_4 = -4$ nC. Ako je stranica kvadrata 20 cm, odrediti silu koja deluje na kuglicu koja je naelektrisana sa q_3. Kuglice se nalaze u vakuumu.

2.22.



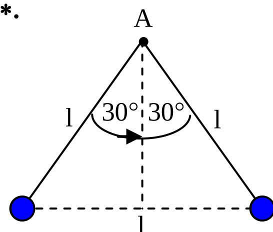
Sl.2.22.

Četiri po modulu jednaka tačkasta naelektrisanja $|q| = 20$ nC, dva pozitivna, a dva negativna (sl.2.22.) , raspoređena su u temenima kvadrata stranice a = 20 cm. Odrediti silu koja deluje na naelektrisanje $q_o = 20$ nC postavljeno u centru kvadrata.

2.23. Dve jednake kuglice naelektrisanja – 5 nC i 3 nC nalaze se na rastojanju d. Kuglice se dodirnu i postave u početne položaje. Odrediti odnos inteziteta sila kojima kuglice deluju pre i posle dodirivanja.

2.24. U temenima A i B jednakostraničnog trougla su dva jednaka pozitivna naelektrisanja, a u temenu C je negativno naelektrisanje. Ako je F intezitet sile kojom Q_A deluje na Q_C, odrediti rezultantnu silu koja deluje na Q_C.

2.25*.



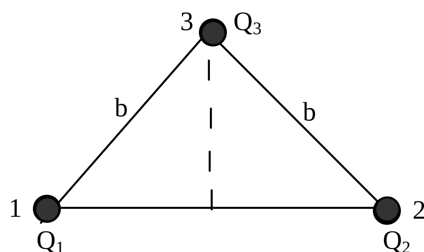
Sl.2.25.

Dve male kuglice, istog prečnika i iste težine, vise o končićima dužine l = 10 cm. Kada se kuglicama dovede količina elektriciteta od 10^{-7} C, one se odbijaju jedna od druge, tako da svaki končić čini sa vertikalom ugao od 30° (sl.2.25.).
Naći težinu kuglice.

2.26. Data je metalna lopta poluprečnika 1 cm. Koliko treba da bude naelektrisanje na lopti da bi intezitet polja na površini lopte iznosio E = 4,5 KV/mm? Prokomentarisati navedeni zadatak.

2.27. Dve provodne loptice istog poluprečnika nalaze se na rastojanju d, i naelektrisane su količinama elektriciteta Q_1 i Q_2. Loptice se zatim dodirnu kratkotrajno jedna o drugu i vrate u prvobitne položaje. Izračunati elektrostatičku silu u oba slučaja ako su:
a) naelektrisanja istog predznaka.
b) naelektrisanja suprotnog predznaka

2.28*.

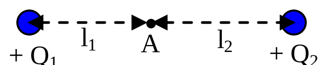


Sl.2.28.

Tri mala tela 1, 2 i 3 čija su naelektrisanja $Q_1 = 20$ nC, $Q_2 = -30$ nC i $Q_3 = -50$ nC, nalaze se u vazduhu i raspoređena su u temenima jednakokrakog trougla (sl.2.28.), pri čemu je a = 6 m i b = 5 m.
Odrediti silu koja će delovati na treće telo.

2.29*. Dve veoma male kuglice istih masa m, vise u vazduhu, na končićima jednake dužine l, zanemarljive mase, koji su učvršćeni u zajedničku tačku A. Kada se kuglice naelektrišu istim količinama elektricitete Q one se odbiju tako da svaki končić gradi sa vertikalom ugao α (sl.4). Koliko iznosi masa tih kuglica?

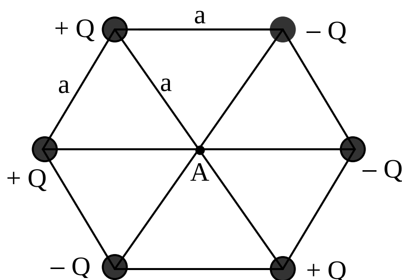
2.30.



Sl.2.30.

Intezitet električnog polja u tački A koja se nalazi između dva mala tela naelektrisana pozitivnim naelektrisanjima Q_1 i Q_2 je jednak nuli (sl. 2.30.). Ako je $l_2 = 3l_1$, odrediti koliki je odnos između naelektrisanja Q_2 / Q_1 ?

2.31.



Sl.2.31.

U temenima pravilnog šestougla stranice a nalaze se u vazduhu tri pozitivna i tri negativna naelektrisanja istih apsolutnih vrednosti Q, pri čemu je njihov raspored prikazan na sl.2.31. Koliki je intezitet električnog polja u centru šestougla (tačka A) ?

2.32. Ako se u tri temena kvadrata stranice a nalaze tri pozitivna naelektrisanja istih vrednosti Q, a u četvrtom temenu slobodan elektron q_e, odrediti intezitet, pravac i smer delovanja sile na slobodan elektron, i to :

a) zanemarujući masu elektrona,
b) uzimajući u obzir masu elektrona (Pretpostavka: jedna dijagonala kvadrata je normalna na zemlju).

2.33. Četiri tačkasta naelektrisanja $Q_1 = – 5$ nC, $Q_2 = – 6$ nC, $Q_3 = + 8$ nC i $Q_4 = + 10$ nC nalaze se u temenima kvadrata stranice $a = 3\sqrt{2}$ cm. U preseku dijagonala nalazi se tačkasto telo sa naelektrisanjem $Q_o = + 1$ nC. Odrediti pravac, smer i intezitet sile koja deluje na tačkasto telo sa naelektrisanjem Q_o.

2.34*. Izračunati koliki bi intezitet električnog polja bio potreban da bi telo mase 1 kg i naelektrisanja 10^{-8} C lebdelo pod uticajem električne sile na gore i gravitacione sile na dole. Rešenje prokomentarisati (da li je rešenje praktično moguće?).

2.35.** Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 1{,}5$ µC i $Q_2 = – 4{,}2$ µC nalaze se u vazduhu u temenima 1 i 2 kvadrata, čija stranica iznosi $a = 5$ cm. Odrediti jačinu električnog polja kojeg stvaraju ova dva naelektrisanja, i to :

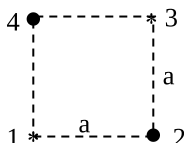
a) u slobodnim temenima 3 i 4,
b) u centru kvadrata.

2.36. Tačkasto naelektrisanje $Q = 10^{-8}$ C nalazi se na rastojanju r = 1 m od tačke M. Naći jačinu električnog polja za datu tačku M.

2.37. U tački M jačina električnog polja u vazduhu iznosi $E_o = 30$ V/m, a u silikonskom ulju je $E_u = 12$ V/m, uz iste geometrijske konfiguracije. Koliko iznosi relativna dielektrična konstanta silikonskog ulja?

2.38. Kolika sila deluje na elektron koji se nalazi u električnom polju jačine E = 0,8 KV/m ? Gravitacionu silu elektrona zanemariti.

2.39.

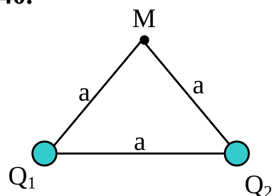


Sl.2.39.

Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 0{,}2$ nC nalaze se u vazduhu u temenima kvadrata stranice a = 3 cm, i to Q_1 u temenu 2, a Q_2 u temenu 4 (sl.2.39.).

Odrediti pravac, smer i intezitet električnog polja u temenu 3.

2.40.



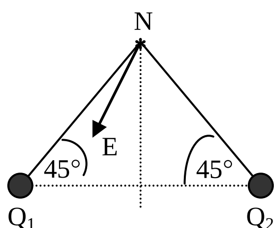
Sl.2.40.

Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 2 \cdot 10^{-10}$ C i $Q_2 = 6 \cdot 10^{-10}$ C nalaze se u vazduhu u dva temena jednakostraničnog trougla (sl.2.40.), ako je $a = 4$ cm, odrediti jačinu električnog polja u tački M

2.41. Jačina električnog polja u tački M koja potiče od naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = Q = 2\ \mu C$ iznosi $E_1 = E_2 = 5 \cdot 10^6$ V/m (sl.9. zad. 2.40.).Sredina je vazduh.Odrediti:

a) pravac i smer pojedinačnih polja E_1 i E_2
b) intezitet, pravac i smer rezultantnog polja E_M
c) rastojanje između naelektrisanja a.

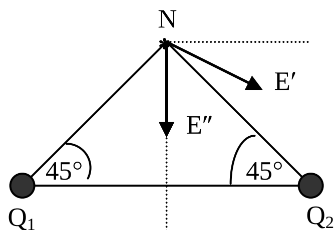
2.42.



Sl.2.42.

Kako se odnose iznosi i predznaci tačkastih naelektrisanja Q_1 i Q_2, ako vektor jačine električnog polja, koje stvaraju ova naelektrisanja u tački N ima smer kao što je na sl.2.42.(Koje je naelektrisanje veće i koje je pozitivno a koje negativno).

2.43.

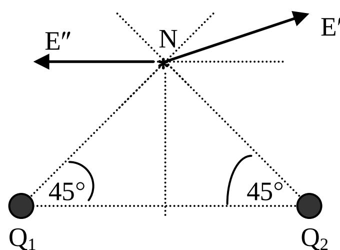


Sl.2.43.

Kako se odnose iznosi i predznaci naelektrisanja Q_1 i Q_2, ako vektor jačine električnog polja E′ , kojeg stvaraju ova dva naelektrisanja u tački N, ima smer kao što je prikazan na sl.2.43.

2.44. Rešiti predhodni zadatak, ako je vektor jačine električnog polja E″ za tačku N kao na sl.2.43.

2.45.

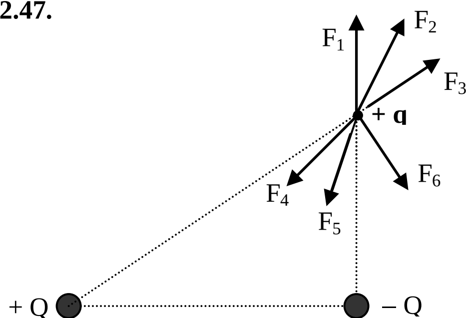


Sl.2.45.

Kako se odnose iznosi i predznaci naelektrisanja Q_1 i Q_2, ako vektor jačine električnog polja E′, kojeg stvaraju ova dva naelektrisanja u tački N ima smer koji je naznačen na sl.2.45.

2.46. Kako se odnose iznosi i predznaci naelektrisanja Q_1 i Q_2, ako vektor jačine električnog polja E″ , kojeg stvaraju navedena naelektrisanja u tački N ima smer koji je naznačen na sl.2.45.

2.47.

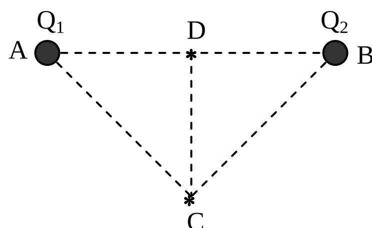


Sl.2.47.

Tačkasto naelektrisanje + q nalazi se u električnom polju dvaju tačkastih naelektrisanja + Q i – Q , kao što je prikazano na sl.2.47. Odrediti smer sile koji se najviše poklapa sa stvarnim smerom sile koji deluje na tačkasto naelektrisanje + q.

Rešenje prokomentarisati.

2.48.



Sl.2.48.

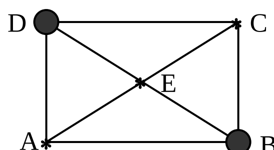
Naelektrisanje Q_1 = 40 pC i Q_2 = 60 pC nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju od 10 cm, prikazano na slici 2.48 .

Odrediti:

a) intezitet električnog polja u tački C čije je normalno odstojanje od prave AB koja spaja središta naelektrisanja jednako polovini AB, tj.
CD = AD = BD = AB/2 = 5 cm.

b) Naći tačku na pravoj AB u kojoj je jačina električnog polja jednaka nuli.

2.49.



Sl.2.49.

Ako se u temenima pravougaonika (sl.2.49) nalaze naelektrisanja $Q_B = Q_D$ = 12 nC, izračunati:

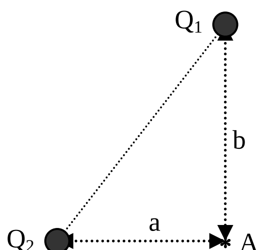
a) intezitet, pravac i smer električnog polja u temenu C

b) silu koja će delovati na slobodni elektron ako se on dovede u teme A, odnosno u tačku E gde se seku dujagonale pravougaonika. Zanemariti gravitacionu silu elektrona.

Brojni podaci: a = 4 cm; b = 3 cm.

2.50. U temenima osnovne pravilne četvorostrane piramide su naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = -20$ pC. Stranica osnovice piramide je $a = 2\sqrt{2}$ cm a bočna ivica b je jednaka dijagonali osnovice ($b = a\sqrt{2}$). Odredi intezitet, pravac i smer električnog polja u vrhu piramide. (Napomena: naelektrisanja su smeštena u temenima osnovice).

2.51.

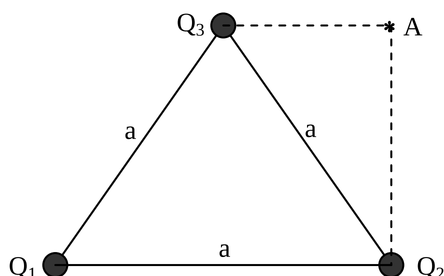


Sl.2.51.

Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = -50$ nC i $Q_2 = +20$ nC nalaze se u vazduhu u dva temena pravouglog trougla prema slici 2.51.

Ako je a = 6 cm i b = 8 cm, odrediti intezitet, pravac i smer delovanja jačine električnog polja u tački A.

2.52.



Sl.2.52.

Ako su, prema slici.2.52, $Q_1 = 10\ \mu C$, $Q_2 = -20\ \mu C$ i $Q_3 = 50\ \mu C$ smešteni u temenima jednakostraničnog trougla stranice $a = 20$ cm, izračunati intezitet električnog polja u tački A koja je ujedno teme pravouglog trougla sa naelektrisanjima Q_2 i Q_3

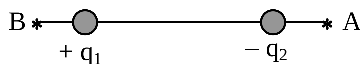
2.53. Koliki je intezitet i smer električnog polja ako u njemu lebdi kap ulja čija je masa $m = 1{,}02\cdot10^{-12}$ g i ako je ona naelektrisana sa 5 pozitivnih elementarnih naelektrisanja (protona)?

2.54. Koliki je intezitet i smer električnog polja da bi slobodni elektron lebdeo u vazduhu?

2.55. Kolika je jačina električnog polja u tački koja se nalazi na sredini između dve male naelektrisane kuglice 15 μC i – 23 μC? Rastojanje između kuglica iznosi 20 cm.

2.56. Dva tačkasta naelektrisanja – 1 μC i 1,2 μC nalaze se u vazduhu na rastojanju 2,4 m. Izračunati i nacrtati u odgovarajućoj razmeri jačine električnog polja u tačkama A i B. Tačke se nalaze na duži koja povezuje data naelektrisanja i udaljene su $r_A = 1$ m i $r_B = 2$ m od prvog naelektrisanja.

2.57.

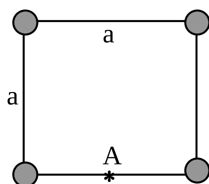


Sl.2.57

Odrediti jačinu električnog polja kojeg stvaraju dva tačkasta naelektrisanja u tačkama A i B, prema sl.2.57. Rastojanje između naelektrisanja je 30 cm, udaljenost tačke A je 10 cm od q_2, a tačke B 10 cm od q_1.
Brojni podaci: $q_1 = 40$ nC, $q_2 = -20$ nC, $\varepsilon_r = 1$.

2.58. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 12$ nC i $Q_2 = -12$ nC nalaze se u vazduhu na rastojanju 10 cm. Izračunati jačinu električnog polja u tački koja je od svakog naelektrisanja udaljena 10 cm.

2.59.



Sl.2.59.

Četiri jednaka tačkasta naelektrisanja raspoređena su u temenima kvadrata stranice a, prema sl.2.59. Odrediti jačinu električnog polja u tački A koja se nalazi na sredini stranice kvadrata. Naelektrisanja su smeštena u vazduhu i iznose po q = 10 nC a stranica kvadrata jednaka je a = 10 cm.

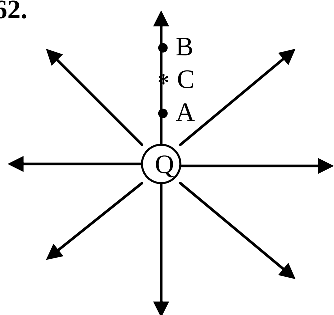
2.60. Između dve paralelne metalne ploče koje su u horizontalnom položaju uspostavljeno je homogeno električno polje jačine E = 3 KV/m (gornja ploča je pozitivno naelektrisana). U jednoj tački polja nalazi se kuglica mase m = 0,2 g , koja je naelektrisana količinom naelektrisanja q = 1 μC. Kako će se kretati kuglica ako je prepuštena sama sebi? Početna brzina kuglice jednaka je nuli. Između naelektrisanih ploča nalazi se vazduh.

2.61. Šest jednakih tačkastih naelektrisanja q ravnomerno su raspoređena po kružnici poluprečnika r.

a) Odrediti jačinu električnog polja u centru kružnice,
b) Koliki će biti intezitet jačine električnog polja u centru kružnice ako se na kružnicu postavi naelektrisanje $q' = 2\ \mu C$ na sredini između dva naelektrisanja.

Brojni podaci: $q = 3\ \mu C$, $r = 20$ cm , $\varepsilon_r = 1$.

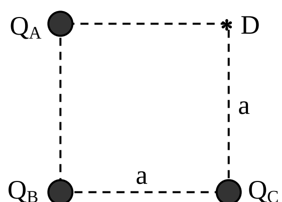
2.62.



Sl.2.62.

U tački A jačina električnog polja iznosi $E_A = 36$ V/m, a u tački B $E_B = 9$ V/m, prema sl.2.62.
Odrediti jačinu polja u tački C koja je na sredini rastojanja između tačaka A i B

2.63.



Sl.2.63.

Tri mala naelektrisana tela čija su naelektrisanja: $Q_A = 5$ nC, $Q_B = 10\sqrt{2}$ nC i $Q_C = -5$ nC nalaze se u vazduhu, u temenima kvadrata A , B i C, prema slici 2.63. Stranica kvadrata je $a = \sqrt{2}$ m.
Izračunati intezitet električnog polja u temenu kvadrata D.

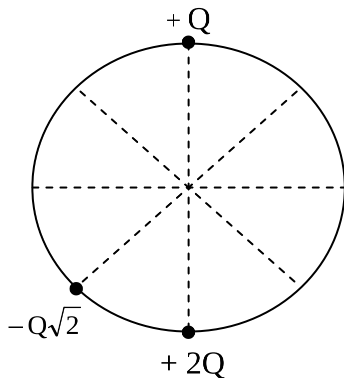
2.64. Dva tačkasta naelektrisanja nalaze se na međusobnom rastojanju a. Ako je prvo naelektrisanje pozitivno a drugo negativno i ako je apsolutna vrednost prvog naelektrisanja dva puta veća od drugog ($Q_1 = 2\,Q_2$), pronaći najbližu tačku u kojoj je jačina električnog polja jednaka nuli.

2.65. Tri tačkasta naelektrisanja nalaze se u temenima kvadrata. Pri kojim bi odnosima količina naelektrisanja i kojeg predznaka jačina električnog polja u slobodnom temenu bila jednaka nuli ?

2.66. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 5$ nC i $Q_2 = -15$ nC nalaze se na međusobnom rastojanju $a = 20$ cm. Odrediti (najbližu) tačku u kojoj je jačina električnog polja jednaka nuli.

2.67. Ako je u provodniku uspostavljeno električno polje $\overline{E}$, kakav će smer imati vektor srednje brzine elektrona u provodniku, u odnosu na smer vektora $\overline{E}$?

2.68.

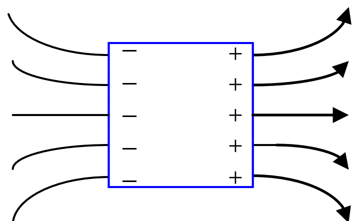


Sl.2.68.

Odrediti tačku u ravni, prema slici 2.68, gde treba postaviti naelektrisanje **– Q**, da bi elektrostatičko polje u centru kružnice bilo jednako nuli.
Rešenje, pored ucrtavanja navedenog naelektrisanja, prokomentarisati.

3. ELEKTRIČNA INDUKCIJA, FLUKS ELEKTRIČNOG POLJA I GAUSOVA TEOREMA

3.1. PROVODNIK U ELEKTRIČNOM POLJU. ELEKTRIČNA INDUKCIJA



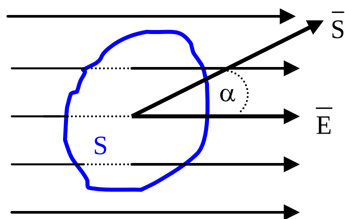
Sl.2.

Ako se metalni provodnik, koji je nosioc slobodnih naelektrisanja–elektrona, unese u električno polje, pod njegovim uticajem, na krajevima provodnika doći će do izdvajanja naelektrisanja (polarizacije), kao na sl.2.
Pojava izdvajanja naelektrisanja na krajevima provodnika usled dejstva električnog polja naziva se **električnom indukcijom (influencijom).**
Usled električne indukcije u električnom polju dolazi do promene gustine električnih linija, samim tim menja se jačina električnog polja, odnosno gustina električnog fluksa. Električna indukcija, koja predstavlja gustoću električnog fluksa, je vektorska veličina (kao i električno polje).

Vektor **električna indukcija (dielektričnog pomaka)** se obeležava sa $\overline{D}$, i smer ovog vektora se poklapa sa smerom električnog polja. Intezitet vektora električne indukcije je srazmeran izdvojenoj količini naelektrisanja , a obrnuto srazmeran površini. Dakle sledi:

$$D = \frac{Q}{S} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

3.2. FLUKS ELEKTRIČNOG POLJA



Sl.3.

$$\Psi = \overline{E} \cdot \overline{S} = E \cdot S \cdot \cos\alpha$$

gde je:

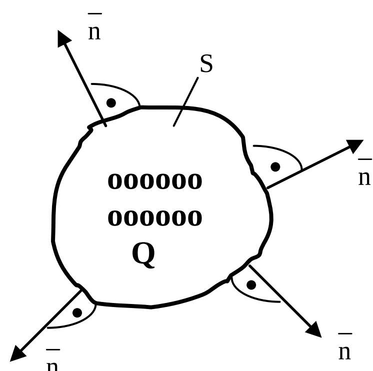
- ψ ..... električni fluks (fluks električnog polja),
- E...... intezitet električnog polja,
- $\overline{S}$ ..... vektor čiji je intezitet jednak površini koja obuhvata električne linije, a pravac mu se poklapa sa normalom na površinu S.
- α ..... ugao između vektora E i vektora S.

Kako je skalarni proizvod : $\overline{E} \cdot \overline{S} = ES\cos\alpha$, sled zaključak

Fluks je skalarna veličina koja zavisi od ***jačine polja E, veličine površine S i ugla α između normale na površinu i linija polja (sl.3).***

Fluks električnog polja,kao i fluks električne indukcije je lako odrediti ako su te linije (tzv. E linije, odnosno D linije) međusobno paralelne, dakle, polje je homogeno. U protivnom proces je znatno složeniji, pa se u takvim slučajevima koristi Gausova teorema.

3.3. GAUSOVA TEOREMA. ODREĐIVANJE JAČINE ELEKTRIČNOG POLJA



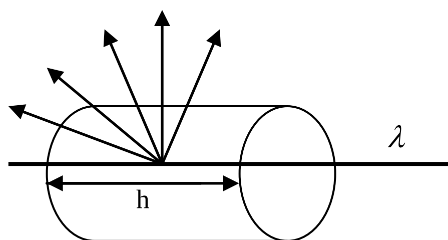
Sl.4.

Pomoću Gausove teoreme može se izračunati jačina električnog polja kod složenijih oblika (što je u praksi najčešći slučaj). Isto tako ovom teoremom se može odrediti jačina električnog polja kod onih tela kod kojih je prisutna određena simetrija (naelektrisana ravan, svera, prava nit, itd.).Oko nekog naelektrisanog tela ili skupine naelektrisanih tela čija je ukupna količina naelektrisanja jednaka **Q** (sl.4.) postoji jačina električnog polja **E**. Fluks električnog polja kroz zatvorenu površinu S, koja obuhvata sva naelektrisana tela ukupnog naelektrisanja Q, jednak je:

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Navedeni izraz predstavlja suštinu Gausove teoreme. Da bi se ona matematički dokazala, treba poznavati integralni račun (viša matematika).

3.3.1. JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA BESKONAČNE PRAVOLINIJSKE NITI (PROVODNIKA)



Sl.5.

Ako linijsku (podužnu) količinu naelektrisanja (sl.5) obeležimo sa **λ,** po niti (zamišljeni valjak) smeštena je ukupna količina naelektrisanja koja je jednaka:
$\mathbf{Q = \lambda \cdot h \Rightarrow \lambda = Q / h}$
Na rastojanju **r** od niti vladaće jačina električnog polja, koju će mo odrediti koristeći Gausovu teoremu, prema kojoj je električni fluks jednak: $\Psi = Q / \varepsilon_o = \lambda \cdot h / \varepsilon_o$

Da bi se odredio ukupni fluks valjak se izdeli na elementarne površine, pa se on izračuna za svaku od tih površina, te se to sve sabere. To se višom matematiko radi preko integrala (sabiranje elementarnih celina). Konačnim rešenjem se dobije da je ukupni fluks jednak:

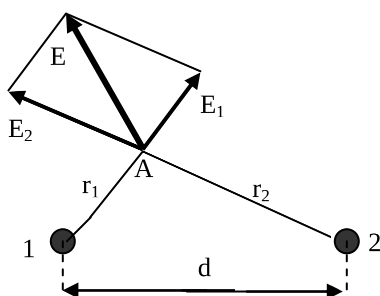
$$\boldsymbol{\psi = E \pi r h}$$

Iz navedene relacije sledi da je jačina električnog polja jednaka:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rh} \quad [\text{ V/m }]$$

gde je **h** dužina provodnika (zamišljenog valjka).

3.3.2. JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA KOJEG STVARAJU DVA PARALELNA PROVODNIKA



sl.6.

Svaki od provodnika u tački A stvara jačinu električnog polja koja je jednaka (sl.6):

$E_{1A} = Q_1 / 2\varepsilon\pi\, r_1\, l_1$; $E_{2A} = Q_2 / 2\varepsilon\pi\, r_2\, l_2$

Kako je električno polje vektorska veličina, sledi da je ukupna jačina električnog polja za neku tačku između provodnika jednaka:

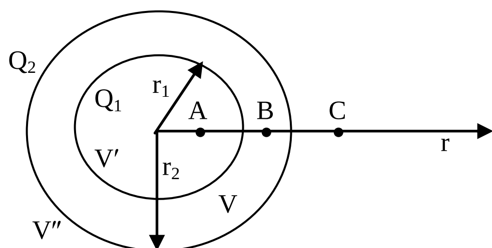
$$\overline{E}_A = \overline{E}_{1A} + \overline{E}_{2A}$$, gde je:

- l_1 i l_2 ..... dužine provodnika,
- r_1 i r_2 .... udaljenost tačke od provodnika ,
- Q_1, Q_2 … ukupne kol. naelektrisanja svakog od provodnika.

Ako se traži jačina električnog polja na pravcu koji spaja dva provodnika, tada će ukupna jačina električnog polja biti jednaka:

1) razlici pojedinačnih polja (ako su provodnici istoimeno naelektrisani) $E = E_1 - E_2$, jer su vektori na istom pravcu i suprotnih predznaka,ili
2) zbiru pojedinačnih polja (provodnici raznoimeno naelektrisani) $E = E_1 + E_2$, jer su vektori u ovom slučaju na istom pravcu i istog smera.

3.3.3 KOAKSIJALNI (CILINDRIČNI) PROVODNIK



Sl.7.

Ako je **$r < r_1$** (tačka A, prema sl. 7), sledi da je električno polje u tom slučaju jednako nuli, jer je električno polje u provodniku,kao i u kugli jednako nuli. Dakle ,

$$\mathbf{E_1 = E_2 = 0 \;\Rightarrow E_A = 0.}$$

Za **$r_1 < r < r_2$** ⇒ a) Ako su naelektrisanja Q_1 i Q_2 istoimena ⇒ $E_1 = Q_1 / 2\varepsilon\,\pi\, r\, l$, $E_2 = 0$, pa je

$$\mathbf{E_B = Q_1 / 2\varepsilon\,\pi\, r\, l.}$$

b) Ako su naelektrisanja raznoimena, tada je polje prisutno samo između spoljašnjeg i unutrašnjeg provodnika (kao kod dveju ravni – kondenzatora), pa je ukupno polje jednako zbiru pojedinačnih ⇒ $E_B = E_1 + E_2$, za $|Q_1| = |Q_2$ ⇒

$$E_B = \frac{Q}{\pi\varepsilon r_1}$$

I konačno za **$r > r_2$** , kod istoimenih naelektrisanja jačina polja jednaka je zbiru pojedinačnih, pa ako su pojedinačna jednaka sledi da je:

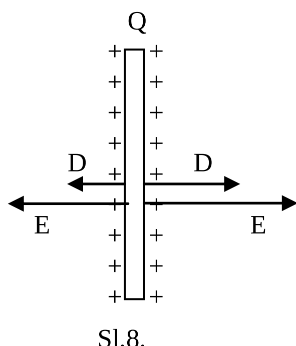
$$E_C = E_1 + E_2 = \frac{Q}{\pi\varepsilon r_1}$$, odnosno

Kod raznoimenih naelektrisanja polja se oduzimaju i ako su ona jednaka rezultantno polje je **$E_C = 0$.**

ZAKLJUČAK !

Kod raznoimeno naelektrisanog cilindričnog provodnika polje je prisutno samo između cilindara.
Kod istoimeno naelektrisanog cilindričnog provodnika polje je prisutno samo izvan spoljašnjeg cilindra.

3.3.4. JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA NAELEKTRISANE RAVNI



Sl.8.

Površinska gustina naelektrisanja, koja se još naziva i električna indukcija, jednaka je: D = Q / S [C/m^2]. Ova električna indukcija (influencija) je srazmerna sa količinom naelektrisanja, samim tim i sa jačinom električnog polja. To znači, da je električna indukcija (gustina naelektrisanja), vektorska veličina, koja ima svoj pravac, smer i intezitet (kao i električno polje). Grafički prikaz električne indukcije je isti kao i električnog polja, pravac i smer im se poklapa, pa se umesto električnih linije (E linija) električno polje može predstaviti i tzv. D linijama, koje simbolizuju električnu indukciju (gustinu naelektrisanja), sl.8.

Kako je usamljena naelektrisana ravan naelektrisana sa obe strane sledi da je površinska gustina naelektrisanja **σ** jednaka: $\sigma = Q / 2S \Rightarrow Q = \sigma \cdot 2\,S$.

Iz izraza za fluks električnog polja $\Psi = E\,S\cos 0° = E\,S \Rightarrow E = \Psi / S$

Prema Gausovoj teoremi ($\Psi = Q / \varepsilon_o$) $\Rightarrow E = Q / \varepsilon_o 2\,S = \sigma / 2\varepsilon_o$

Vektor električne indukcije je normalan na ravan i u celom prostoru jednak je polovini gustine površinskog naelektrisanja,jer jedna polovina toga naelektrisanja stvara indukciju u prostoru u kojem se nalazi i ravan, te sledi : $D = \sigma / 2 = Q / 2\,S$, za jednu stranu ravni.

Jačina električnog polja **E** jednaka je:

$$E = Q / 2\,\varepsilon S = D / \varepsilon \;\; [V/m]$$

Na isti način mažemo izvesti da je jačina električnog polja između dve paralelne ravne,istih količina naelektrisanja ali suprotnih predznaka, beskonačnih površina jednaka :

$$E = Q / \varepsilon S = D / \varepsilon \;\; [V/m]$$

Može se konstatovati da je jačina električnog polja ravni **E** srazmerna gustini naelektrisanja **σ (** odnosno električnoj indukciji **D**), odnosno, ona je jednaka (homogena) u svim tačkama svog prostora. Kod dveju paralelnih ravni (kondezator) polje je prisutno samo između tih ravni, dok izvan njih se uzajamna polja zbog suprotnih smerova međusobno poništavaju, dakle jednaka su nuli. Na isti način se ponaša cilindrični provodnik .

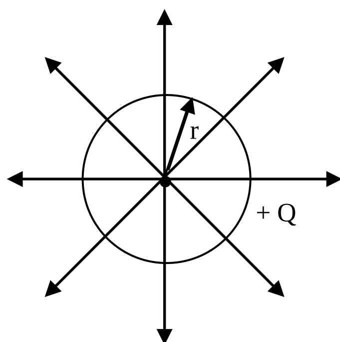
3.3.5 ODNOS IZMEĐU VEKTORA E (Jačine električnog polja) I VEKTORA D (Električne indukcije)

Vektor gustine električne indukcije $\overline{D}$ i vektor jačine električnog polja $\overline{E}$ povezani su određenom konstantom, koja u stvari daje tzv. **dielektričnu konstantu ε .**

$$\varepsilon = \frac{D}{E} \;\Rightarrow\; \mathbf{D = \varepsilon E} \;\Rightarrow\; E = \frac{D}{\varepsilon}$$

Navedene relacije se uglavnom koriste u složenijim slučajevima (kod primena Gausove teoreme).

3.3.6. JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA KOD USAMLJENE KUGLE



Sl.9.

Kod usamljene naelektrisane kugle (sl.9) polje je simetrično, pa se ono određuje pomoću izraza $E = D / \varepsilon$. Kako je $D = Q / S = Q / 4 r^2 \pi \Rightarrow$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot \cdot 4r^2 \pi} \left[V/_m \right]$$

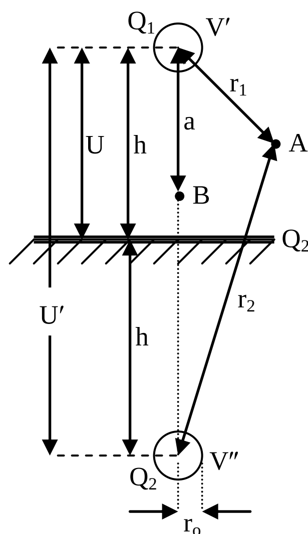
što je već od ranije poznat izraz.Ako ukupno naelektrisanje koje je raspoređeno po površini kugle redukujemo (prenesemo) u sam centar kugle, tada se ovakvo naelektrisanje može nazvati **tačkastim**, jer je ono sada smešteno u jednu tačku. Na ovaj način se može doći do zaključka da će jačina električnog polja na površini kugle biti ista bez obzira da li se to naelektrisanje nalazi na površini kugle ili je u samom centru kugle. Analogno ovom zaključku sledi i zaključak da će jačina električnog polja bilo koje tačke u prostoru biti jednaka tačkastom naelektrisanju, dakle, naelektrisanje je redukovano u centar kugle (tačku), pa sledi:

$$E = \frac{Q}{4r^2 \pi \varepsilon}$$

, gde je **r** udaljenost date tačke od centra provodnika.

Za dve koncentrične kugle jačinu električnog polja određujemo na sličan način kao kod cilindričnog provodnika .

3.3.7. JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA IZMEĐU PROVODNIKA I RAVNE



Sl.10.

Kod računanja električnog polja između provodnika i ravne,slika 10, umesto ravne uzme se drugi provodnik sa istom količinom naelektrisanja kao i ravan (Q_2), sa tom razlikom što je sada rastojanje između provodnika dva puta veće (2h). To znači da ravan sada posmatramo kao ogledalo.

Za tačku A sledi:

$$E_{1A} = \frac{Q_1}{\varepsilon \, 2 r_1 \pi \, l}; \; E_{2A} = \frac{Q_{2A}}{\varepsilon \, 2 r_2 \pi l} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Postupak računanja je potpuno isti kao i kod dva paralelna provodnika.

Na normali između provodnika i ravne polja će se sabirati ili oduzimati, na isti način kao i kod dva provodnika, pa će polje za tačku B biti jednako:

$$E_B = E_{1B} \pm E_{2B} = \frac{Q_1}{\varepsilon 2 a \pi \, l} \pm \frac{Q_2}{\varepsilon 2 (2h - a) \pi \, l}$$

gde je l dužina provodnika.

Polja se sabiraju ako su naelektrisanja raznoimena, a oduzimaju kod istoimenih naelektrisanja.

Z A D A C I :

3.1. Dve paralelne ploče površine $S = 0,1\ m^2$ naelektrisane su : jedna sa $Q_1 = 1$ nC, a druga sa $Q_2 = -1$ nC. Ako se ploče nalaze u vazduhu na rastojanju od 10 cm, izračunaj jačinu električnog polja između ploča.

3.2. Tačkasto naelektrisanje $Q = 10^{-8}$ C nalazi se u vazduhu i udaljeno je od tačke A 1 m.. Izračunatu za datu tačku A električnu indukciju (dielektrični pomak) D_A i jačinu električnog polja E_A.

3.3. U nekoj tački A jačina električnog polja iznosi $E_A = 100$ V/m, a dielektrični pomak (el. indukcija) $D_A = 2,6562 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$. Izračunati relativnu dielektričnu konstantu ε_r ovog dielektrika, kao i naelektrisanje Q koje je izazvalo ovo polje ako je naelektrisanje tačkasto i udaljeno od tačke A $l = 0,5$ m.

3.4. Na metalnoj kugli u vazduhu prečnika d = 18 cm raspoređeno je naelektrisanje $Q = 3,24\pi \cdot 10^{-12}$ C. Odrediti električnu indukciju D_A uz samu površinu kugle kao i jačinu električnog polja E uz površinu kugle.

3.5. Tanki linijski provodnik kružnog preseka ravnomerno je naelektrisan po jedinici svoje dužine naelektrisanjem 10^{-11} [C/cm] i nalazi se u vazduhu. Odrediti intezitet električnog polja u tački čije je normalno odstojanje od ose provodnik 18 cm.

3.6. Data je sfera poluprečnika $r_1 = 10$ mm. Polje na 10 cm od centra sfere je E = 100 V/m. Odrediti opterećenje (količinu naelektrisanja) i površinsku gustinu naelektrisanja na sferi.

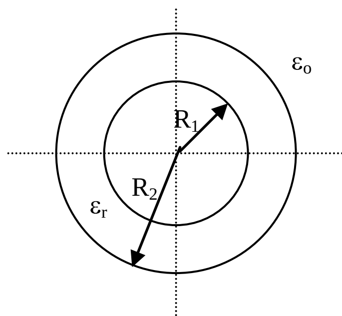
3.7. Rastojanje između elektroda ravnog kondezatora (dveju ravni) je d = 1 mm. Površina ploča (ravni) je $S = 50\ cm^2$. Električno polje između ploča iznosi E = 100. 000 V/m. Izračunati površinsku gustinu naelektrisanja kao i ukupnu količinu naelektrisanja!

3.8.** Poluprečnik neograničeno dugog pravolinijskog provodnika je R = 1 mm. Po kilometru dužine provodnika nalazi se opterećenje od 10^{-7} C. Naći polje na površini provodnika kao i na rastojanju 1 km od ose provodnika!

3.9.** Na rastojanju r = 180 m od ose pravolinijskog cilindričnog provodnika poluprečnika R = 1 mm izmerena je jačina električnog polja E = 1 V/m. Izračunatu podužnu (linijsku) količinu elektriciteta na provodniku kao i polje na površini provodnika !

3.10. Naći jačinu električnog polja u dielektriku između dve paralelne beskonačne ploče. Dielektrik se sastoji iz staklene ploče ($\varepsilon_{r1} = 6$) debljine $d_1 = 3$ mm i parafinske ploče ($\varepsilon_{r2} = 2$) debljine $d_2 = 3$ mm. Površinsko naelektrisanje iznosi $\sigma = 3 \cdot 10^{-10}\ C/cm^2$!

3.11.



Sl.3.11.

Metalna kugla (sl.3.11.) poluprečnika $R_1 = 5$ cm obavijena je slojem dielektrika sferičnog oblika poluprečnika $R_2 = 10$ cm. Relativna dielektrična propustljivost (konstanta) dielektrika je $\varepsilon_r = 3$. Na metalnoj kugli se nalazi količina elektriciteta Q = 100 pC. Izračunati:

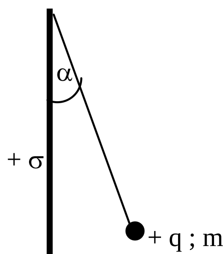
a) $D = f_1 (r)$ [Električnu indukciju u zavisnosti od r]
b) $E = f_2 (r)$ [električno polje u zavisnosti od rastojanja r].

Nacrtati odgovarajuće dijagrame

3.12. Na tačkasto naelektrisanje 1 μC, koje se nalazi u blizini ravnomerno naelektrisane ravne ploče, deluje elektrostatička (Kulonova) sila 60 mN. Naći površinsku gustinu naelektrisanja na ploči.

3.13. Dve koncentrične sferne površine poluprečnika 6 cm i 10 cm ravnomerno su naelektrisane količinama naelektrisanja 1 nC i – 5 nC. Naći jačinu polja u tačkama udaljenim 5 cm, 9 cm i 15 cm od centra sfera.

3.14.



Sl.3.14.

Za ravnomerno naelektrisanu ravan, sa površinskom gustinom naelektrisanja $\sigma = 4 \cdot 10^{-5}$ C/m^2 , učvršćena je laka neistegljiva nit na kojoj visi kiglica mase m = 1 g i naelektrisanja q = 1 nC (sl.3.14).

Naći ugao α između niti i ravni.

3.15. Neprovodna kugla poluprečnika R ravnomerno je zapreminski naelektrisana količinom naelektrisanja Q. Nacrtati gragik zavisnosti jačine električnog polja od udaljenosti r tačke od centra kugle, ako je ona u vazduhu ($\varepsilon_r = 1$).

3.16. Površinska gustina naelektrisanja ravni je 1 μC/m^2. Koliki je fluks električnog polja kroz kvadratnu površinu stranice 10 cm ako je ravan kvadrata pod uglom 30° u odnosu na linije sile polja naelektrisane ravni ?

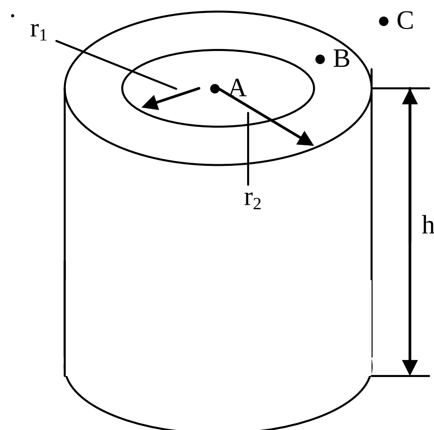
3.17*. Fluks jačine polja E kroz zatvorenu površinu S je 100 Vm. Izračunati naelektrisanje koje površina obuhvata.

3.18.** Tačkasto naelektrisanje $Q = 2 \cdot 10^{-11}$ C nalazi se u preseku dijagonala kocke. Odrediti fluks vektora E (električnog polja) kroz jednu stranu kocke.

3.19.** Dve koncentrične sferne površi, jedna poluprečnika a, druga poluprečnika b naelektrisane su : unutrašnja sfera sa $Q_1 = 10^{-10}$ C, a spoljašnja sa $Q_2 = -\,5 \cdot 10^{-10}$ C. Poluprečnici sfera su a = 3 cm, a b = 5 cm. Odrediti vektor jačine električnog polja u svim tačkama. Rešenje predstaviti grafički.

3.20. Električno polje potiče od dve peralelne ravnomerno naelektrisane beskonačne ravne površine. Površinska gustina naelektrisanja na jednoj ravni je 1 nC/m^2 , a na drugoj 3 nC/m^2. Naći jačinu polja između ovih ravni, kao i izvan tog prostora.

3.21.**



Sl.3.21.

Dva koaksijalna šuplja cilindra, prema sl.3.21, opterećena su količinama naelektrisanja tako da je spoljni optetećen sa + Q a unutrašnji sa – Q naelektrisanjem. Kolika je jačina električnog polja:

a) u samom centru cilindra (tačka A),
b) između cilindara (tačka B) i
c) van cilindra (tačka C)

Brojni podaci: | Q | = 10 nC, r_1 = 10 cm, r_2 = 20 cm, $\varepsilon_r = 1$ i h = 1 m.

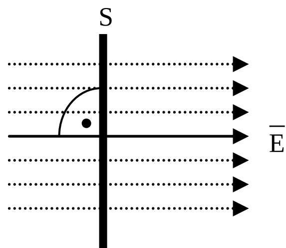
Rešenja obrazložiti.

3.22. Ako je jačina električnog polja zemlje $E_Z = -222$ V/m, izračunati količinu naelektrisanja koja se izdvoji (indukuje):

a) na ravnom horizontalnom limenom krovu površine 20 m^2,

b) na krovu iste površine ali pod uglom od 30°.

3.23.



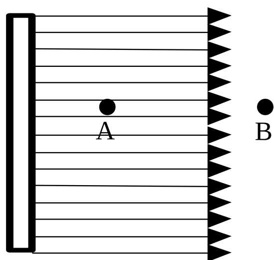
Sl.3.23.

Flluks električnog polja kroz površinu **S** jednak: $\psi = 200$ Vm,pri uglu od 90° između površine i linije homogenog električnog polja **E**, kao na slici 3.23.
Koliki će biti taj fluks istog električnog polja ako površina **S** čini ugao od 60° u odnosu na linije električnog polja ?

4. RAD SILA U ELEKTRIČNOM POLJU.

ELEKTRIČNI POTENCIJAL I ELEKTRIČNI NAPON

4.1 RAD SILA U ELEKTRIČNOM POLJU



Sl.11.

Ako se u električnom polju nađe neko naelektrisano telo, tada će to polje delovati na telo, usled čega se dato naelektrisano telo pomera. Pravac kretanja naelektrisanog tela odgovara pravcu polja, a smer je isti (pozitivno naelektrisano telo), ili je suprotan (negativno naelektrisano telo). Na ovaj način naelektrisano telo obavlja određeni rad (kreće se), što će reći da električno polje stvara određunu radnju ako se u njegovom prostoru nađe neko naelektrisanje.
Dovođenjem nekog pozitivnog naelektrisanog tela u tačku A (sl.11), električno polje će nastojati da ga izbaci iz svog prostora, dakle pomera ga u tačku B (koja se nalazi u beskonačnosti – teorijski).

Ista radnja treba da se utroši da bi se dato naelektrisanje iz tačke B (van električnog polja) prenelo u tačku A. Naravno ova radnja je suprotnog smera i ona nastaje usled neke spoljnje sile. Zbir ovih radnji jednak je nuli.Na osnovu ovoga se može izvući jedan veoma bitan zaključak, koji ujedno predstavlja zakon održanja energije koji glasi: **Rad električnih sila pri prenošenju nekog naelektrisanja duž zatvorene putanje u električnom polju jednak je nuli.** Ovaj zakon važi bez obzira kakva je putanja, bitno je da je ona zatvorena (petlja, kontura ili pravac). Neko naelektrisanje miruje u električnom polju jedino u onom slučaju ako se sile koje na njega deluju potiru (sila električnog polja i spoljnja sila koja ga vraća).
Ako je električno polje homogeno na naelektrisanje deluje sila koja je jednaka: $F = Q \cdot E$.
Kod pomeranja naelektrisanja ono obavlja rad koji je jednak: $\mathbf{\Delta A = F \cdot \Delta r}$, gde je :
ΔA…. utrošeni rad [J]
F…… sila koja deluje na naelektrisanje [N]
Δr…. pređeni put koje izvrši dato naelektrisanje [m].

4.2. ELEKTRIČNI POTENCIJAL

Ukupna radnja jednaka je zbiru svih pojedinačnih, pa sledi: $\mathbf{A = \Sigma \Delta A = \Sigma F \cdot \Delta r = \Sigma E \cdot Q \cdot \Delta r}$ **[J].**
Ispitno (probno) naelektrisanje na svom putu dolazi u beskonačan broj tačaka. Svaka od njih poseduje određeni stepen potencijalne energije. To je ona energija koja bi se utrošila da bi se to naelektrisanje izbacilo iz te tačke van domašaja polja (energija polja), odnosno to je ona energija (rad) koja bi se utrošila da bi se isto to naelektrisanje izvan domašaja polja vratilo nazad u istu tačku (neka mehanička energija spolja). Ovaj odnos između potencijalne energije za neku tačku u električnom polju i količine naelektrisanja se naziva **ELEKTRIČNIM POTENCIJALOM.**
Dakle, za bilo koju tačku u električnom polju električni potencijal je jednak:

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{EQr}{Q} = \mathbf{E\ r} \quad \mathbf{[V].}$$

gde je V potencijal a njegova je jedinica volt [V].
Iz navedenog se može zaključiti da je električni potencijal **skalarna veličina,** što nam daje mogućnost da se preko njega može odrediti i električno polje (koje je vektorska veličina).
Relacija $\mathbf{V = E \cdot r}$ može se koristiti kod homogenog električnog polja (beskonačne ravne). Kod svih drugih oblika električni potencijal se određuje relacijom :

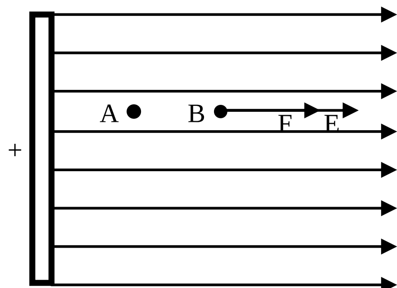
$$V = -\int E\,dr\,,$$

gde je ∫ simbol za integral (viša matematika).

Ako u prostoru imamo više naelektrisanja, tada je ukupni potencijal bilo koje tačke jednak zbiru potencijala kojeg svako od tih naelektrisanja stvara u toj tački (vodeći računa o predznaku):

$$V = V_1 + V_2 + \dots\dots\dots + V_n$$

4.3. E L E K T R I Č N I   N A P O N (RAZLIKA POTENCIJALA)



Sl.12.

Ako se u homogenom električnom polju nađe neko naelektrisanje Q (sl.12), na nega će delovati električno polje silom F.Kada se to naelektrisanje nađe u tački A, potencijalna enrgija te tačke biti će jednaka: $W_A = V_A \cdot Q$, a u tački B: $W_B = V_B \cdot Q$. Razlika između ove dve energije predstavlja rad koji se utroši da bi se to naelektrisanje prenelo iz tačke A u tačku B, tj.

$$A = W_A - W_B = V_AQ - V_BQ = (V_A - V_B)Q = UQ$$

Razlika električnih potencijala između bilo koje dve tačke naziva se **električnim naponom.**
Dakle, napon između tačaka A i B jednak je $U_{AB} = V_A - V_B$
Jedinica za električni napon je kao i za električni potencijal, tj. volt [V].
Iz navedenih relacija se može izvući ,važan ,zaključak da je električni rad srazmeran količini naelektrisanja i električnom naponu :

$$A = Q\,U \;\; [\,J\,]$$

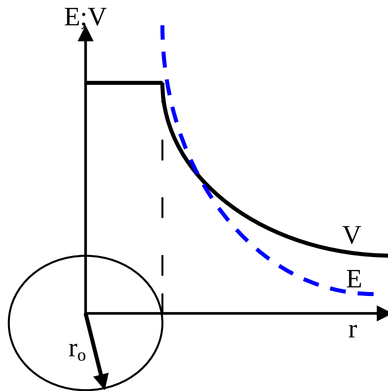
Kako je $A = F\,r = E\,Q\,r = U\,Q \Rightarrow U = E\,r$

Odnosno $E = \frac{U}{r}$ **,** gde je r rastojanje između tačaka između kojih vlada napon.

Navedena relacija se koristi kod homogenog električnog polja, i iz nje je izvedena jedinica za jačinu električnog polja [V/m].

4.4. POTENCIJAL I JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA KOD SLOŽENIJIH SLUČAJEVA

4.4.1. NAELEKTRISANA KUGLA



Sl.13.

Kako u unutrašnjosti kugle nema naelektrisanja ($Q = 0 \Rightarrow D = Q / S = 0 \Rightarrow E = D / \varepsilon = 0$), jer se sva naelektrisanja potiskuju ka površine, pa je i jačina električnog polja jednaka nuli.
Električno polje u prostoru van kugle ($r \geq r_0$) iznosi:

$$E = \frac{Q}{4r^2\pi\varepsilon}\left[\frac{V}{m}\right] \quad ; \quad D = \frac{Q}{4r^2\pi}.$$

Električni potencijal u unutrašnjosti kugle jednak je potencijalu na površini, jer je potencijal skalarna veličina, pa se on u centru kugle dobije ukupnim zbirom potencijala kojeg stvaraju elementarna naelektrisanja sa površine.
Dakle potencijal u kugli, kao i na njenoj površini iznosi:

$$V = -\int E dr_o = -\int \frac{Q}{4r_o^2\pi\varepsilon} dr_o = \frac{Q}{4r_o\pi\varepsilon} = E \cdot r_o [V]$$

El. potencijal u prostoru van kugle jednak je:

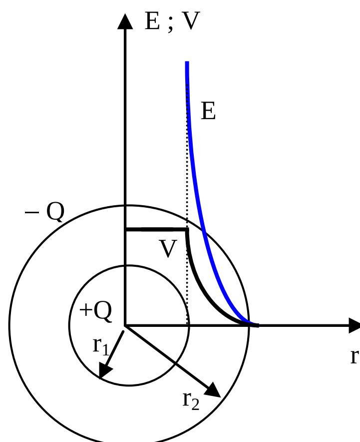
$$V = -\int E dr = -\int \frac{Q}{4r^2\pi\varepsilon} dr = \frac{Q}{4r\pi\varepsilon} = E \cdot r$$

Konačno za $r \geq r_o \Rightarrow$

$$\boxed{V = \frac{Q}{4r\pi\varepsilon}[V]}$$

Na sl.13 se vidi kako jačina električnog polja i električni potencijal zavise od udaljenosti posmatrane tačke od centra naelektrisane kugle

4.4.2. DVE KONCENTRIČNE KUGLE



Sl.14.

Ako imamo dve koncentrične, slika 14, kugle koje su naelektrisane sa +Q i − Q, tada je električno polje u manjoj kugli jednako nulu.. Isti je slučaj u prostoru van kugli, jer obe stvaraju istu jačinu polja, pa se ona međusobno potiru, jer su istog inteziteta.Električno polje između kugli ($r_2 \geq r \geq r_1$) jednako je polju unutrašnje kugle, jer je polje spoljašnje jednako nuli.
Dakle $E = E_1 \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4r^2\pi\varepsilon}\left[\frac{V}{m}\right]}$$

Napomena: Naelektrisanje −Q je raspoređeno po površi kugle sa poluprečnikom r_2, pa ono nema nikakvog dejstva na samu unutrašnjost kugle (nema indukcije).

Potencijal u bilo kojoj tački između obe kugle ($E_2 = 0$) na udaljenosti r iznosi : $V = V_1 + (-V_2) \Rightarrow$

$$V = \frac{Q}{4r\pi\varepsilon} - \frac{Q}{4r_2\pi\varepsilon} = \frac{Q(r_2 - r)}{4rr_2\pi\varepsilon}$$

Iz navedenih relacija sledi da je potencijal na površini unutrašnje kugle jednak:

$$V' = \frac{Q}{4r_1\pi\varepsilon} - \frac{Q}{4r_2\pi\varepsilon} = \frac{Q(r_2 - r_1)}{4r_1r_2\pi\varepsilon},$$

a potencijal na spoljašnjoj površini kugle jednak je:

$$V'' = \frac{Q}{4r_2\pi\varepsilon} - \frac{Q}{4r_2\pi\varepsilon} = 0$$

Napon između unutrašnje i spoljašnje površine jednak je potencijalu unutrašnje površine, jer je :

$$\mathbf{U = V' - V'' = V' - 0 =} \frac{Q(r_2 - r_1)}{4r_1r_2\pi\varepsilon}$$

Iz izraza za električni napon može se izraziti količina naelektrisanja Q, koja iznosi:

$$Q = \frac{U \cdot 4r_1r_2\pi\varepsilon}{r_2 - r_1} \Rightarrow E = \frac{Q}{4r^2\pi\varepsilon}$$

Jačina električnog polja između dve koncentrične kugle koje su priključene na napon U jednaka je:

$$E = \frac{Ur_1r_2}{r^2(r_2 - r_1)}$$

Grafički dijagram jačine električnog polja i električnog potencijala za dve koncentrične kugle u zavisnosti od udaljenosti r od centra kugli dat je na slici 14.

4.4.3. USAMLJENI PROVODNIK (NIT)

Jačina električnog polja kod pravolinijskog beskonačnog provodnika (vidi sliku 5) jednaka je:

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon r\pi l}$$

Koristeći višu matematiku potencijal provodnika jednak je: $\mathbf{V = -\int E\, dr} \Rightarrow$

$$V = -\int \frac{Q}{2\varepsilon r\pi l} dr = -\int \frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\int \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\ln r\,.$$

Konačno,

$$V = -\frac{Q\ln r}{2\varepsilon\pi l}$$

gde je ln r prirodni logaritam od r , a r je udaljenost tačke od osne simetrale (centra)provodnika.

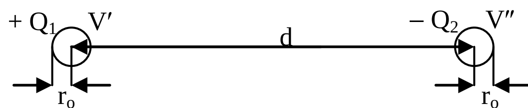
4.4.4 DVA PARALELNA PROVODNIKA

Jačina polja između dva paralelna provodnika jednaka je:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q_1}{2\varepsilon\pi l r_1} \pm \frac{Q_2}{2\varepsilon\pi l r_2}$$

Električni potencijal u nekoj tački između dva provodnika jednak je: $V = V_1 + V_2$
Ako je $Q_1 > 0$, a $Q_2 < 0 \Rightarrow V = V_1 - V_2$, pa je:
$V = -\int E_1\, dr_1 - (-\int E_2\, dr_2) = -Q_1 \ln r_1 / 2\varepsilon\pi l - (-Q_2 \ln r_2 / 2\varepsilon\pi l) = Q_2 \ln r_2 / 2\varepsilon\pi l - Q_1 \ln r_1 / 2\varepsilon\pi l$
Ako su apsolutne vrednosti naelektrisanja jednake ($|Q_1| = |Q_2|$) $\Rightarrow$

$$V = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



Sl.15.

Električni napon između dva paralelna provodnika , sl.15, ($r_2' = d - r_o$; $r_1' = r_2'' = r_o$ i $r_1'' = d - r_o$)

iznosi:

$$U = V' - V'' = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l} \ln \frac{d - r_0}{r_0} - \frac{Q}{2\varepsilon\pi l} \ln \frac{r_0}{d - r_0} \quad \Rightarrow$$

$$U = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l} 2 \ln \frac{d - r_0}{r_0} = \frac{Q}{\varepsilon\pi l} \ln \frac{d - r_0}{r_0}$$

4.4.5. CILINDRIČNI (KOAKSIJALNI) PROVODNIK

Jačina električnog polja između dva cilindra kod cilindričnog provodnika jednaka je jačini polja unutračnjeg cilindra, ako su naelektrisanja raznoimena (najčešći slučaj). Dakle (za $|Q_1| = |Q_2|$; $r_1 < r < r_2$) $\Rightarrow$

$$E = E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon\pi r l}$$

Električni potencijal u prostoru između cilindera iznosi:

$$V = V_1 + (-V_2) = -Q \ln \frac{r}{2\varepsilon\pi l} - \left(-Q \ln \frac{r_2}{2\varepsilon\pi l}\right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Električni napon između cilindričnih provodnika iznosi ($r' = r_1$; $r'' = r_2$):

$$U = V' - V'' = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\ln\frac{r_2}{r_1} - \frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\ln\frac{r_2}{r_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

4.4.6. PROVODNIK I RAVAN

Jačina električnog polja između provodnika i ravnine iznosi (na normali $r_1 = a$; $r_2 = 2h - a$; $Q_1 = -Q_2$):

$$E = \frac{Qh}{\varepsilon\pi l a(2h - a)}$$

Električni napon ($r_2' = 2h - r_o$; $r_1' = r_o$; $r_2'' = r_o$; $r_1'' = 2h - r_o$) :

$$U' = V' - V'' = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\ln\frac{2h - r_0}{r_0} - \frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\ln\frac{r_0}{2h - r_0} = \frac{Q}{\varepsilon\pi l}\ln\frac{2h - r_0}{r_0} \Rightarrow U = \frac{U'}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l}\ln\frac{2h - r_0}{r_0}}$$

Z A D A C I :

4.1. Koliki je potencijal tačke koja je udaljena $r = 3$ m od tačkastog naelektrisanja $Q = 2 \cdot 10^{-9}$ C u vazduhu ?

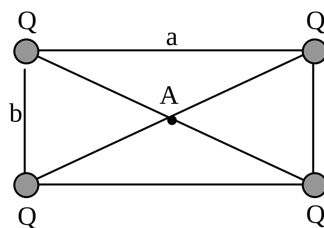
4.2. Dva tačkasta opterećenja $Q_1 = 50$ nC i $Q_2 = -20$ nC nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju od 20 cm. Izračunati:

a) potencijal tačke M koja se nalazi tačno na sredini spojnice opterećenja Q_1 i Q_2 ;
b) rad potreban da se opterećenje Q_1 prebaci u tačku M.

4.3. Ako je potencijal tačke N, $V_N = 0$, a potencijal tačke M, $V_M = 1\,800$ V, odrediti koliko je električno opterećenja Q, kada se za njegovo pomeranje iz tačke N do tačke M utroši rad od $4{,}5 \cdot 10^{-5}$ J.

4.4. U kom odnosu trebaju da budu opterećenja kugli Q_1 i Q_2 da bi površinska gustina naelektrisanja obe kugle bila jednaka, ako im je odnos poluprečnika $R_1/R_2 = 4$?

4.5.

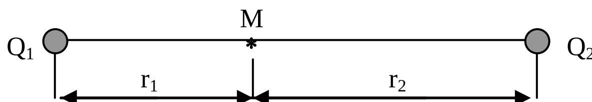


Sl.4.5.

U temenima pravougaonika u vazduhu nalaze se tačkasta opterećenja Q (sl.4.5). Stranice pravougaonika iznose a = 8 cm, b = 6 cm. Potencijal tačke A koja se nalazi na preseku dijagonala jednak je $V_A = 1{,}2$ KV. Koliko iznosi opterećenje Q ?

4.6. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 4$ nC i $Q_2 = -3$ nC nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju od 10 cm. Izračunati rad potreban da se naelektrisanje Q = 1 nC prenese iz tačke nultog potencijala u tačku koja se nalazi tačno na sredini spojnice (pravca)između opterećenja Q_1 i Q_2 .

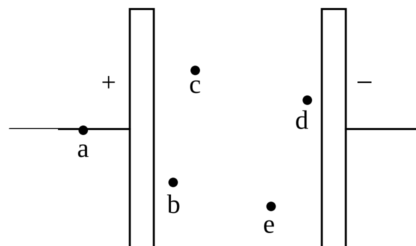
4.7.



Sl.4.7.

Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 5$ nC i $Q_2 = -10$ nC nalaze se na međusobnom rastojanju r = 18 cm (sl.4.7.). Odrediti položaj tačke M koja se nalazi na duži koja spaja naelektrisanja i ima nulti potencijal.

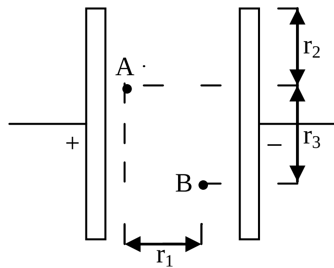
4.8.



Sl.4.8.

Koja tačka, prema slici 4.8, ima najveći potencijal, ako se one nalaze u prostoru između dve paralelne ravne koje stvaraju homogeno električno polje (pločast kondezator) ?

4.9.



sl.4.9.

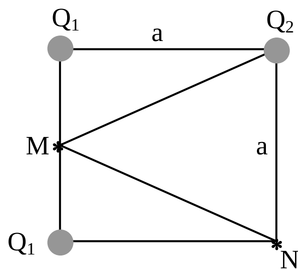
Napisati izraz za električni napon između tačaka A i B, preko jačine električnog polja i geometrijskih dimenzija, koje su prikazane na slici 4.9. Tačke se nalaze između dve paralelne ravne beskonačnih površina, na malom rastojanju .

4.10. U predhodnom zadatku pronaći tačku C čiji je potencijal najmanji i tačku D čiji je potencijal jednak nuli. Rešenje prokomentarisati.

4.11. Za predhodni zadatak ustanoviti gde je potrebno utrošiti najveći rad a gde najmanji da bi se neko naelektrisanje prebacilo iz jedne tačke u drugu (tačke su A;B;C i D) . Uz rešenja dati potrebna objašnjenja, uz potrebnu sliku (povezati zadatak 4.9. i 4.10.).

4.12. U polju usamljenog tačkastog naelektrisanja odabrane su dve tačke A i B na jednakim udaljenostima r od centra naelektrisanja Q. Koliki je napon između datih tačaka, ako ugao između linija sila (električnih linija), koje spajaju te tačke iznosi 60°, a dielektrik je vazduh? Dati kratak komentar.

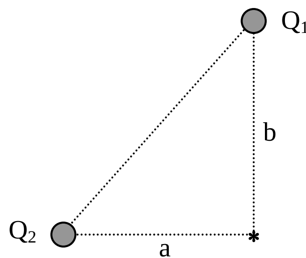
4.13.



Sl.4.13.

Koliki je napon između tačaka M i N, prema sl.4.13, ako su naelektrisanja Q_1 = 10 nC, Q_2 20 nC i Q_3 = 30 nC smeštena u tri temena kvadrata stranice a = 30 cm.Tačka N čini četvrto teme kvadrata, a tačka M se nalazi tačno na sredini stranice koja spaja temena u kojima se nalazi naelektrisanje Q_1 i Q_3. Sredina je vazduh ($\varepsilon_r = 1$).

4.14.



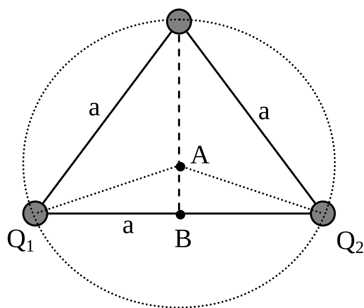
Sl.4.14

Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = -$ 50 nC i Q_2 = 20 nC, nalaze se u vazduhu u dva temena pravouglog trougla, kao na sl.4.14.

Ako je a = 6 cm i b = 8 cm odrediti potencijal tačke A koja se nalazi u slobodnom temenu trougla.

4.15. U temenima pravougaonika u vazduhu nalaze se četiri ista tačkasta naelektrisanja Q. Ako su stranice provougaonika a = 4 cm i b = 3 cm, odrediti kolika je količina navedenih naelektrisanja ako ona u centru pravougaonoka (presek dijagonala) stvaraju električni potencijal od 2,2 KV.

4.16.

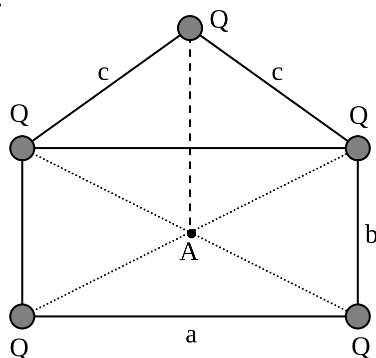


Sl.4.16.

U temenima jednakostraničnog trougla u vazduhu nalaze se tri tačkasta naelektrisanja Q_1, Q_2 i Q_3, kao na sl.4.16.

Ako su stranice trougla a = 10 cm, a $Q_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ C i $Q_3 = -\,4 \cdot 10^{-11}$ C, izračunati količinu naelektrisanja Q_1 tako da napon između tačaka A i B iznosi – 1,8 KV. Tačka A je centar opisane kružnice a tačka B je na polovini stranice koja spaja naelaktrisanja Q_1 i Q_2.

4.17.

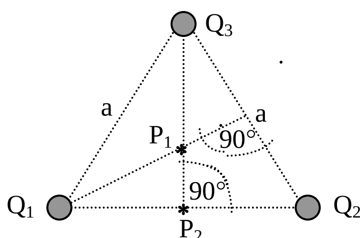


Sl.4.17.

Izračunati kolika je količina naelektrisanja Q, prema slici 4.17, ako pet istih tačkastih naelektrisanja stvara električni potencijal u centru pravougaonika od $V_A = 1{,}4$ KV.

Naelektrisanja su u temenima pravougaonika, odnosno jednokokrakog trougla čije su dimenzije: a = 10 cm, b = 4 cm i c = 6 cm. Sredina je vazduh.

4.18.

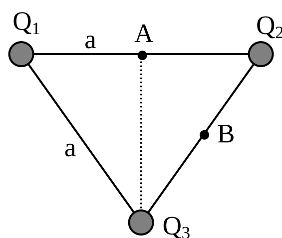


Sl.4.18.

Tri tačkasta naelektrisanja Q_1, $Q_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ C i $Q_3 = -\sqrt{3} \cdot 10^{-11}$ C nalaze se u temenima jednakostraničnog trougla stranice a = 10 cm, prema slici 47. Napon između tačaka P_1 i P_2 iznosi U = – 1,8 V.

Kolika je količina naelektrisanja Q_1?

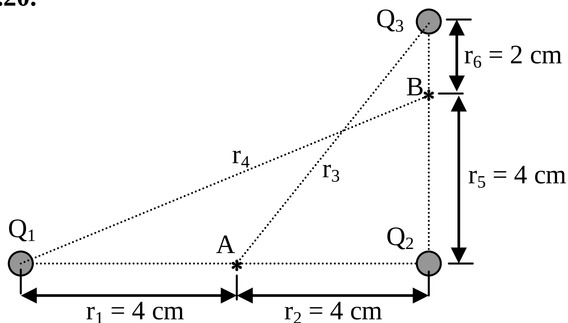
4.19.



Sl.4.19.

U temenima jednakostraničnog trougla stranice a, prema slici 4.18, u vazduhu nalaze se naelektrisanja Q_1, Q_2 i Q_3. Potencijal tačke A u odnosu na beskonačnost je 0 V.
Ako su količine naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 1$ pC, a stranica a = 2 cm, izračunati napon između tačaka A i B koje se nalaze tačno na polovici stranica trougla.

4.20.



Sl.4.20.

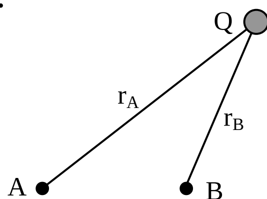
Tri usamljena tačkasta naelektrisanja $Q_1 = Q_2 = 20$ nC i Q_3, nalaze se u temenima pravouglog trougla, prema sl.4.20. Rad sila električnog polja pri premeštanju probnog naelektrisanja $q_p = 1$ pC iz tačke A u tačku B jednak je nuli. Kolika sila deluje na probno naelektrisanje kada se ono nađe u tački A? Nacrtati traženi vektor sile.

4.21. Dve paralelne ravne (pločast kondenzator) opterećene su količinom elektriciteta Q = 20 nC. Obloge ravni su kvadratnog oblika površine 16 cm^2, a dielektrik ima relativnu dielektričnu konstantu 30.

Rad koji izvrši sila električnog polja pri pomeranju naelektrisanja $q_p = 0{,}1$ pC sa jedne na drugu oblogu iznosi 6 pJ.

a) Izračunati napon na oblogama ravni i jačinu električnog polja između njih,
b) Koliki je potencijal tačke B na rastojanju l = 1 mm od pozitivne obloge čiji je potencijal poznat i iznosi 12 V?

4.22.



Sl.4.22

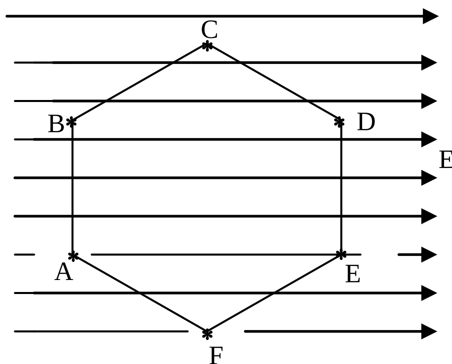
U vakuumu se nalazi usamljena kugla,sl.4.22, naelektrisana količinom naelektrisanja Q. Poluprečnik kugle je r = 3 mm. Pri pomeranju tačkastog naelektrisanja $q_p = 1$ pC iz tačke A u B izvrši se rad od 270 pJ. Tačke su na rastojanju $r_A = 5$ cm odnosno $r_B = 2$ cm od centra kugle.Koliki je napon U_{AB} između tačaka A i B, naelektrisanje Q i potencijal kugle V?

4.23. Dve paralelne metalne ploče udaljene su međusobno 5 mm. Kolika je jačina električnog polja i gustina električnog fluksa ako su ploče priključene na napon 220 V.

4.24. Ako jačina električnog polja zemlje iznosi – 1,35 V/cm a poluprečnik zemlje je 6 370 km, izračunati:

a) gustinu naelektrisanja na površini zemlje,
b) ukupno naelektrisanje zemlje i
c) potencijal zemlje

4.25.

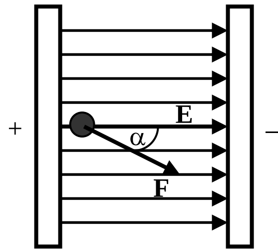


Sl.4.25.

Ako se u homogenom električnom polju jačine 180 V/m nalazi pravilan šestougao sa tačkama A;B;C;D;E i F, čije su stranice a = 5 cm, izračunati napone između tačaka:
A i B; A i C; A i D; A i E i B i C. Položaj šestougla u odnosu na linije električnog polja prikazan je na slici 4.25.

4.26. Odrediti intezitet i smer električnog polja koje će naelektrisanu kuglu mase 10 g i naelektrisanja $Q = -10$ nC pomeriti ka zemlji pod uglom: a) 45°, b) 30° , c) 60°.

4.27.



Sl.4.27.

Izračunati masu naelektrisane kugle koja se u horizontalnom električnom polju kreće pod uglom od 30° u odnosu na linije polja, prikazano na slici 4.27, ako je jačina polja 10 KV/m, a naelektrisanje kugle 10μC.

4.28. Ako je ukupno naelektrisanje zemlje $Q_Z = -10$ C (poluprečnik zemlje iznosi 6 370 km), izračunati:
a) potencijal zemlje,
b) jačinu električnog polja na površini zemlje i
c) gustinu električnog fluksa na površini zemlje (površinsku gustinu naelektrisanja).

4.29. Naći potencijal kugle radijusa R = 0,1 m ako je vrednost potencijala na rastojanju r = 10 m od njene površine jednak 20 V.

4.30. Kugla poluprečnika 2 cm naelektrisana je negativno do potencijala 2 000 V. Odrediti masu svih elektrona kojima je kugla naelektrisana ($\varepsilon_r = 1$).

4.31. Metalna kugla poluprečnika 5 cm nalazi se u vazduhu. Do kolikog potencijala sme da se naelektriše kugla ako je jačina polja pri kojoj dolazi do proboja vazduha 3 KV/mm.

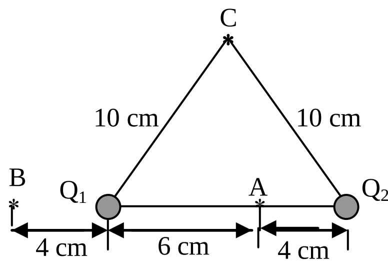
4.32. Četiri jednaka tačkasta naelektrisanja od po 1 μC smeštena su u temena kvadrata stranice 40 cm. Koliki je potencijal, a kolika jačina polja u centru kvadrata.

4.33. Izračunati rad koji se izvrši premeštanjem u vakuumu loptice koja je naelektrisana sa 5 nC iz tačke udaljene 10 cm u tačku udaljenu 4 cm od centra druge loptice naelektrisane sa 0,3 nC.

4.34. Naći jačinu polja i potencijal u tačkama A i B koje su udaljene od naelektrisanja q = 150 nC za $r_A = 5$ cm i $r_B = 25$ cm. Odrediti rad električnih sila koji se izvrši pri pomeranju naelektrisanja q′ = 10 nC iz tačke A u tačku B.

4.35. Na krajeve neprovodnih konaca jednakih dužina 80 cm, obešenih u jednu tačku, pričvršćene su dve kuglice od plute jednakih poluprečnika od po 4 mm (gustina plute je 0,2 g/cm^3). Ako se kuglice naelektrišu podjednakim količinama naelektrisanja, odbijaju se do rastojanja 10 cm. Odrediti:
a) jačinu sile kojom se kuglice odbijaju;
b) količinu naelektrisanja svake kuglice i
c) električni potencijal svake kuglice ($\varepsilon_r = 1$).

4.36.



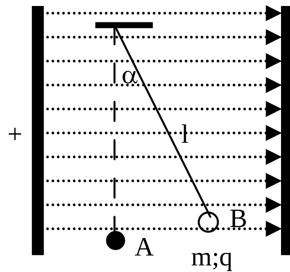
Sl.4.36.

Tačkasto naelektrisanje od q_1 = 12 nC i q_2 = – 12 nC postavljena su na međusobnom rastojanju od d = 10 cm, prema sici 4.36.
Izračunati:

a) jačinu polja u tačkama A, B i C.
b) potencijal u tačkama A, B i C
c) potencijalnu energiju tačkastog naelektrisanja q = 4 nC postavljenog u tačkama A, B i C
d) rad koji je potrebno izvršiti da bi se naelektrisanje q prenelo iz A u B; i iz C u A.

4.37. Na jednom malom telu sfernog oblika nalazi se količina naelektrisanja 0,2 μC. Odrediti potencijal u tačkama: A koja je udaljena od centra sfere 3 m i B koja je od centra udaljena 8 m. Koliki se rad vrši pri pomeranju tačkastog naelektrisanja 0,5 mC iz tačke A u tačku B ?

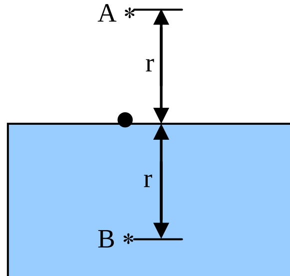
4.38.



Sl.4.38.

Za koliki ugao će se otkloniti kuglica od staniola mase 0,4 g obešena o svileni konac, ako je stavimo u horizontalno homogeno polje jačine 10^5 V/m? Naelektrisanje kuglice je $4{,}9 \cdot 10^{-9}$ C. Kolika je razlika potencijala tačaka A i B ako je dužina konca 20 cm, vidi sliku 4.38.

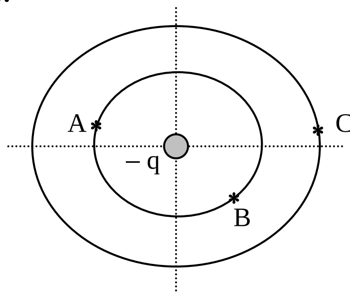
4.39.



Sl.4.39.

Tačkasto naelektrisanje 1μC nalazi se na površini vode (ε_r = 81), kao na slici 4.39. Koliki je potencijal u tačkama A i B ako je $r_A = r_B$ = 15 cm?

4.40.



Sl.4.40.

Tačke A, B i C nalaze se u električnom polju tačkastog naelektrisanja koje je negativno, sl.4.40.

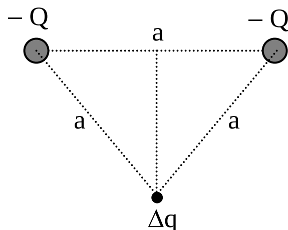
a) Koliki rad treba izvršiti da bi se neko naelektrisanje premestilo iz tačke A u tačku B?

b) Uporediti rad koji treba izvršiti pri premeštanju naelektrisanja iz A u C sa radom pri premeštanju iz B u C.

4.41. Koliki rad treba izvršiti da bi se naelektrisanje q = 3 μC iz beskonačnosti premestilo u tačku na rastojanju r = 20 cm od površine metalne kugle poluprečnika R = 4 cm? Potencijal kugle je 400 V.

4.42. Dve metalne kugle poluprečnika r_1 = 10 cm i r_2 = 5 cm spojene su tankom provodnom žicom. Ako na obe kugle dovedemo ukupno naelektrisanje od 120 nC, koliko iznosi naelektrisanje svake od njih?

4.43.



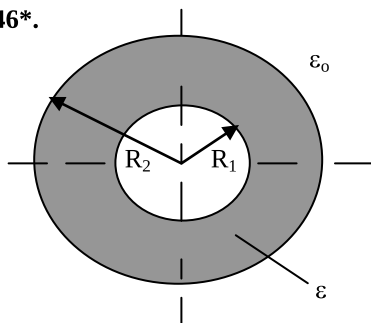
Sl.4.43

Dva tačkasta naelektrisanja, jednaka po predznaku i opterećenju $|-Q|$, nalaze se na međusobnom rastojanju a. U simetralnoj ravni, na rastojanju a od naelektrisanja, nalazi se probno naelektrisanje Δq, prema sl.4.43.
Koliki rad treba da se utroši da bi probno naelektrisanje dovelo u ravnotežno stanje (položaj u kojem na probno naelektrisanje neće delovati sila)?

4.44. Metalna kugla poluprečnika R = 50 cm opterećena je količinom elektriciteta $Q = 12 \cdot 10^{-8}$ C. Ako se ova kugla spoji provodnikom sa neopterećenom metalnom kuglom poluprečnika r = 10 cm, kolika će biti površinska gustina elektriciteta na kuglama? Zanemariti međusobni uticaj kugli.

4.45. Za predhodni zadatak odrediti jačine električnog polja na površinama kugli, zanemarujući međusobni uticaj kugli (kugle beskonačno udaljene). Koliki je međusobni odnos između jačina električnih polja E_1 i E_2 na površinama kugli ?

4.46*.



Sl.4.46.

Metalna kugla poluprečnika R_1 = 5 cm obavijena je slojem dielektrika sferičnog oblika poluprečnika R_2 = 10 cm, kao na slici 4.46. Relativna dielektrična konstanta dielektrika iznosi ε_r = 3. Na metalnoj kugli se nalazi količina elektriciteta Q = 100 pC. Odrediti zavisnost potencijala V u funkcije sa rastojanjem r od centra kugle [V = f (r)], i nacrtati odgovarajući grafički dijagram.

4.47. Dva mala tela, jedno pozitivnog naelektrisanja Q, a drugo negativnog – Q, nalaze se na rastojanju d. Odrediti potencijal u okolini ova dva tela u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti (potencijal jednak nuli). Da li postoji u blizini tela površ šiji je potencijal jednak potencijalu referentne tačke? Koliki rad izvrše električne sile ako se rastojanje tela poveća za dva puta, tj. na 2d?

4.48. Četiri mala tela istih naelektrisanja Q = 0,5 nC nalaze se u temenima kvadrata stranice a = 2 cm. Odrediti potencijal u preseku dijagonala kvadrata i potencijalnu razliku između te tačke i središta jedne od stranica kvadrata. Koliki rad izvrše električne sile pri pomeranju jednog tela od tih naelektrisanja do neke veoma udaljene tačke?

4.49. Dva mala naelektrisana tela, naelektrisanja $Q_1 = -3$ nC i $Q_2 = 1{,}5$ nC, nalaze se na rastojanju r = 5 cm. Odrediti potencijal u tački koja se nalazi na polovini rastojanja između njih. Odrediti tačku ili tačke na pravoj koja prolazi kroz naelektrisana tela u kojoj je potencijal jednak nuli (V = 0).

4.50. Dva tačkasta naelektrisanja nalaze se na međusobnom rastojanju od 15 cm. Merenjem je ustanovljeno da je na udaljenosti od prvog naelektrisanja od 10 cm a od drugog 25 cm električni potencijal jednak nuli. Odrediti koji je odnos između naelektrisanja i njihov predznak.

4.51. Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 5$ nC i $Q_2 = -10$ nC nalaze se na međusobnom rastojanju od 15 cm. Odrediti tačke u kojima je potencijal jednak nuli.

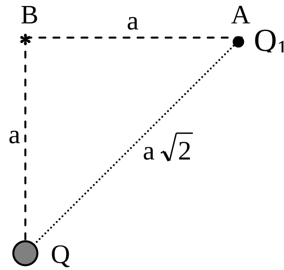
4.52.** Koliko električno polje deluje na samoj površini manjeg valjka cilindričnog oblika ako su prečnici valjaka $d_2 = 9$ mm i d_1 6 mm, a na njih je priključen napon od U = 450 V?

4.53.** Između dva koaksijalna metalna valjka u udaljenosti r = 2,2 mm od središta valjaka dielektrični pomak (električna indukcija) iznosi $D_r = 6\ \mu C/m^2$. Prečnik manjeg valjka iznosi $d_1 = 2$ mm, a napon između valjaka je U = 800 V. Prostor između valjaka ispunjen je porculanom ($\varepsilon_r = 5{,}5$). Izračunati prečnik većeg valjka d_2 kao i maksimalnu jačinu električnog polja E_m koja vlada u porculanu.

4.54.** Kolika je jačina električnog polja E_A u tački A koja se nalazi na jednakoj udaljenosti između dvije koncentrične kugle prečnika $R_1 = 10$ mm i $R_2 = 12$ mm ako je između kugli priključen napon od U = 363 V?

4.55.** Dve koncentrične kugle čiji su prečnici $R_1 = 12$ mm i $R_2 = 18$ mm ima jačinu električnog polja na površini manje kugle E = 300 V/mm. Koliki je napon među koncentričnim kuglama?

4.56.



Sl.4.56.

Izračunati rad koji izvrši spoljna sila pri premeštanju tela naelektrisonog tačkastim naelektrisanjem, iz tačke A u tačku B, prema slici 4.56.

Brojni podaci: Q = + 100 pC; Q_1 = + 1 pC; a = 30 cm

5. PROVODNIK U ELEKTRIČNOM POLJU

Ako se provodnik ubaci u električno polje u provodniku dolazi do preraspodele naelektrisanja. To traje kratko vreme, da bi neposredno nakon toga došlo do ravnotežnog stanja. Ravnotežno stanje nastaje kada su ispunjena dva uslova, i to:

1) kada jačina električnog polja u provodniku postane jednaka nuli (**E = 0**)
2) kada tangencijalna komponenta električnog polja na površini provodnika postane jednaka nuli ($\mathbf{E_T = 0}$).

Višak naelektrisanja u provodniku se uvek rasporedi na njegovoj površini, pa je prema Gausovoj teoremi jačina električnog polja u provodniku jednaka nuli (u provodniku nema naelektrisanja). Dakle, **električno polje postoji samo van električnog provodnika.**

Kako se na površini provodnika izdvoji određena količina naelektrisanja, površinska gustina naelektrisanja, koja ujedno predstavlja električnu indukciju , jednaka je $\sigma = Q/S$.
Sledi da je $Q = \sigma\cdot S$, a iz Gausove teoreme $\psi = Q/\varepsilon_o = \sigma\cdot S/\varepsilon_o$.
Kako je ψ električni fluks koji je jednak: $\psi = E\cdot S\cdot\cos\alpha$ (vidi fluks električnog polja). Za $\alpha = 0° \Rightarrow$
$E = \psi/S = (\sigma\cdot S/\varepsilon_o) / S = \sigma / \varepsilon_o$.
Na osnovu izvedene relacije određuje se **jačina električnog polja na površini provodnika,** koja je jednaka:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

pri čemu je smer normale od provodnog tela ka vakuumu.
Električno polje u blizini provodnika zavisi samo od oblika površine provodnika. U unutrašnjosti provodnika električno polje je jednako nuli, bez obzira da li je provodnik pun ili šupalj. Na osnovu ovoga se mogu zaštititi električni uređaji od prisustva električnog polja. To se postiže metalnim oklopom, koji se naziva **Faradejev kavez.**

Između naelektrisanja provodnika i njegovog potencijala postoji stalna veza. Njihov odnos je stalan za određeni provodnik, i taj odnos se naziva **kapacitivnošću provodnika,** koja se obeležava sa **C.**
Sledi da je kapacitet provodnika (neka konstanta), jednak:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}\,[F]}$$

Kondenzatorom nazivamo sistem koji je sačinjen od dva provodna tela (elektrode) na kojima je raspoređena ista količina naelektrisanja, ali sa suprotnim predznacima. Između naelektrisanja Q elektrode kondenzatora i razlike potencijala na obema elektrodama postoji određena veza. Njihov odnos je konstantan, a ta konstanta se naziva **kapacitetom kondenzatora**, koji je jednak:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U}\,[F]}$$ čija je jedinica **farad.**

Z A D A C I :

5.1. Provodna kuglica poluprečnika 2 cm naelektrisana sa 30 nC dovede se u kontakt sa nenaelektrisanom provodnom kuglicom poluprečnika 3 cm. Nakon toga kuglice se razdvoje na veliko rastojanje. Izračunati naelektrisanje i električni potencijal kuglica nakon njihovog razdvajanja.

5.2. Provodna kuglica poluprečnika 3 cm naelektrisana sa 10^{-8} C spoji se dugačkom provodnom žicom sa drugom provodnom kuglicom poluprečnika 2 cm čiji je potencijal jednak 9 KV. Odrediti:

a) potencijal prve kuglice pre spajanja sa drugom kuglicom,
b) naelektrisanje druge kuglice pre spajanja sa prvom,
c) naelektrisanje i potencijal svake od kuglica nakon njihovog spajanja,
d) energiju spojenih kuglica i
e) rad električnih sila nakon spajanja kuglica.

5.3. Naelektrisana provodna kuglica A poluprečnika 2 cm spoji se sa nenaelektrisanom kuglicom B poluprečnika 3 cm. Nakon razdvajanja, energija kuglice B iznosi 0,4 J. Koliko je bilo naelektrisanje kuglice A pre spajanja, ako je potencijal na nenaelektrisanoj kugli posle spajanja 485,6 KV ?

5.4. Metalna kugla poluprečnika 10 cm, naelektrisana do potencijala 300 V, okruži se tankom provodnom ljuskom (oklopom) poluprečnika 15 cm. Koliki će biti potencijal kugle ako se ona dovede u kontakt sa unutrašnjošću ljuske (kratko spoji)?

5.5. Metalna kugla poluprečnika 10 cm i potencijala 600 V okruži se tankom koncentričnom provodnom ljuskom poluprečnika 20 cm. Koliki će biti potencijal kugle ako se ljuska uzemlji?

5.6. U šuplju provodnu loptu se, kroz mali otvor, unese 20 malih tela od dielektrika, naelektrisanih trenjem približno istim naelektrisanjem $Q = 10^{-10}$ C. Izračunati potencijal lopte ako je njen poluprečnik $a = 5$ cm.

5.7. Koliko je naelektrisanje potrebno uneti u šuplju provodnu loptu spoljašnjeg poluprečnika $a = 10$ cm da bi intenzitet električnog polja na njenoj površi(ni) bio 30 KV/cm? (najveća jačina el. polja koja neće izazvati jonizaciju vazduha – proboj).

5.8. Svaka od 1000 jednakih kapljica vode, poluprečnika $r = 1$ mm, dovedena je na potencijal od 100 V. Sve su kapljice zatim sjedinjene u jednu veliku kap loptastog oblika. Koliki je potencijal velike kapi?
(U električnom polju voda se tretira kao provodnik .)

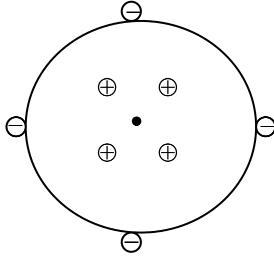
5.9. Mehur od sapunice, poluprečnika $R = 2$ cm i debljine zida $d = 10^{-4}$ cm, nalazi se na potencijalu $V = 1000$ V. Odrediti potencijal loptice koja se dobije kada se mehur rasprsne, a sav mehur pretvori u kapljicu.

5.10.** U centar šuplje nenaelektrisane provodne lopte, spoljašnjeg poluprečnika $a = 10$ cm, postavi se naelektrisana provodna lopta poluprečnika $b = 1$ cm i naelektrisanja $Q = 2$ pC. Izračunati potencijal male i velike lopte za sledeće vrednosti debljine zida d šuplje lopte: $d = 0$ (zanemarljiva debljina), $d = 1$ cm i $d = 5$ cm.

5.11*. Dve paralelne ravne provodne ploče površine $S = 0{,}05\ \text{m}^2$ naelektrisane su naelektrisanjem $Q_1 = 5\cdot10^{-8}$ C i $Q_2 = -\,5\cdot10^{-8}$ C. Rastojanje ploča je $D = 1$ cm. Izračunati intezitet vektora jačine električnog polja E u svim tačkama ako se između ove dve ploče unese treća, nenaelektrisana provodna ploča debljine $d = 5$ mm, na udaljenosti $a = 2$ mm od jedne od naelektrisanih ploča. Šta će se dogoditi ako se ova treća ploča uzemlji?

6. DIELEKTRIK U ELEKTRIČNOM POLJU

6.1. ELEKTRIČNI DIPOL



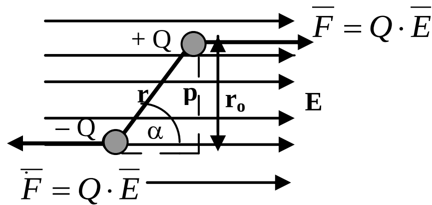
Sl.16

U atomu (ili molekuli) dielektrika elektroni su u svakom momentu simetrično raspoređeni oko jedne centralne tačke koja se naziva **centar negativnog naelektrisanja.** Pozitivna naelektrisanja (protoni) su , takođe simetrično raspoređena oko svoga centra, koji se naziva **centar pozitivnog naelektrisanja.** Centri ovih naelektrisanja se poklapaju (sl.16.)ako na atom ne deluje neko strano električno polje. **Ako se atom nađe u električnom polju, doći će do pomeranja i elektrona i protona u pravcu električnog polja, a samim tim centri se više ne poklapaju.**

Ako se centri pozitivnog i negativnog naelektrisanja atoma ne poklapaju, tada atom čini **električni dipol.** Osnovna karakteristika električnog dipola je **moment dipola,** koji iznosi:

$$\overline{P} = Q \cdot \overline{r}$$

gde je: Q količina jednog od naelektrisanja dipola (elektrona ili protona atoma)
r vektor rastojanja između naelektrisanja (centara elektrona i protona). Dogovorom je uzeto da se za smer vektor r uzme smer od negativnog ka pozitivnom naelektrisanju, pa na osnovu smera vektora r dobije se i smer vektora momenta dipola p.



Sl.17

Na dipol koji se nalazi u električnom polju deluju sile električnog polja koje čine spreg sila (sl.17.) M. Spreg sila M iznosi:

$$M = F \cdot r_o = F \cdot r \cdot \sin \alpha = Q \cdot E \cdot r \cdot \sin \alpha = p \cdot E \cdot \sin \alpha.$$

Ovaj momenat nastoji da obrne dipol tako da vektori **p i E postanu kolinearni** (istog pravca i smera).

U praksi postoji i druga vrsta dielektrika kod kojih je atom već polarizovan iako se ne nalazi u električnom polju. Dakle, njihovi centri pozitivnog i negativnog naelektrisanja se ne poklapaju. Ovi dipoli su haotično raspoređeni. Naravno, kada se ovi dielektrici nađu u električnom polju dipoli se orjentišu u pravcu polja.

Vektorski zbir svih momenata dipola **p** u elementarnoj zapremini **dV** oko neke tačke A iznosi **Σp.**
Vektor jačine polarizacije P, za datu tačku A iznosi:

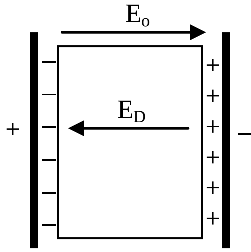
$$\mathbf{P} = \Sigma \mathbf{p} / d\mathbf{V}.$$

Vektor **P** je u svakoj tački svoje zapremine srazmeran vektoru **E,** pa sledi:

$$\mathbf{P} = \mathbf{k}\,\mathbf{E}.$$

gde koeficijent **k** predstavlja **koeficijent polarizacije dielektrika.**

6.2. DIELEKTRIK U ELEKTRIČNOM POLJU



Sl.18

Dve paralelne ravne ploče velikih površina stvaraju jačinu električnog polja u vakuumu koja je jednaka: $E_o = Q/\varepsilon_o S = \sigma/\varepsilon_o$. Ako u takvo električno polje unesemo neki materijalni dielektrik, u njemu će doći do usmeravanja električnih dipolova. Dipoli će se usmeriti u pravcu električnog polja, što za posledicu ima da se u zapremini dielektrika naelektrisanja dipolova međusobno poništavaju. Na površini dielektrika u pravcu električnog polja izdvoje se pozitivna, odnosno negativna naelektrisanja. Usled toga ova naelektrisanja stvaraju u dielektriku jačinu polja dielektrika E_D.

Rezultantno polje u dielektriku jednako je razlici polja vakuuma E_o i polja dielektrika E_D , jer su suprotnih smerova (vidi sl.18). Dakle,

$$\mathbf{E = E_o - E_D}\ .$$

Sledi zaključak da će se polje između dve ploče smanjiti ako između njih unesemo dielektrik. To se može objasniti i time, što će naelektrisanja na površini dielektrika da se kompenziraju (poništavaju) sa delom naelektrisanja na površinama naelektrisanih ploča. Time je gustina naelektrisanja na površinama ploča sada smanjena, i ona iznosi $\sigma = \sigma_o - \sigma_D \Rightarrow E = \sigma/\varepsilon_o = (\sigma_o - \sigma_D) / \varepsilon_o$,

Gde je σ_o gustina naelektrisanja ploča (kada je sredina vakuum), a

σ_D gustina naelektrisanja na površini materijalnog dielektrika (unet dielektrik).

Vektor električnog pomeraja (električne indukcije), se definiše relacijom:

$$\overline{D} = \varepsilon_o \cdot \overline{E} + \overline{P}$$, gde je prvi član pomeraj u vakuumu a drugi u dielektriku.

Kod linearnih dielektrika vektor polarizacije **P** jednak je: $\overline{P} = k \cdot \overline{E} = x_e \varepsilon_o \cdot \overline{E}$ **,** pa je

$$\boxed{\overline{D} = \varepsilon_o \cdot \overline{E} + x_e \varepsilon_o \cdot \overline{E} = \varepsilon_o \cdot \overline{E}(1 + x_e) = \varepsilon_o \varepsilon_r \cdot \overline{E} = \varepsilon \cdot \cdot \overline{E}}$$

Koeficijent $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ (1 + x_e) pokazuje za koliko se puta smanji jačina električnog polja ako umesto vakuuma uzmemo neki drugi dielektrik. Već od ranije je izvedena relacija $\varepsilon_r = E_o / E \Rightarrow E = E_o / \varepsilon_r$.

Koficijent x_e se stručno naziva **susceptibilnost dielektrika**, koja govori za kolika je puta električna indukcija kod materijalnog dielektrika veća od indukcije u vakuumu.

Z A D A C I :

6.1. Kuglica naelektrisanja 10 nC nalazi se u parafinu.

a) Kolika je jačina električnog polja u tački udaljenoj 5 cm od centra kugle? Relativna dielektrična konstanta parafina iznosi $\varepsilon_r = 2$.
b) Kolika je količina polarizovanih naelektrisanja na površini parafina koji okružuje kuglicu?

6.2. Jačina polja polarizovane kuglice poluprečnika 1 cm na rastojanju 4 cm od njenog centra iznosi 20 V/m. Ta kuglica potopi se u ulje relativne dielektrične propustljivosti $\varepsilon_r = 2{,}2$. Naći površinsku gustinu polarizovanih naelektrisanja na dodirnoj površini ulja i kuglice.

6.3. Naelektrisana kuglica poluprečnika 0,5 cm potopljena je u tečnost relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 3$. Gustina polarizovanih naelektrisanja na dodirnoj površini tečnosti sa kuglicom je $3 nC/m^2$ (rezultantna gustina naelektrisanja). Odrediti naelektrisanje kuglice.

6.4. Površinska gustina naelektrisanja na pločama ravnog kondenzadora (dve paralelne ravne) je $0{,}2\ \mu C/\ m^2$. Kolika je gustina polarizovanih naelektrisanja na parafinu kojim je ispunjen ceo kondenzator? Relativna dielektrična propustljivost parafina je $\varepsilon_r = 2$.

6.5. Površinska (rezultantna – zajednička) gustina polarizovanih naelektrisanja dielektrika koji ispunjava kondenzator (dve ravni) je $20 nC/m^2$.

a) Kolika je gustina naelektrisanja na pločama kondenzatora?
b) Kolika će biti jačina polja u kondenzatoru ako se dielektrik izvuče iz njega?

Relativna propustljivost dielektrika iznosi 2,5.

6.6*. Dve ravne peralelne ploče su priključene na napon od $U_o = 12$ V. Između ploča se nalazi vazduh kao dielektrik, i u njemu je ostvarena električna indukcija (dielektrični pomak) od $D = 60 nC/m^2$.
Ako između ploča ubacimo staklo, napon između ploča opadne na $U_S = 1{,}5$ V. Odrediti relativnu dielektričnu konstantu stakla, jačinu električnog polja pre ubacivanja stakla i nakon njegovog ubacivanja i rastojanje između ploča (debljinu dielektrika).

6.7. Jačina polja kod pločastog kondenzatora (dve naelektrisane ravne ploče) sa vazdušnim dielektrikom je E_o. Kondenzator je priključen na napon U. Nakon toga, između ploča se ubaci materijalni dielektrik nepoznate relativne dielektrične konstante ε_r debljine d/2. .Ako je jačina polja u vazdušnom delu, nakon ubacivanja materijalnog dielektrika $E_1 = 3 \cdot E_o / 2$, izračunati kolika je relativna dielektrična konstanta materijalnog dielektrika.

6.8. Pločast kondenzator opterećen je količinom elektriciteta Q = 20 nC. Ploče kondenzatora su kvadratnog oblika površine $16\ cm^2$, a dielektrik ima relativnu dielektričnu konstantu koja je jednaka $\varepsilon_r = 30$, a rastojanje između ploča iznosi 1,275 mm. Izračunati:

a) potreban rad koji treba da se izvrši da bi se pozitivno naelektrisanje $q_p = 0{,}1$ pC prenelo sa jedne ploče na drugu. Koja je razlika u radu pri pomeranju q_p sa pozitivne ploče na negativnu, i obrnuto.
b) napon na pločama kondenzatora i jačinu električnog polja između ploča.
c) Potencijal tačke A koja je udaljena 1 mm od pozitivne ploče ako je potencijal pozitivne ploče jednak $V_1 = 12$ V.

7. ELEKTRIČNI KAPACITET. KONDENZATORI. KAPACITET KONDENZATORA

7.1 ELEKTRIČNI KAPACITET (KAPACITIVNOST)

Kapacitet svakog provodnika predstavlja jednu konstantu C koja govori o odnosu naelektrisanja toga provodnika i njegovog potencijala (vidi: PROVODNIK U ELEKTRIČNOM POLJU).

$$C = \frac{Q}{V}\left[F\right]$$

KAPACITET PROVODNE KUGLE

Kako je kod kugle potencijal na njenoj površini jednak: $V = \dfrac{Q}{4\varepsilon\pi\, r} \Rightarrow C = \dfrac{Q}{V} = 4\varepsilon\pi\, r$.

Iz navedene relacije sledi zaključak da kapacitet čini jednu konstantu provodnika, koja ne zavisi od njegovog opterećenja i potencijala, već **kapacitet provodnika zavisi od vrste provodnika (ili dielektrika) i njegovih dimenzija.**
Za kuglu **kapacitet iznosi :**

$$\mathbf{C = 4\,\varepsilon\, r\, \pi\ \ [F]}$$ **,** gde je **r** poluprečnik kugle.

7.2. KONDENZATORI

Kondenzator je sistem kojeg sačinjavaju dva provodnika (dve elektrode) koja su različito naelektrisana. sa dielektrikom između njih.Oni mogu biti prirodni (dva provodnika, provodnik sa zemljom, dva oblaka, oblak sa zemljom..) i veštački. Kako u praksi uglavnom radimo samo sa veštačkim kondenzatorima tada se za kondenzador može dati sledeća definicija: **kondenzator je uređaj koji se sastoji iz dva provodnika (ploče) koje su jednako naelektrisane ali sa suprotnim predznacima (+Q i −Q).**

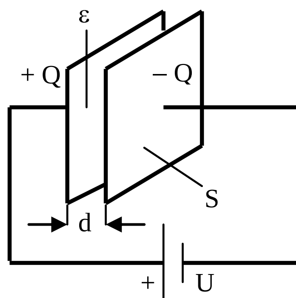
Oblik kondenzatora može biti različit, no iz praktičnih razloga (zbog proračuna) oni se izvode od ploča, pa se po njima oni i nazivaju pločasti kondenzatori.

7.3. KAPACITIVNOST KONDENZATORA

Kapacitivnost kondenzatora je njegova sposobnost da primi određenu količinu naelektrisanja uz odgovarajući napon. Za svaki kondenzator odnos između skupljene količine naelektrisanja **Q** i njegovog napona **U** je konstantan. Ta konstanta se označava sa **C** koja predstavlja njegov kapacitet,koji je jednak:

$$C = \frac{Q}{U}\left[F\right]$$

7.3.1. KAPACITIVNOST PLOČASTOG KONDENZATORA



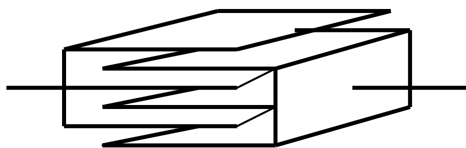
Sl.19.

Dve paralelne ravne (ploče), slika 19, stvaraju homogeno električno polje, koje je jednako:
$E = Q / \varepsilon S = U / d \Rightarrow Q / U = \varepsilon S / d = C.$
Kapaciticnost pločastog kondenzatora iznosi:

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \; [F]$$

gde je :
- C… kapacitivnost kondenzatora [F],
- ε….dielektrična konstanta [F/m] koja iznosi: $\varepsilon = C \cdot d / S$ [F·m/m^2],
- d…. rastojanje ploča, tj. debljina dielektrika [m] i
- S….površina ploča [m^2]

7.3.2. KAPACITIVNOST VIŠEPLOČASTOG KONDENZATORA


Sl.20.

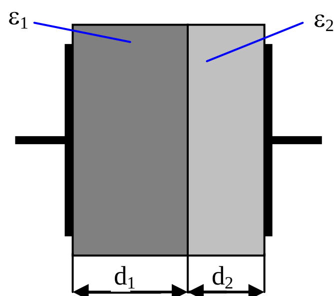
Kapacitet višepločastog kondenzatora, slika 20, iznosi:

$$C = (n-1) \cdot \varepsilon \frac{S}{d} \; [F]$$

gde je:
- n…………..broj ploča
- (n – 1) …. broj kondenzatora.

7.3.3. KONDENZATORI SA DVA DIELEKTRIKA

a) R e d n a   v e z a



Sl.21.

Ako je napon U na pločama kondenzatora konstantan, sledi da je i jačina polja E konstantna, jer je d = konst. Električna indukcija u različitim dielektricima (sl.21) je različita, pa sledi:

$D_1 = \varepsilon_1 E_1$, odnosno $D_2 = \varepsilon_2 E_2$.

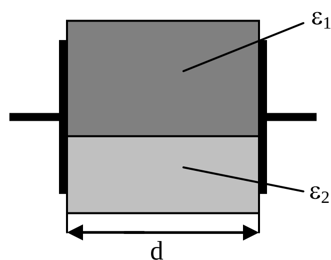
Kako će na krajevima i jednog i drugog dielektrika (redna veza) doći do iste količine izdvojenog naelektrisanja, sledi:

$Q_1 = Q_2 \Rightarrow D_1 = D_2 \Rightarrow \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \Rightarrow$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

Jačine polja u pojedinim dielektricima su obrnuto srazmerne njihovim dielektričnim konstantama.

b) Paralelna veza



Sl.22.

Kod paralelne veze dvaju dielektrika (sl.22), na njegovim krajevima je U = konst. $\Rightarrow E_1 = U/d$; $E_2 = U/d \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow$ $D_1/\varepsilon_1 = D_2/\varepsilon_2 \Rightarrow$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

Kod paralelne veze dielektrika električne indukcije (gustina usmerenih dipolova – izdvojenih naelektrisanja na krajevima dielektrika) **pojedinačnih dielektrika srazmerne su sa njihovim dielektričnim konstantama.**

7.3.4. KAPACITIVNOST KONDENZATORA KOD NEHOMOGENOG ELEKTRIČNOG POLJA

a) Kapacitivnost cilindričnog provodnika

Kako je kod cilindričnog provodnika: $U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} \Rightarrow$

$$C = \frac{2\varepsilon\pi \cdot l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

gde je: r_2… poluprečnik spoljašnjeg dela cilindričnog provodnika,
r_1…. Poluprečnik unutrašnjeg dela cilindričnog provodnika,
l….. dužina cilindričnog provodnika
Napomena! vidi potencijal cilindričnog provodnika,

Iz navedenih relacija može se izvesti i formula za jačinu električnog polja koja je jednaka :

$$E = \frac{U}{r_1 \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}}$$

b) Kapacitivnost dvaju paralelnih provodnika

Kako je kod dvaju paralelnih provodnika napon između njih bio jednak:

$$U = \frac{Q}{\varepsilon\pi l}\ln\frac{d-r_0}{r_0} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} \Rightarrow$$

$$C = \frac{\varepsilon\pi \cdot l}{\ln\frac{d-r_o}{r_o}} \qquad \textbf{za } d \gg r_o \Rightarrow \qquad C = \frac{\varepsilon\pi \cdot l}{\ln\frac{d}{r_o}}$$

c) K a p a c i t i v n o s t   p r o v o d n i k a   p r e m a   z e m l j i

Napon između provodnika i zemlje (ravne) jednak je: $U = \frac{Q}{2\varepsilon\pi l} \ln \frac{2h - r_0}{r_0}$

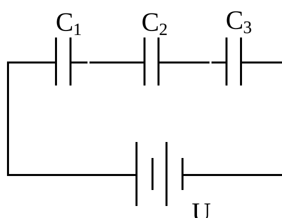
(Napomena! Videti jačinu električnog polja i električni napon kod provodnika i ravne).

Uz pretpostavku da je $2h >> r_o$, što je u praksi redovit slučaj , kapacitet provodnika prema zemlji se računa sledećom relacijom:

$$C = \frac{2\varepsilon\pi l}{\ln \frac{2h}{r_0}}$$

7.3.5.VEZIVANJE KONDENZATORA

a) R e d n a   v e z a

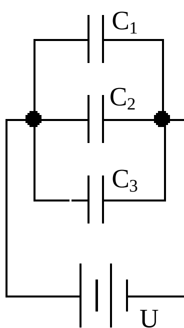


Sl.23.

Kod redne veze kondenzatora, sl.23, opterećenja kondenzatora su jednaka ($Q_1 = Q_2 = Q_3$), a ukupni napon jednak je zbiru pojedinačnih ($U = U_1 + U_2 + U_3$), **Recipročna vrednost ekvivalentnog kapaciteta, kod redne veze kondenzatora, jednaka je zbiru recipročnih vrednosti pojedinačnih kapaciteta kondenzatora:**

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

b) P a r a l e l n a   v e z a



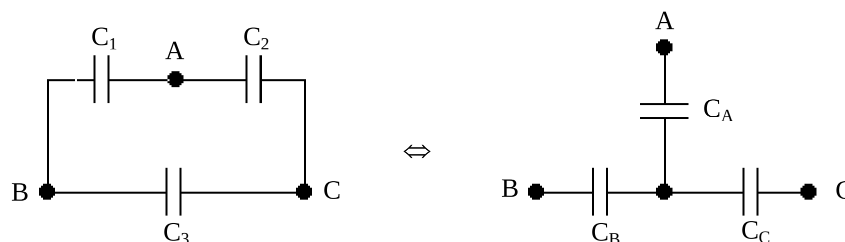
Sl.24.

Kod paralelne veze naponi na kondenzatorima su jednaki, dok je ukupna količina opterećenja kondenzatora jednaka zbiru pojedinačnih, slika 24, ($Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$).

Ukupna, ekvivalentna, kapacitivnost paralelne veze kondenzatora, jednaka je zbiru pojedinačnih kapacitivnošću kondenzatora:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n$$

c) Transformacija trougla u zvezdu i zvezde u trougao



Sl.25.

Kod pretvaranja kondenzatora iz trougla u zvezdu, sl.25, kapacitivnost kondenzatora je jednaka:

$$C_A = C_1 + C_2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{C_3} \quad ; \quad C_B = C_1 + C_3 + \frac{C_1 \cdot C_3}{C_2} \quad ; \quad C_c = C_2 + C_3 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_1}$$

Kod pretvaranja zvezde u trougao kapacitivnost novonastalih kondenzatora u trouglu iznose:

$$C_1 = \frac{C_A \cdot C_B}{C_A + C_B + C_C} \quad ; \quad C_2 = \frac{C_A \cdot C_C}{C_A + C_B + C_C} \quad ; \quad C_3 = \frac{C_B \cdot C_C}{C_A + C_B + C_C}$$

Prilikom pretvaranja kapaciteta iz jedne sprege (veze) u drugu, kapacitet između tačaka A i B, B i C i C i A ne sme da se menja, tj. on mora biti isti i za jednu i za drugu vezu.

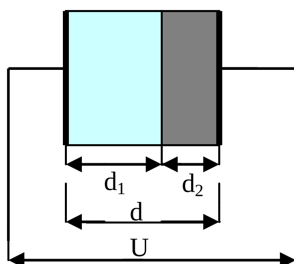
Z A D A C I :

7.1. Pločasti kondenzator ima površinu ploča $S = 1250\ cm^2$, a rastojanje između ploča je $d = 3$ mm. Izračunati kapacitivnost kondenzatora, ako je između ploča: a) vazduh; b) mikanit ($\varepsilon_r = 5{,}2$).

7.2. Pločasti kondenzator kapaciteta C = 1 nF priključen je na napon U = 2,4 KV. Polje kondenzatora je E = 60 KV/cm. Izračunati količinu elektriciteta na pločama kondenzatora, kao i rastojanje između ploča.

7.3. Šta će se dogoditi sa kapacitivnošću i opterećenjem kondenzatora ako se napon na njegovim krajevima: a) poveća dva puta; b) smanji dva puta.

7.4.



Sl.7.4.

Rastojanje između ploča kondenzatora je d = 2 mm. Između ploča na rastojanju $d_1 = 1{,}8$ mm ubačena je dielektrična pločica ($\varepsilon_r = 6$), tako da je deo između obloga $d_2 = 0{,}2$ mm ispunjen vazduhom(sl.7.4.). Kondenzator je priključen na napon U = 1,5 KV. Izračunati napon na svakon delu kondenzatora (dielektrika), kao i jačinu električnog polja u njima.

7.5. Dielektrik između ploča kondenzatora čine dva sloja čije su relativne dielektrične konstante $\varepsilon_{r1} = 2$ i $\varepsilon_{r2} = 8$. Kondenzator je priključen na napon U = 10 KV. Koliki je napon u slojevima dielektrika, ako su debljine slojeva jednake ($d_1 = d_2$) ?

7.6. Kada se metalna sfera naelektriše sa Q = 2 nC, u tačkama na njenoj površini dobije se jačina električnog polja od E = 2 V/m. Kolika je kapacitivnost sfere?

7.7. Pločasti kondenzator od 15 nF napravljen je od metalnih ploča kružnog oblika koje su u vazduhu postavljene na rastojanju od 1 mm. Koliki je prečnik ploča?

7.8. Nenaelektrisanom provodniku dovede se količina naelektrisanja od $Q = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ C pri čemu mu se potencijal poveća do 30 V. Koliki je kapacitet ovog provodnika.

7.9. Koliki je kapacitet sfernog provodnika poluprečnika 10 cm, ako se on nalazi u vodi ($\varepsilon_r = 81$).

7.10. Izračunati kapacitet Zemlje ako se ona smatra sferom čiji je poluprečnik R = 6 370 km.

7.11. Pločasti kondenzator ima kapacitet C = 5 μF. Kolika je količina naelektrisanja na svakoj ploči ako je razlika potencijala između ploča U = 1 000 V?

7.12. Kondenzator sa vazdušnom izolacijom sastoji se od dve paralelne ploče i ima kapacitet od C = 60 pF. Na njemu se nalazi naelektrisanje Q = 0,3 μC. Odrediti napon između ploča. Koliki će biti napon ako se ploče razmaknu na dvostruko rastojanje od prvobitnog?

7.13. Kondenzator je napravljen od 100 listića staniola, površine $10 \times 12\ cm^2$, odvojenih parafinisanim papirom ($\varepsilon_r = 4$) debljine 0,2 mm. Svi neparni listići su spojeni zajedno, a isto tako i parni. Koliki je kapacitet tog kondenzatora?

7.14. Kako se promeni kapacitet pločastog kondenzatora pri ε = konst. ,ako se razmak između ploča poveća tri puta, a površina ploča smanij dva puta?

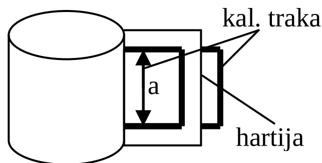
7.15. Kako će se promeniti kapacitet pločastog kondenzatora, pri ε = konst. , ako se razmak između ploča i površina ploča smanji dva puta?

7.16. Kako se menja kapacitet pločastog kondenzatora pri ε = konst., ako se razmak između ploča smanjio dva puta, a površina ploča povećala dva puta?

7.17. Koliku površinu treba da imaju listovi od liskuna dielektrične konstante $\varepsilon_r = 6{,}5$; debljine 0,1 mm, da bi se dobio pločast kondenzator kapaciteta C = 1 μF?

7.18. Kolika treba da je debljina dielektrika od čiste vode ($\varepsilon_r = 81$) da bi se u kondenzatoru čije su površine elektroda (ploča) 10 m^2 imao kapacitet C = 4 μF?

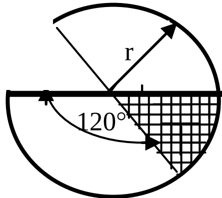
7.19.



Sl.7.19.

Kondenzator kapaciteta 2 μF načinjen je od dve kalajne trake sa oparafinjenom hartijom između ($\varepsilon_r = 4$), debljine 0,1 mm, prema slici 7.19. Ako je širina trake 5 cm, kolika treba da je dužina trake, da bi se postigao navedeni kapacitet kondenzatora?

7.20.



Sl.7.20.

Promenljivi kondenzator ima 6 pokretnih i 7 nepokretnih ploča i vazdušni sloj od 0,5 mm, između svake dve ploče, koje imaju oblik polukrugova poluprečnika r = 10 cm. Koliki je najveći kapacitet a koliki kada se pokretni deo zaokrene za 120°. Ploče se polukružno uvlače odnosno izvlače, kao što je prikazano na slici 7.20.

7.21. Obloge kondenzatora nalaze se na rastojanju l = 5 mm i imaju potencijale V_1 = 3 900 V i V_2 = – 9 100 V. Na kom će rastojanju od pozitivne ploče potencijal biti jednak V = 0? Koliki je kapacitet datog kondenzatora i kolika mu je količina naelektrisanja, ako je površina ploča 100 cm^2?

7.22. Pločast kondenzator za nominalni napon U = 10 KV ima dielektrik od dva sloja iste debljine $l_1 = l_2$ = 2 mm, od kojih je jedan od hartije ($\varepsilon_{r1} = 2$) a drugi od gume ($\varepsilon_{r2} = 6$). Kako će se rasporediti naponi po dielektricima?

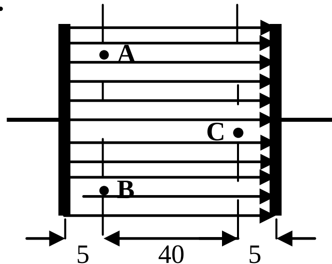
7.23. Pločast kondenzator, napunjen je pod naponom 5 KV, ima elektrode S = 100 cm^2 i tri dielektrična sloja relativne dielektrične konstante 2; 3 i 4 debljine 2; 1,5 i 1 mm. Odrediti kapacitet kondenzatora, pojedinačne napone i jačinu polja za svaki pojedinačni dielektrik?

7.24. Ako se rastojanje između obloga kondenzatora poveća za 20%, za koliko i kako će se promeniti kapacitet kondenzatora?

7.25. Dve ravne ploče površine S = 0,05 m^2 nalaze se na rastojanju od d = 1 cm. Između ovih ploča unese se treća ploča debljine d′ = 5 mm, na rastojanju od jedne ploče od 2mm. Koliki je bio kapacitet pre, a koliki posle prisustva treće ploče? Kako se promenilo električno polje?

7.26. Višepločasti kondenzator obrazuje 9 ploča, čija je površina jedne ploče 400 cm^2, a rastojanje između njih je d = 3 mm. Ako je kondenzator potopljen u transformatorsko ulje (ε_r = 2,3) izračunati ukupni kapacitet kondenzatora i na koji maksimalni napon se on sme priključiti, ako je maksimalna jačina električnog polja koja sme da optereti navedeni dielektrik E_m = 150 KV/cm?

7.27.



Sl.7.27.

U dielektriku nekog pločastog kondenzatora, slika 7.27, vlada jačina električnog polja E = 100 V/cm. Treba odrediti razlike potencijala U_{AB}, U_{BC} i U_{CA} između tačaka A, B i C (mere su date u mm), kao i ukupni napon koji vlada između ploča kondenzatora.

7.28. Međuprostor između dve koncentrične kugle ispunjen je dielektrikom relativne dielektrične konstante ε_r = 4. Poluprečnici kugli su r_1 = 20 cm i r_2 = 30 cm. Koliki napon U vlada između kugli ako su one naelektrisane sa Q = 0,6 μC, a kapacitet kondenzatora iznosi C.

7.29. Kolika mora biti debljina izolacije koaksijalnog kabela d′ ako je spoljašnji prečnik unutrašnjeg provodnika d = 2 mm, a izolacija ima relativnu dielektričnu konstantu ε_r = 3,3 , a kapacitet po kilometru iznosi C = 0,15 μF?

7.30.** Telefonski provodnik poljskog telefona ima prečnik d = 2 mm, a nalazi se h = 2 m iznad zemlje. Koliki je kapacitet C toga provodnika prema zemlji ako je provodnik dugačak l = 2 km?

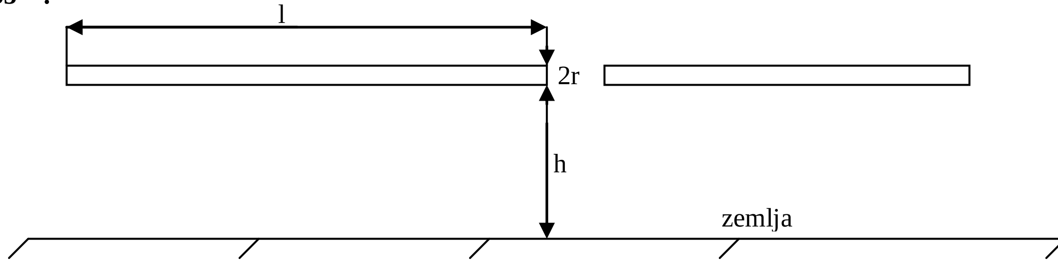
7.31.** Dalekovod sa dva provodnika preseka S = 16 mm^2 nalazi se na visokim stubovima tako da mu se kapacitet prema zemlji može zanemariti. Rastojanje između provodnika iznosi d′ = 2 m. Treba odrediti kapacitet dalekovoda C po kilometru dužine.

7.32.** Vod sa dva provodnika, poluprečnika r_o, daleko od zemlje, razmaknuta međusobno d′, ima dužinu l = 100 m. Na koliki međusobni razmak d″ treba postaviti provodnike da bi kod dužine provodnika l_2 = 300 m kapacitet provodnika ostao isti? (Kakav je odnos između d′ i d″, uz pretpostavku da je d′ i d″ >> r_o).

7.33. Kako će se promeniti kapacitet pločastog kondenzatora ako linearno (ravnomerno) smanjujemo sve tri dimenzije (dužinu i širinu ploča kao i rastojanje između ploča)?

7.34.** Odrediti kapacitet 10 km dugog horizantalnog provodnika preseka 10 mm^2 visokog 4 m iznad zemlje.

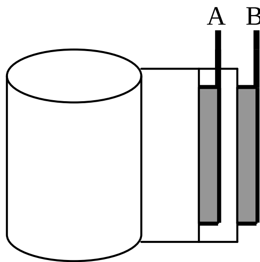
7.35.**



Sl.7.35

U cilju pronalaženja mesta prekida telegrafskog provodnika prečnika 2,5 mm , položenog 6,5 m iznad zemlje,(kao na sl. 7.35.) izmeren je nakon prekida njegov kapacitet u odnosu na zemlju i dobivena je vrednost od 43 nF. Na kojoj udaljenosti od mesta merenja se nalazi mesto prekida?

7.36.



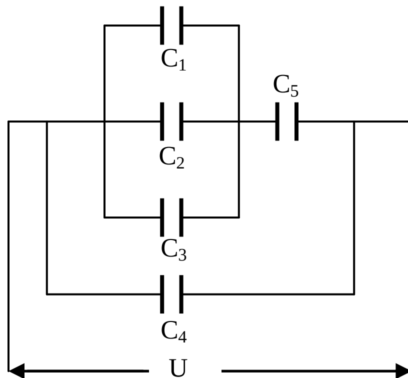
Sl.7.36.

Kondenzator u vidu rolne, sa papirnim dielektrikom (sl.7.36), treba da ima kapacitivnost od 10 nF. Na raspolaganju imamo aluminijske i dielektrične trake (papir u ulju) širine a = 3 cm. Relativna dielektrična konstanta papirne trake je ε_r = 3,5 , a njena debljina iznosi d = 0,05 mm.

Izračunati potrebnu dužinu trake.

7.37. U pločast vazdušni kondenzator (čije su ploče površine S na rstojanju d) postavljena je provodna ploča, paralelno sa pločama kondenzatora iste površine, a debljine $d' = d/3$. Koliki će biti kapacitet kondenzatora sa provodnom pločom?Obrazložiti kakva promena kapaciteta nastaje sa unošenjem navedene metalne ploče.

7.38.



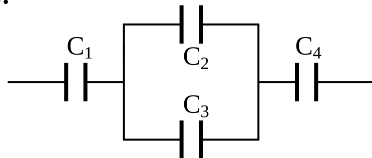
Sl.7.38.

Data veza kondenzatora, prema sl.7.38, priključena je na napon U = 80 V. Poznato je: C_1 = 30 μF, C_2 = 70 μF, C_3 = 60 μF, C_4 = 20 μF i C_5 = 50 μF.

Izračunati:

a) ekvivalentnu kapacitivnost veze,
b) napon U_5 na kondenzatoru kapacitivnosti C_5

7.39.



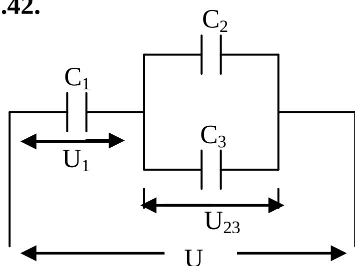
Sl.7.39.

Ako je ekvivalentna kapacitivnost veze prema slici 7.39, Ce = 1,92 μF a pojedinačne kapacitivnosti C_2 = 4 μF, C_3 = 6 μF i C_4 = 8 μF, odrediti kolika je kapacitivnost prvog kondenzatora C_1 .

7.40. Kondenzator kapaciteta C_1 = 3 nF i C_2 = 5 nF vezani su redno sa kondenzatorom C_3 i priključeni na napon U = 340 V. Ako je napon na kondenzatoru kapaciteta C_1 150 V, izračunati kapacitet kondenzatora C_3.

7.41. Kondenzator kapaciteta C_1 i C_2 vezani su redno i priključeni na napon U = 140 V. Ako je ukupno opterećenje veze Q = 2,4 mC, a odnos napona na kondenzatorima U_1 / U_2 = 3 / 4, izračunati pojedinačne kapacitete na kondenzatorima C_1 i C_2 , kao i njihove napone U_1 i U_2.

7.42.



Sl.7.42.

Mešovita veza tri kondenzatora, sl.7.42, priključena je na napon U = 200 V. Opterećenje kondenzatora kapaciteta C_1 iznosi Q_1 = 0,6 mC. Ako je C_1 = 4 μF, C_2 = 8 μF, naći kapacitet kondenzatora C_3 i napon na kondenzatoru C_1 U_1.

7.43. U jednom kolu kapacitivnost C_1 = 450 pF, a treba je smanjiti na C_2 = 90 pF pomoću jednog kondenzatora čija je kapacitivnost C_3. Kako će mo povezati navedeni kondenzator i kolika je njegova kapacitivnost?

7.44. Kondenzator kapaciteta C_1 = 3 μF i C_2 = 6μF vezani su redno i priključeni na napon U = 600 V. Koliku kapacitivnost C_3 treba vezati paralelno kondenzatoru kapaciteta C_1, da bi napon na kondenzatoru C_2 bio U_2 = 360 V?

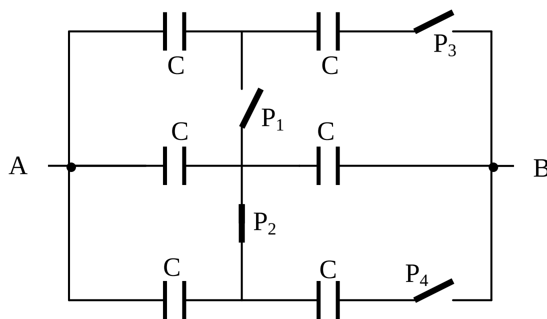
7.45. Dva jednaka pločasta kondenzatora vezana su redno. Razmak između ploča kondenzatora je d = 0,1 mm i ispunjen je vazduhom. Ako je ekvivalentna kapacitivnost 2 nF, izračunati površine ploča od kojih su načinjeni kondenzatori.

7.46. Dva kondenzatora kapaciteta C_1 = 3 μF i C_2 = 7 μF, predviđena za napon U_1 = U_2 = 100 V, vezana su na red na napon U = 200 V. Izračunati ekvivalentni kapacitet veze i pojedinačne napone. Rešenja prokomentarisati.

7.47. Koje sve kapacitete možemo ostvariti sa tri kondenzatora čiji su kapaciteti C_1 = 3μF i C_2 = C_3 = 2 μF? Uz sva rešenja prikazati odgovarajuće šeme.

7.48. Tri kondenzatora kapaciteta C_1 = 4μF, C_2 = 5 μF i C_3 nepoznate vrednosti vezani su na red. Koliki je kapacitet nepoznatog kondenzatora ako je ekvivalentna kapacitivnost veze jednaka C = 1 μF?

7.49.



Sl.7.49.

Koliki će biti ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B, prema slici 7.49, ako je:

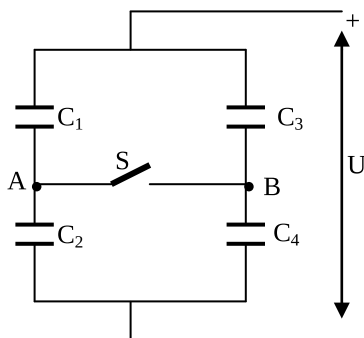
a) P_2 zatvoreno a P_1, P_3 i P_4 otvoreno,
b) P_1 i P_3 zatvoreno a P_2 i P_4 otvoreno i
c) Odabrati po želji jednu od nenavedenih mogućnosti.

7.50. Četiri kondenzatora čiji se kapaciteti odnose C_1:C_2:C_3:C_4 = 1:2:4:8 vezana su redno na napon U = 1 500 V. a opterećenje veze iznosi Q = 12 μC. Odrediti pojedinačne kapacitete u vezi.

7.51. Data su tri kondenzatora kapaciteta C_1 = 10 nF, C_2 = 20 nF i C_3 = 40 nF. Dozvoljeni napon za svaki od ovih kondenzatora je U_d = 1 000 V. Na koji napon se sme priključiti navedeni kondenzatori, ako ih povežemo redno?

7.52. Promenljivi vazdušni kondenzator C_1 može da se menja C_{min} = 20 pF do C_{max} = 450 pF. Taj kondenzator je vezan paralelno sa kondenzatorom čija je kapacitivnost C_2 = 80 pF. Njima na red spoji se kondenzator kapaciteta C_3 = 240 pF. Na ukupnu vezu priključen je napon U = 480 V. Dozvoljeni napon za sve kondenzatore je U_d = 300 V. Odrediti u kojim granicama se sme menjati kapacitet prvog kondenzatora C_1, a da ne dođe do proboja bilo kojeg od njih?

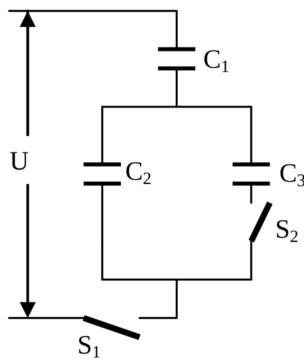
7.53.



Sl.7.53.

Data je veza kondenzatora prema sl.7.53. Na kondenzatore je priključen napon U = 400 V Zadano je C_1 = 600 pF, C_2 = 200 pF, C_3 = 600 pF, a merenjem je ustanovljen napon između tačaka A i B U_{AB} = 200 V i to da ja tačka A većeg potencijala od tačke B. Odrediti kapacitet kondenzatora C_4 i napon U_{13} koji će vladati na paralelnoj kombinaciji kondenzatora C_1 i C_3 kada se zatvori sklopka S

7.54.



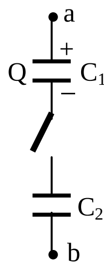
Sl.7.54.

Data je veza triju kondenzatora C_1 = 40 pF, $C_2 = C_3$ = 60 pF, prema slici 7.54. Napon izvora iznosi U = 1 000 V. U prvom momentu dok kondenzatori nisu opterećeni zatvara se sklopka S_1 dok je sklopka S_2 otvorena tako da su se opteretili (naelektrisali) kondenzatori C_1 i C_2. Kada su se kondenzatori C_1 i C_2 opteretili (napunili) otvara se sklopka S_1 i zatvara S_2. Treba odrediti napone U_1 i U_2 na koje su se napunili kondenzatori C_1 i C_2 pre otvaranja sklopke S_1 i zatvaranja S_2 te napone U_1' i U_2' nakon otvaranja S_1 i zatvaranja S_2.

7.55. Dva kondenzatora kapaciteta $C_1 = 2C_2$ vezana su redno i priključena na napon U. Kakav je odnos između napona U_1 i U_2?

7.56. Dva kondenzatora $C_1 = 2C_2$ vezana su paralelno na izvor čiji je napon jednak U. Kako će se rasporediti količine naelektrisanja na kondenzatorima (u kojem odnosu)?

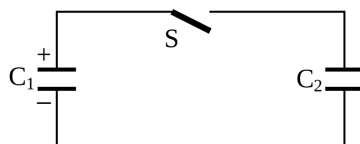
7.57.



Sl.7.57.

Na kondenzar C_1 sa opterećenjem Q priključi se neopterećen kondenzator C_2 ($C_1 = C_2$), slika 7.57.
Koliki je napon na kondenzatoru C_2 (uključena sklopka S).
Tačke a i b nisu nigde priključene.

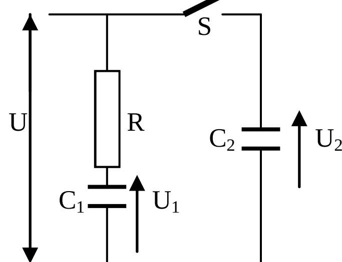
7.58.



Sl.7.58.

Na kondenzator C_1, sa opterećenjem Q priključi se drugi kondenzator $C_2 = C_1$ (zatvaranjem sklopke S), slika 7.58.
Kako će se promeniti napon na kondenzatoru C_1?

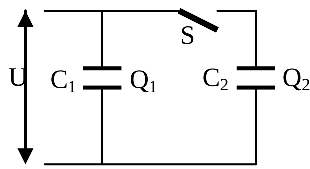
7.59.



Sl.7.59.

Kondenzator C_1 priključen je na izvor konstantnog napona U = konst, sl.7.59. Koliki će biti napon na kondenzatoru C_1 nakon zatvaranja sklopke S?

7.60.

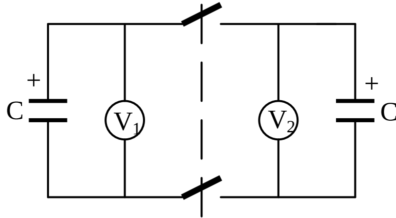


Sl.7.60.

Kondenzator C_1 priključen je na izvor konstantnog napon U, sl.7.60 . Njemu se paralelno doda kondenzator C_2 istog kapaciteta (C_1 = C_2). Kako će se promeniti opterećenje celog kola u odnosu na opterećenje Q_1 pre priključenja C_2?

7.61. Dva kondenzatora kapaciteta $C_2 = 2C_1$ vezana su redno i priključena na napon U. Kakav je odnos njihovih opterećenja (kol. naelektrisanja)?

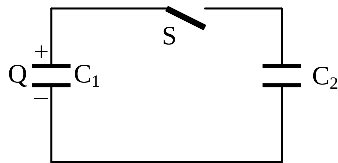
7.62.



Sl.7.62.

Na dva jednaka kondenzatora priključena su dva jednaka voltmetra (sl.7.62). Pre zatvaranja dvopolne sklopke voltmetri su pokazivali U_1 = 120 V; U_2 = 40 V. Šta će pokazati prvi voltmetar V_1 nakon zatvaranja dvopolne sklopke?

7.63.

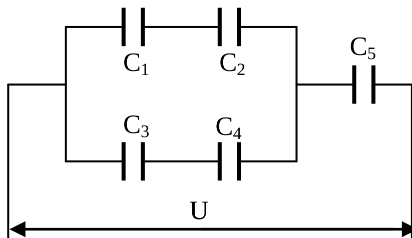


Sl.7.63.

Kondenzator C_1, prema slici 7.63, ima opterećenje Q. Kako će se promeniti njegovo opterećenje posle zatvaranja sklopke S, ako je $C_1 = C_2$?

7.64. Jedan od dva kondenzatora ima kapacitivnost C_1= 5 μF. Merenjem je utvrđeno da je ukupno opterećenje pri paralalnoj vezi 4,5 puta veće od opterećenja pri rednoj vezi tih kondenzatora. Kolika je kapacitivnost drugog kondenzatora?

7.65.

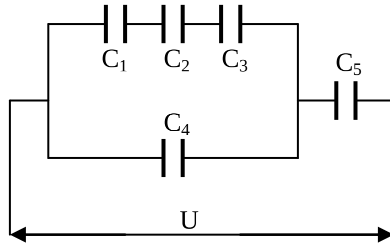


Sl.7.65.

Ako je prema slici 7.65 poznato: C_1 = 1 μF, C_2 = 5 μF, C_3 = 2 μF, C_4 = 3 μF, C_5 = 4 μF i napon U = 200 V, izračunati:

a) ekvivalentnu kapacitivnost kola;
b) pojedinačna opterećenja i napone na svim kondenzatorima;
c) Dali bi ova veza mogla da se održi, ako je dozvoljeni napon za sve kondenzatore U_d = 100 V (veći napon dovodi do proboja kondenzatora). Odgovor postupno obrazložiti !

7.66.

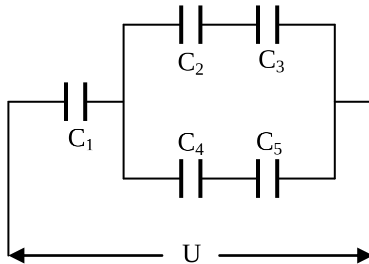


Sl.7.66.

Ako je prema sl.7.66 poznato: $C_1 = 3\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $C_3 = 2\ \mu F$, $C_4 = 14/13\ \mu F$ i $C_5 = 6\ \mu F$, odrediti:
a) ekvivalentnu kapacitivnost kola,
b) koliki je maksimalni dozvoljeni napon U_m na koji se može priključiti kolo, ako je dozvoljeni napon za pojedinačne kondenzatore isti i on iznosi $U_d = 10$ V. (Veće vrednosti napona dovode do proboja kondenzatora .)

7.67. Dva kondenzatora nepoznate kapacitivnosti u rednoj vezi daju ekvivalentnu kapacitivnost c $C_r = 6{,}16\ \mu F$, a pri paralelnoj vezi $C_p = 25\ \mu F$. Izračunati:
a) pojedinačne kapacitivnosti kondenzatora,
b) odnose između opterećenja (Q_1/Q_2) kondenzatora, za obe veze i
c) odnose između pojedinačnih napona (U_1/U_2), za obe veze.

7.68.

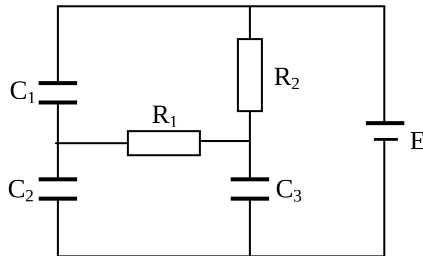


Sl.7.68.

Za kolo, prema slici 7.68, odrediti:
a) ekvivalentnu kapacitivnost C_e,
b) napon U_4 na kondenzatoru kapacitivnosti C_4 i
c) opterećenje Q_3 kondenzatora čija je kapacitivnost C_3
d) Da li ukupni napon sme da bude 200 V ako je dozvoljeni napon za sve kondenzatore $U_d = 100$ V. Odgovor i eventualne posledice postupno obrazložiti.

Brojni podaci: $C_1 = 4\mu F$, $C_2 = 1\ \mu F$, $C_3 = 5\ \mu F$, $C_4 = 2\ \mu F$, $C_5 = 3\ \mu F$ i $U = 200$ V.

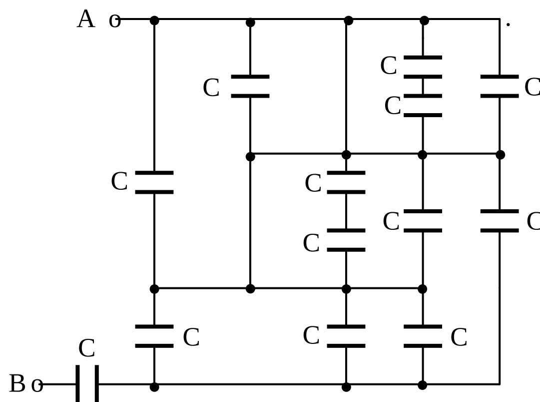
7.69.



Sl.7.69.

Za navedenu sliku (slika 7.69.) postaviti izraze za pojedinačna naelektrisanja kondenzatora (Q_1, Q_2 i Q_3), preko parametara na slici

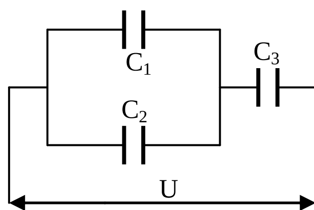
7.70.



Sl.7.70.

Koliki je ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B, prema slici 7.70.

7.71.

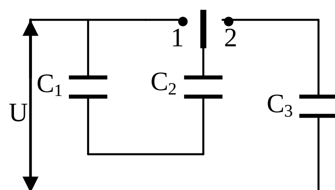


Sl.7.71.

Tri kondenzatora kapaciteta $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$ i $C_3 = 3\ \mu F$ vezana su prema slici 7.71 i priključena na konstantan napon U.
Kako će se promeniti naelektrisanje kondenzatora C_3 ako dođe do proboja kondenzatora C_2 ?

7.72. Dva kondenzatora kapaciteta C_1 i C_2, pri čemu je $C_1 = 2C_2$, istog nominalnog (dozvoljenog) napona U = 100 V vezana su redno. Na koju maksimalnu vrednost napona sme da se priključi ova redna veza kondenzatora?

7.73.

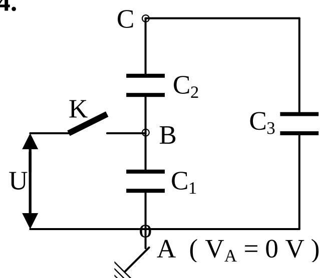


Sl.7.73.

Za kolo na slici 93 naći promenu na kondenzatorima kada se prekidač prebaci iz položaja 1 u položaj 2 (ΔU_1, ΔU_2, ΔU_3, ΔQ_1, ΔQ_2 i ΔQ_3?)

Brojni podaci:
U = 5 KV, $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 3\ \mu F$ i $C_3 = 6\ \mu F$.

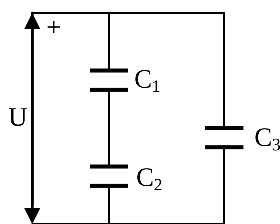
7.74.



Sl.7.74.

Posle zatvaranja prekidača K, slika 7.74, izvor napona U je dao kolu količinu naelektrisanja Q = 44 μC i kondenzator C_3 se napunio tako da je napon na njegovim krajevima
$U_3 = 1{,}2$ KV. Ako je $C_1 = 10^4$ pF i $2C_2 = 3C_3$ i ako je potencijal tačke A uzemljen ($V_A = 0$), izračunati:
a) potencijal tačaka B i C
b) kapacitivnost kondenzatora C_2 i C_3.

7.75.



7.75.

Tri pločasta kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = 6$ pF, $C_2 = 3$ pF, $C_3 = 2$ pF, priključena su na napon $U = 30$ V, prema slici 7.75. Nakon opterećenja kondenzatora izvor se ukloni, pa se ploče kondenzatora C_3 razmaknu na dva puta veće rastojanje.Odrediti:

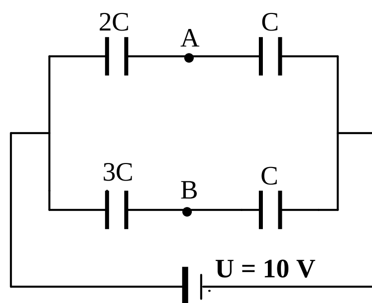
a) opterećenja i napone na svim kondenzatorima, pre razmicanja ploča kondenzatora C_3 i
b) opterećenja svih kondenzatora kao i napone na njima nakon razmicanja ploča kondenzatora C_3

7.76. Koliko jednakih kondenzatora (C = 32 nF) treba vezati na red sa kondenzatorom kapaciteta 24 nF da bi ekvivalentni kapacitet cele veze bio 6 nF?

7.77. Tri kondenzatora jednakih kapaciteta vezani su prvo redno, a zatim paralelno. Odrediti odnos ekvivalentnih kapaciteta.

7.78. Pri rednoj vezi tri kondenzatora ekvivalentni kapacitet je 1 μF, a pri paralelnoj vezi 11 μF. Odrediti kapacitete kondenzatora C_2 i C_3 ako je kapacitet $C_1 = 2$ μF.

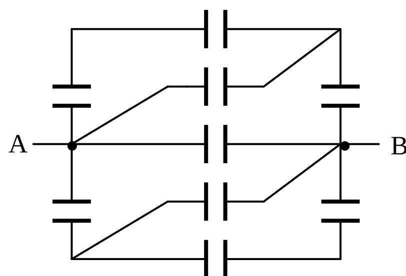
7.79.



Sl.7.79.

Odrediti razliku potencijala između tačaka A i B u kolu prikazanom na slici 7.79.

7.80.

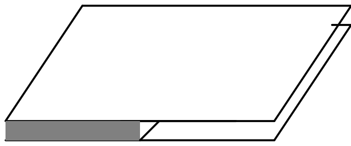


Sl.7.80.

Odrediti ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B za sistem kondenzatora prikazan na slici 7.80, ako je kapacitet svakog kondenzatora jednak C

7.81∗. Između elektroda ravnog vazdušnog kondenzatora koji je priključen na izvor napona U, a čije je rastojanje između elektroda (ploča) d, ubaci se ploča neke dielektrične materije debljine d/2. Ako se polje u vazdušnom delu kondenzatora povećalo za 50% u odnosu na prvobitno polje, naći relativnu dielektričnu konstantu ubačenog dielektrika.

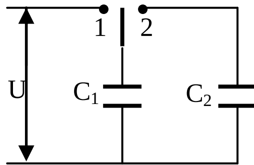
7.82*.


Sl.7.82.

Ravan vazdušni kondenzator kapacitivnosti C_o = 100 μF priključen je na napon U = 100 V.Kada se kondenzator napunio izvor je isključen a između ploča je, do polovine, ubačena ploča od dielektrika relativne dielektrične konstante ε_r = 4, kao na slici 7.82.

Kolika je potencijalna razlika između ploča, posle uvlačenja dielektrika

7.83*.



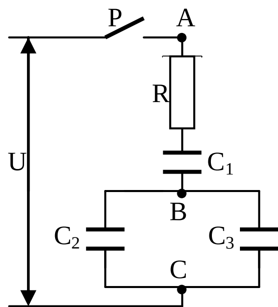
Sl.7.83.

Za kolo, na slici 7.83, izračunati količinu naelektrisanja na kondenzatorima C_1 i C_2, i to:

a) kada se prekidač prebaci iz položaja 1 u položaj 2, i
b) kada se prekidač vrati u položaj 1 i ponovo prebaci u položaj 2.

Brojni podaci: U = 3 KV; C_1 = 5 μF; C_2 = 10 μF.

7.84*.

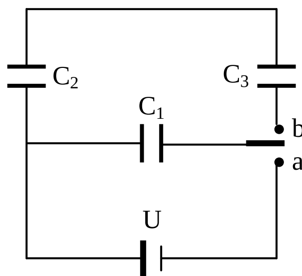


Sl.7.84.

U kolu, prikazanom prema sl.7.84, prekidač P je zatvoren. Po uspostavljanju stacionarnog stanja (kondenzatori napunjeni) prekidač P se otvara a kondenzator C_3 prebaci tako da se tačka 1 priključi u A a tačka 2 u B. Naći novu raspodelu naelektrisanja i napon između tačaka A i C.

Brojni podaci:
U = 300 V; C_1 = 5μF; C_2 = 3 μF; C_3 = 8 μF; R = 2 KΩ.

7.85*.

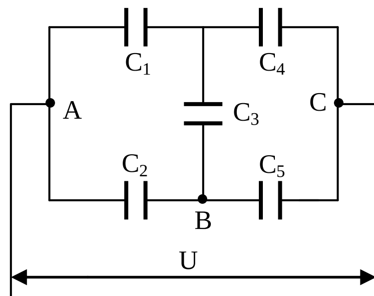


Sl.7.85.

Naći napone i količine elektriciteta na svim kondenzatorima, prema slici 7.85, kada se prekidač P prebaci iz položaja a u položaj b.

Brojni podaci:
U = 5 KV; C_1 = 10 μF; C_2 = 15 μF; C_3 = 30 μF.

7.86*.



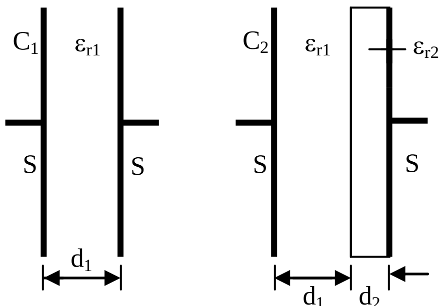
Sl.7.86.

Za kolo, predstavljeno na sici 7.86, izračunati:

a) ekvivalentnu kapacitivnost kola;
b) napone na svim kondenzatorima i
c) količine naelektrisanja svih kondenzatora.

Brojni podaci:
$U = 1\,000$ V; $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ μF; $C_4 = 2$ μF; $C_5 = 4$ μF.

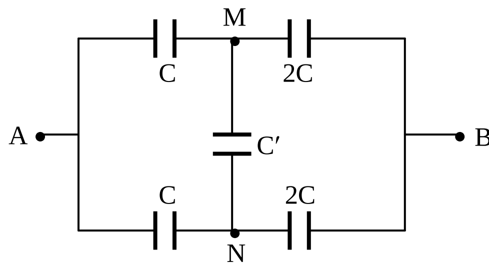
7.87*.



Sl.7.87 a) Sl.7.87 b)

Kondenzator se sastoji od dve elektrode (ploče) između kojih se nalazi izolacioni sloj debljine 3 mm i relativne dielektrične konstante 4, prema slici 7.87 a. Ako razmak između elektroda bude povećan umetanjem još jednog izolacionog sloja (dielektrika) debljine 5 mm (sl.7.87 b) a merenjem je utvrđeno da je kapacitet tako formiranog kondenzatora tri puta manji od kapaciteta prvobitnog kondenzatora, izračunati kolika je relativna dielektrična konstanta novog (umetnutog) dielektrika.

7.88.



Sl.7.88.

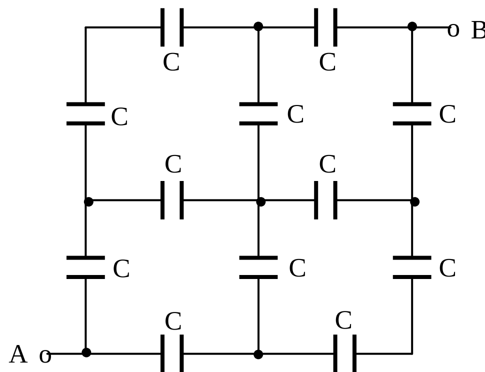
Koliki je ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B prema slici 7.88 ?

Brojni podaci: $C = 10$ μF; $C' = 25$ μF.

7.89. Dvanaest kondenzatora istih kapacitivnosti vezano je na ivice jedne kocke. Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost:

a) između temena koja čine najveću dijagonalu.
b) između temena manje dijagonale

7.90.

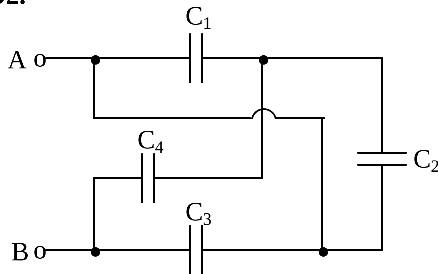


Sl.7.90.

Dvanaest kondenzatora istih kapacitivnosti vezani su između tačaka A i B, prema slici 7.90. Kolika će biti ekvivalentna kapacitivnost datog sistema kondenzatora ?

7.91. Pločasti kondenzator je predhodno naelektrisan pa se nakon toga napon baterije isključi. Šta će se dogoditi sa naponom kondenzatora, ako se rastojanje između elektroda smanji.

7.92.



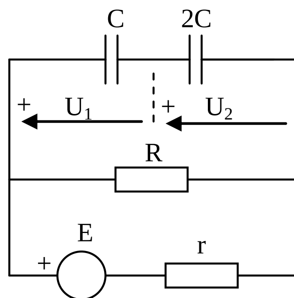
Sl.7.92.

Odrediti ekvivalentni kapacitet C_{AB} za kolo prikazano na slici 7.92.

Brojni podaci:
$C_1 = 2$ nF; $C_2 = 4$ nF; $C_3 = 7$ nF; $C_4 = 3$ nF.

7.93. Dva kondenzatora kapaciteta $C = 40$ pF vezana su redno i priključena na napon $U = 100$ V. Potom je jedan kondenzator ispunjen dielektrikom relativne dielektrične konstante (propustljivosti) $\varepsilon_r = 3$. Koliko iznosi količina naelektrisanja koja je protekla kroz kolo posle unošenja dielektrika ?

7.94.

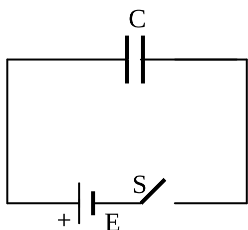


Sl.7.94.

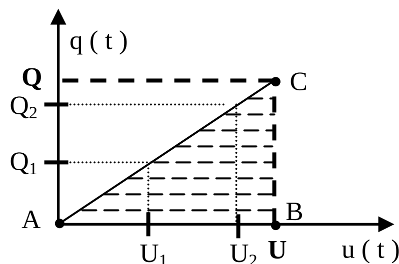
Koliko iznose naponi U_1 i U_2 na kondenzatorima C i 2C u stacionarnom stanju , u kolu prema slici 7.94, ako pri kratkoj vezi izvora (napon punjenja) struja u kolu poraste za tri puta.

Brojni podaci: $E = 9$ V.

8. ENERGIJA, GUSTINA I SNAGA KONDENZATORA . DIELEKTRIČNA ČVRSTOĆA. SILA IZMEĐU PLOČA KONDENZATORA



Sl.26.



Sl.27.

Prilikom punjenja kondenzatora (S uključeno prema slici 26) dolazi do polarizacije dielektrika, samim tim napon na njegovim krajevima (koji predstavlja napon kondenzatora) postepeno raste. Punjenje je završeno kada napon kondenzatora dostigne vrednost napona na izvoru (U = E). Tada kažemo da je nastalo stacionarno stanje (u kolu se ništa više ne događa). Tokom punjenja kondenzatora pored porasta napona na kondenzatoru sa 0 na napon U linearno raste količina naelektrisanja (opterećenje kondenzatora) sa 0 na Q što je prikazano na slici 27. Slično se događa kod pražnjenja kondenzatora (napon sa U pada na 0, a količina naelektrisanja sa Q na 0). Dok se kondenzator puni električna energija koju daje izvor E se jednim delom pretvara u energiju kondenzatora (drugi deo čine gubici – toplota). Energija kondenzatora (električnog polja – elektrostatička energija), je na slici 27 predstavljena površinom trougla ABC, a to je išrafirani deo. Kako je ta površina jednaka: UQ/2, sledi:

$$\boxed{W = \frac{UQ}{2}\,[J]}$$

gde je: W….. energija kondenzatora [J],

U…… napon kondenzatora [V] i

Q…… opterećenje kondenzatora (količina naelektrisanja) [C].

Navedena relacija se može predstaviti i u sledećem obliku (Q = U C ; U = Q / C):

$$\boxed{\mathbf{W = U^2\,C / 2}} \quad ; \quad \boxed{\mathbf{W = Q^2 / 2\,C}}$$

Gde je C….. kapacitivnost kondenzatora [F].

8.1. G U S T I N A   E N E R G I J E

w = W / V = UQ/2V = E·d·Q / 2V. Kako je kod kondenzatora E = Q/εS ⇒ Q= E·ε·S ⇒
w = E·d·E·ε·S/2V⇒

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon E^2}{2}\left[\frac{J}{m^3}\right]}$$

gde je **w** gustina energije u jedinici J/m^3

8.2. SNAGA KOD PRAŽNJENJA KONDENZATORA

$$P = \frac{W}{t}\,[W]$$

gde je **P** snaga pražnjenja, a **t** vreme trajanja pražnjenja.

8.3. SILA IZMEĐU PLOČA KONDENZATORA

Električno polje koje stvara jedna ploča kondenzatora jednaka je $E = Q/2\varepsilon S$. Ovo polje deluje Kulonovom silom na drugu ploča koja iznosi: $F = E \cdot Q \Rightarrow$

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon S}$$

gde je **F** sila kojom ploče kondenyatora deluju jedna na drugu. Jedinica je N (njutn)

8.4. DIELEKTRIČNA ČVRSTOĆA KONDENZATORA

Dielektrična čvrstoća je maksimalna jačina električnog polja koju kondenzator može da izdrži a da ne dođe do njegovog proboja.Jedinica je **[V/m].** Dielektrična čvrstoća je granično jednaka **probojnom naponu,** te je ona jednaka**:**

$$U_p = \frac{E_{max}}{d}\left[V/m\right]$$

gde je:

U_p…. probojni napon ;

E_{max}…maksimalna jačina polja (dielektrična čvrstoća) koju dielektrik može da izdrži

Z A D A C I :

8.1. Kondenzator kapaciteta $C = 2\ \mu F$ napunjen je količinom naelektrisanja, pri naponu $U = 300$ V. Kolika je energija kondenzatora , koja se nagomilala u njegovom dielektriku?

8.2. Dimenzije pločastog kondenzatora su $S = 12 \times 10\ cm^2$, a rastijanje između ploča je $d = 10$ mm. Kondenzator je opterećen količinom elektriciteta $Q = 1{,}6\ \mu C$. Izračunati energiju kondenzatora, i to:

a) kada je kao dielektrik uzet vazduh,
b) kada se kao dielektrik uzme materijal čija je relativna dielektrična konstanta jednaka $\varepsilon_r = 5$.

8.3. Napon $U = 2{,}5$ KV priključen je na pločasti kondenzator čija je kapacitivnost C , dielektrik vazduh, a elektrostatička energija kondenzatora $W = 125$ mJ. Kada se kondenzator napuni, isključi se napon U, a zatim, ploče kondenzatora se primaknu na trećinu od prvobitnog rastojanja. Izračunati:

a) novu vrednost kapacitivnosti kondenzatora ,
c) napon na krajevima kondenzatora i
d) promenu energije u odnosu na početnu energiju kondenzatora.

8.4. Kondenzator kapaciteta $C = 6\ \mu F$ opteretimo količinom elektriciteta $Q = 120\ \mu C$. Nakon završetka opterećenja (punjenja) isključimo izvor napajanja a ploče kondenzatora se razmaknu, pri čemu se kapacitivnost kondenzatora promeni na vrednost $C_1 = 4\ \mu F$ a opterećenje radvojenog kondenzatora ostaje nepromenjena. Naći rad koji je izvršila elektrostatička sila prilikom udaljavanja ploča kondenzatora.

8.5. Kondenzator kapaciteta $C = 0{,}02\ \mu F$ opterećen je količinom elektriciteta $Q = 4\ \mu C$. Zatim se ploče razmaknu tako da se prvobitno rastojanje između ploča udvostručilo. Izračunati:

a) energiju kondenzatora,
b) novu kapacitivnost kondenzatora,
c) novu vrednost energije kondenzatora i
d) promenu energije.

8.6. Pločast kondenzatotr površine ploča $S = 2400\ cm^2$, rastojanja između ploča $d_1 = 5$ mm, priključen je na napon $U_1 = 2$ KV. Ako se posle toga izvor napajanja isključi a rastojanje između ploča udvostruči, odrediti kod novonastalog kondenzatora: kapacitivnost, napon, električno polje i energiju (opterećenje je ostalo nepromenjeno). Dielektrik je vazduh.

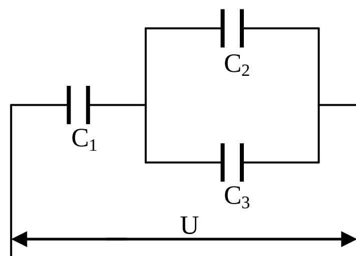
8.7. Kondenzator kapaciteta $C = 0{,}2\ \mu F$ priključen je na napon $U = 500$ V, a dielektrik je materijal čija je relativna dielektrična konstanta $\varepsilon_r = 5$. Kada se kondenzator optereti količinom elektriciteta Q, odvoji se od napona U, pa se izvuče dielektrik. Naći novu vrednost kapacitivnosti konsdenzatora, napon na njegovim krajevima i elektrostatičku energiju.

8.8. Pločasti kondenzator sa vazduhom kao dielektrikom, kapaciteta $C_1 = 200$ pF priključen je na napon $U = 40$ V. Kad se kondenzator opteretio količinom elektriciteta Q_1, između ploča je unet novi dielektrik čija je relativna dielektrična konstanta $\varepsilon_r = 4$, a kondenzator ostao priključen na isti napon. Naći novu vrednost kapacitivnosti kondenzatora C_2, količine naelektrisanja Q_1 i Q_2 i elektrostatičke energije u oba slučaja.

8.9. Kondenzatorska baterija koja se sastoji od pet jednakih kondenzatora jednakih kapaciteta $C = 20\ \mu F$ priključena je na napon $U = 240$ V. Kolika je energija baterije (električnog polja), ako su kondenzatori vezani:

a) redno
b) paralelno.

8.10.



Sl.8.10.

U kolu na sl.8.10 naponi i energije kondenzatora C_1 i C_2 su u odnosu $U_1 / U_2 = W_1 / W_2 = 8$. Ako je $C_2 = 10\ \mu F$ koliki su kapaciteti C_1 i C_2 ?

8.11. Napunjenom pločastom kondenzatoru (dielektrik vazduh) isključenom od izvora razmak između ploča se udvostruči. Kako će se promeniti energija kondenzatora?

8.12. Kondenzator kapaciteta 50 μF priključen je na napon od 200 V. Potom se paralelno sa datim kondenzatorom veže drugi (napon isključen), predhodno neopterećen kondenzator kapaciteta 30 μF, pri čemu je opterećenje prvog kondenzatora jednako ukupnom opterećenju paralelno vezanih kondenzatora. Odrediti:

a) napon na krajevima ove veze kondenzatora,
b) elektrostastičku energiju pre i posle priključenja drugog kondenzatora u električno kolo.

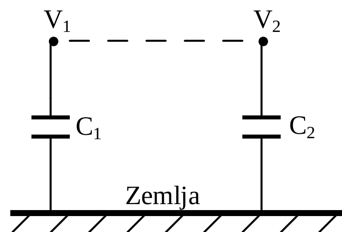
8.13. Kolika bi se energija dobila kada bi se kondenzator koji je napunjen količinom naelektrisanja Q = 6 mC na naponu U = 3 KV kratko spojio? Obrazložiti o kojoj je energiji reč.

8.14. Prema slici 93 naponi i energije na kondenzatorima C_1 i C_3 su u odnosu: $U_1 / U_3 = 4$ a $W_1 / W_3 = 8$. Ako je kapacitivnost $C_3 = 40$ nF, izračunati kapacitivnosti C_1 i C_2 .

8.15. Kondenzator je sastavljen od dve paralelne ploče, svaka površine 60 cm^2, na rastojanju 3 mm. Između ploča je bakelit relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 4$. Napon na kondenzatoru je 500 V. Koliko se energije oslobodi prilikom probijanja kondenzatora?

8.16. Kondenzator kapaciteta 20 pF napunjen je na naponu od 300V. Kolika se količina toplote razvije pri probijanju kondenzatora, ako se pretpostavi da se 80% energije kondenzatora pretvori u toplotu varnice?

8.17.



Sl.8.17.

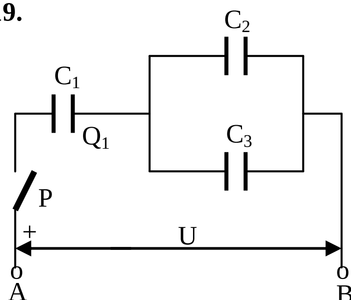
Naći količinu toplote koja se oslobodi pri spajanju neuzenljenih ploča kondenzatora kapaciteta 2μF i 0,5 μF,prema sl.8.17. Razlika potencijala između gornje ploče kondenzatora i zemlje je za prvi kondenzator 100 V , a za drugi – 50 V.

8.18. Kondenzator kapaciteta C_1 predhodno je opterećen priključivanjem na stalni napon U. Odrediti:

a) napon U_1 na krajevima kondenzatora C_1, kada se paralelno sa njim veže kondenzator kapaciteta C_2, koji je u neutralnom stanju (neopterećen),
b) elektrostatičke energije oba kondenzatora posle paralelnog vezivanja kondenzatora .

Brojni podaci : $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$, $U = 60$ V.

8.19.



Sl.8.19.

Tri kondenzatora u neutralnom stanju (neopterećena), vezana su na stalni napon U, prema sl.8.19. Kada se zatvori prekidač P kroz granu sa kondenzatorom C_1 protekne količina elektriciteta Q_1. Odrediti kapacitet C_3 i elektrostatičke energije svih kondenzatora, kao i ukupnu energiju.

Brojni podaci: U = 20 V; C_1 = 6 μF; C_2 = 2μF; Q_1 = 60 μC.

8.20. Kondenzator kapacitivnosti C = 0,2μF, priključen je na napon U = 500 V, i između ploča ima dielektrik relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 5$. Ako se ovom kondenzatoru izvor isključi, izvuče dielektrik i ploče približe na trećinu prvobitnog rastojanja odrediti napon na novom kondenzatoru, kao i priraštaj (promenu) energije kondenzatora.

8.21. Pločasti kondenzator priključen je na napon U = 400 V. Kapacitivnost kondenzatora je C = 2 μF. Kada se kondenzator napunio između njegovih ploča uvučen je dielektrik relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 4$, a kondenzator je i dalje ostao priključen na isti napon. Naći kapacitivnost u drugom slučaju kao i opterećenja i energije pre i posle uvlačenja dielektrika.

8.22. Pločast kondenzator, površine ploča $S = 70 \times 70\ cm^2$ i međusobnog rastojanja d = 0,5 cm, priključen je na napon U = 5 KV. Posle punjenja rastojanje se poveća na d′ = 1 cm, ne isključujući napon izvora. Naći energiju kondenzatora , jačinu električnog polja, kao i kapacitivnost u oba slučaja. Dielektrik je vazduh.

8.23. Pločast kondenzator ima površinu ploča $S = 400\ cm^2$, razmak ploča d = 0,08 mm, a kapacitivnost C = 0,01 μF. Treba odrediti relativnu dielektričnu konstantu ε_r papira koji je upotrebljen kao dielektrik i maksimalnu vrednost napona U_m, koja se sme priključiti na kondenzator a da ne dođe do njegovog proboja, ako je dielektrična čvrstoća papira E_m = 10 KV/mm.

8.24. Pločast kondenzator sa četiri ploče, površine svake ploče $S = 4{,}8\ cm^2$, kao dielektrik ima mikanit ($\varepsilon_r = 6$), čija je dielektrična čvrstoća E_m = 100 KV/mm. Ako je maksimalni dopušteni napon U_d = 10 KV, treba odrediti kapacitet C kondenzatora i razmak između ploča kondenzatora d.

8.25. Pločast kondenzator sa dielektrikom čija je dielektrična čvrstoća E_m = 150 KV/mm ima debljinu izolacije d = 0,8 mm. Koliki je maksimalni napon U_m koji se sme priključiti na ovakav kondenzator?

8.26. Dva kondenzatora C_1 = 3 nF i C_2 = 4 nF vezana su redno na napon U = 1 200 V. Ako se kondenzatoru C_2 doda paralelno kondenzator kapaciteta C_3 = 5 nF, dolazi do proboja kondenzatora C_1. Koliki je napon proboja U_1 kondenzatora C_1?

8.27. Neki pločast kondenzator ima kao izolaciju uljni papir sa $\varepsilon_r = 4$, dielektrične čvrstoće E_m = 50 KV/cm i debljine d_p = 0,3 mm. Zbog proizvođačke greške na jednom mestu je papir tanji, tj. d_p' = 0,25 mm, a ostatak od d_o = 0,05 mm ispunjava vazduh čija je dielektrična čvrstoća E_m = 30 KV/cm. Treba odrediti maksimalni napon U_m koji se sme priključiti na taj kondenzator a da ne dođe do proboja dielektrika i napon U_m' koji bi se mogao priključiti da nije došlo do fabričke greške.

8.28. Kapacitivnost pločastog kondenzatora iznosi 5μF. Debljina dielektrika je 3 mm, dok je dielektrična čvrstoća 100 KV/cm. Odrediti:

a) radni (dozvoljeni) napon ako je koeficijent sigurnosti (bezbedan rad) 3,
b) energiju kondenzatora pri radnom naponu,
c) odnos energije kondenzatora u trenutku njegovog proboja prema energiji u radnom režimu.

8.29. Kolika količina toplote biva oslobođena u kondenzatoru od 5μF u kojem je nastupio proboj pri naponu od 800 V?

8.30. Koliki kapacitet mora imati kondenzator koji pri naponu od 800 V treba da daje energiju od 100 Ws?

8.31. Pločasti kondenzator sa vazdušnim dielektrikom sastoji se od dveju paralelnih elektroda (ploča) kvadratnog oblika čija je stranica jednaka 50 cm, sa razmakom 1 mm. Kondenzator je napunjen pri naponu od 250 V, nakon čega se napon punjenja odstrani. Koliki rad će obaviti kondenzator (ili neka spoljna sila) da bi se razmak između elektroda povećao na 3 mm?

8.32*. Izračunati najveću moguću gustinu energije u vazduhu (dielektrična čvrstoća vazduha je 3 KV/mm). Uporedi ovu gustinu energije sa gustinom hemijske energije smeše nekog sagorljivog gasa i vazduha koja iznosi oko 0,5 J / cm^3.

8.33*. Površina ploča vazdušnog kondenzatora iznosi $S = 100\ cm^2$, a njihovo rastojanje je $d = 1$ cm. Kolika je najveća moguća sila koja deluje na jednu od ploča kondenzatora i kojeg je smera ($E_{mo} = 3$ KV/mm)?

8.34. Naći elektrostatičku silu (Kulonovu) koja deluje na jednu od elektroda pločastog vazdušnog kondenzatora koji je priključen na izvor napona $U = 150$ V. Površina jedne elektrode je 50 cm^2 a rastojanje između elektroda 2 mm.

8.35. Pločast vazdušni kondenzator sa rastojanjem između elektroda d i površinom ploča $S = 2\ 000\ cm^2$ ima površinsku gustinu naelektrisanja na pločama $\sigma = 2\cdot 10^{-15}\ C/cm^2$. Koliki rad se izvrši pri pomeranju jedne ploče za rastojanje $\Delta d = 0,5$ mm?

8.36. Izolacija debljine 3 mm probijena je pri naponu od 120 KV. Kolika je dielektrična čvrstoća probijenog dielektrika?

8.37. Pločast kondenzator sa vazdušnim dielektrikom, priključen je na napon $U = 3\ 600$ V. Pri kojem razmaku ploča će doći do proboja vazduha (dielektrična čvrstoća vazduha je 3 KV/mm)?

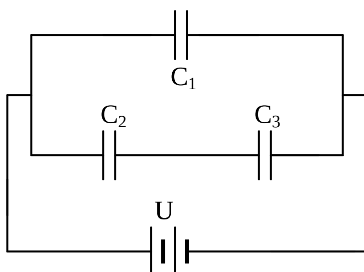
8.38. Koliku najveću gustinu elektrostatičke energije može primiti liskun, čija je dielektrična čvrstoća $E_m = 150$ KV/mm a relativna dielektrična konstanta $\varepsilon_r = 8$?

8.39. Pločast kondenzator sa staklenim dielektrikom ($E_m = 25$ KV/mm; $\varepsilon_r = 7$) ima jačinu električnog polja pet puta manju od probojne (faktor sigurnosti 5). Koliko će iznositi gustina elektrostatičke energije u staklu ?

8.40. Kondenzator kapaciteta $C = 2\ \mu F$ napunjen je sa naponom $U = 10$ KV. Kolika je prosečna snaga kondenzatora ako se on isprazni za vreme od $t = 1$ ms ?

8.41. Kolika se prosečna snaga P dobije ako se kondenzator kapaciteta $C = 32\ \mu F$ napunjen količinom elektriciteta $Q = 16$ mC isprazni za vreme $t = 0,1$ s ? Kolika je pri tome oslobođena energija ?

8.42.



Sl.8.42.

Koji od kondenzatora, prema slici 8.42, ima najveću energiju ?

Brojni podaci: $C_1 = \frac{C_2}{4} = \frac{C_3}{4} = C$

ELEKTROKINETIKA

1. OSNOVNE VELIČINE ELEKTRIČNOG KOLA

1.1 ELEKTRIČNA STRUJA. JAČINA, GUSTINA I BRZINA ELEKTRIČNE STRUJE.

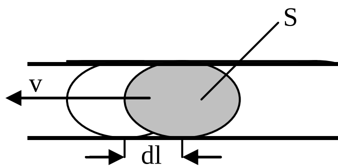
JAČINA ELEKTRIČNE STRUJE

Jačina električne struje (I) je ona količina elektriciteta (Q) koja u jedinici vremena (t) protekne kroz poprečni presek provodnika, dakle :

$$\mathbf{I = \frac{Q}{t}(A)}$$

jedinica je **amper [A].**

BRZINA I GUSTINA ELEKTRIČNE STRUJE



Sl.1.

Ako se neki provodnik nađe u električnom polju podužno, duž provodnika će usled dejstva električnog polja doći do kretanja slobodnih elektrona. Brzina kojom se elektroni kreću je srazmerna jačini električnog (E) polja i konstanti (κ) koja govori kakva je pokretljivost slobodnih elektrona. Dakle **brzina kretanja elektrona** jednaka je:

$$\mathbf{v = \kappa E}$$

Brzina elektrona (koja se još naziva **driftovska brzina**) jednaka je: $\mathbf{v = dl / dt} \Rightarrow \mathbf{dl = v \cdot dt}$, gde je: dl… pređeni put elektrona (naelektrisanja), a dt…. vreme za koje elektroni pređu dl.

Svi elektroni koji su prošli kroz površinu S (sl.1) za vreme dt, prešli su put dl i nalaze se u zapremini **V**, koja je jednaka: $\mathbf{V = S \cdot dl\ [m^3]}$.

Ako je gustina slobodnih elektrona **N ,** tada će ukupan broj slobodnih elektrona **dn** koji prođe kroz površinu S, biti jednak:

$$\mathbf{dn = N \cdot V = N \cdot S \cdot dl = N \cdot S \cdot v \cdot dt} \ ;$$

Ovaj broj slobodnih elektrona dovodi do ukupne količine naelektrisanja koja je jednaka:

$$\mathbf{dQ = dn \cdot q_e = N \cdot S \cdot v \cdot dt \cdot q_e} \ ;$$

gde je $\mathbf{q_e}$ … naelektrisanje elektrona, ili nekog drugog elementernog naelektrisanja.

Jačina električne struje je:

$$\mathbf{I = dQ / dt = N \cdot S \cdot v \cdot q_e}$$

Gustina električne struje iznosi:

$$\mathbf{J = I / S = N \cdot v \cdot q_e}$$

Na osnovu svega izvedenog za **gustinu električne struje** važe sledeće relacije:

$$\mathbf{J = \frac{I}{S}\left[A/m^2\right]}$$

odnosno

$$\mathbf{J = NvQ\left[A/m^2\right]} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v = \frac{J}{NQ}\left[m/s\right]}$$

gde je: - J… gustina električne struje (A/m^2) ,
- S…..poprečna površina (m^2).
- I …. jačina električne struje (A).
- Q…. ukupna količina naelektrisanja (C) ,
- v….. brzina kojom se kreću usmereni elektroni (m/s),
- N…. koncentracija naelektrisanja / gustina elektrona / (broj elektrona / m^3),

Z A D A C I :

1.1.1 Koja količina elektriciteta protekne kroz sijalicu koja svetli 2 h, ako je jačina struje $I = 0{,}25$ A?

1.1.2. Koliko će vremena proticati kroz prijemnik količina elektriciteta od $Q = 6$ Ah pri stalnoj jačini struje od 2 A?

1.1.3. Naći gustinu struje u provodniku kružnog poprečnog preseka, poluprečnika $r = 0{,}2$ mm; sa strujom stalne jačine $I = 20$ mA.

1.1.4. Akumulator je napunjen količinom elektriciteta od $Q = 15$ Ah. Koliko dugo će se prazniti ako se prazni strujom konstantne vrednosti od 200 mA?

1.1.5. a) Koliko elementarnih naelektrisanja prođe kroz presek provodnika u 1 s pri stalnoj jačini struje od $I = 5$ A?

b) Kolika je brzina kretanja elementarnih naelektrisanja u bakru ako je poprečni presek bakarnog provodnika 2,5 mm^2, a broj slobodnih elektrona u svakom cm^3 iznosi $N = 8{,}5 \cdot 10^{22}$.

1.1.6. U provodniku kružnog poprečnog preseka prečnika $d = 0{,}06$ mm postoji električna struja stalne jačine od 40 mA.

a) Kolika količina elektriciteta protekne u jednom času kroz poprečni presek provodnika ?

b) Kolika je gustina struje izražena u : A/cm^2 , odnosno A/m^2.

1.1.7. U jednom provodniku kružnog poprečnog preseka S postoji struja I stalne jačine. Za koliko procenata većeg preseka mora da se uzme provodnik da bi gustina struje ostala ista ako se njen intezitet želi da poveća za 3% ?

1.1.8. Kolika količina elektriciteta protekne kroz neki provodnik ako se intezitet struje u tom provodniku ravnomerno povećava od 0 A do 3 A za vreme od 10 s ?

1.1.9. Provodnik kroz koji prolazi struja od 50 A kombinovan je od žice poprečnog preseka 10; 16 i 25 mm^2. Kolika je gustina struje u svakom od ova tri provodnika ?

1.1.10. Na provodnik poprečnog preseka od 4 mm^2 nastavlja se drugi čiji je presek 2,5 mm^2. Gustina struje u prvom provodniku je $J_1 = 6$ A/mm^2. Kolika je gustina struje J_2 u drugom provodniku ?

1.1.11. Kolika je jačina struje u provodniku ako kroz njegov poprečni presek protekne količina naelektrisanja od 180 C svakog minuta ?

1.1.12. Kroz provodnik protiče struja jačine 8μA. Za koje vreme će kroz poprečni presek tog provodnika proteći količina naelektrisanja od 3 mC ?

1.1.13. Koliko elektrona treba svake sekunde da prođe kroz poprečni presek provodnika da bi struja u njemu imala jačinu od 10 A ?

1.1.14. Jačina struje u nekom provodniku iznosi 0,5 A. Koliko elektrona prođe kroz poprečni presek svakog minuta ?

1.1.15. Rešiti zadatak 1.1.8 grafički.

1.1.16. Odrediti prosečnu brzinu kretanja elektrona kroz provodnik prečnika 2 mm ako kroz njega protiče struja jačine 2 A. U 1 cm^3 provodnika nalazi se $8{,}5 \cdot 10^{22}$ slobodnih elektrona.

1.1.17. Odrediti prosečnu brzinu kretanja elektrona pri jačini struje od 5 A ako je prečnik provodnika 2 mm, a koncentracija slobodnih elektrona je $8{,}6 \cdot 10^{28}$ / m^3.

1.1.18. Kroz bakarni provodnik, gde je koncentracija slobodnih elektrona $8{,}5 \cdot 10^{28}$ / m^3, kreću se elektroni prosečnom brzinom od $3 \cdot 10^{-4}$ m/s. Kolika je gustina struje u provodniku ?

1.1.19. Izračunati srednju brzinu kretanja slobodnih elektrona u provodniku od bakra kroz koji protiče struja gustine $J = 3$ A/mm^2. U bakru ima $8{,}5 \cdot 10^{28}$ slobodnih elektrona po m^3. Kolika struja protiče kroz provodnik čiji je prečnik 1 mm, uz datu gustinu struje ?

1.1.20. Kroz prav homogen provodnik kružnog poprečnog preseka poluprečnika $r = 0{,}5$ mm postoji struja jačine $I = 4$ A. Izračunati gustinu struje u provodniku (vektor gustine).

1.1.21. Elektrode pločastog kondenzatora su potopljene u nesavršen tečni dielektrik. Izmerena vrednost jačine struje kroz dielektrik kondenzator je $I = 2{,}5$ μA. Ako je površina ploča kondenzatora $S = 150$ cm^2, izračunati intenzitet vektora gustine struje u dielektriku između ploča kondenzatora. Kakve su linije vektora gustine struje između ploča kondenzatora ?

1.1.22. U tečnom dielektriku nalaze se ravnomerno raspodeljene naelektrisane čestice. Koncentracija naelektrisanih čestica je $N = 10^6$ / m^3, a naelektrisanje svake od njih je $Q = 10^{-16}$ C. Izračunati gustinu i jačinu struje koja se dobija ako se ova tečnost kreće brzinom $v = 1{,}2$ m /s kroz cev površine poprečnog preseka $S = 1$ cm^2. Da li je ova struja posledica električnog polja ?

1.1.23. Odrediti broj elektrona N koji u svakoj sekundi prođu kroz poprečni presek provodnika ako je u provodniku jačina struje $I = 1$ A.

1.2. ELEKTROMOTORNA SILA. ELEKTRIČNI NAPON. ELEKTRIČNO POLJE

ELEKTROMOTORNA SILA

Elektroni koji se usmereno kreću u električnom polju, zbog svoje mase **m** i količine naelektrisanja **Q,** obavljaju određeni rad **A** (jer je izvesna masa preneta sa jednog mesta na drugo). Ovo pomeranje nastaje usled dejstva neke sile (Kulonove) **F**, na određenom putu **l**, te je izvršeni rad **A** jednak:

$$A = F \cdot l \ [J].$$

Na kretanje tih elektrona u električnom kolu deluje električni izvor (generator) svojom električnom silom. Ukupan broj elektrona, samim tim i količina naelektrisanja, kao i rad kojeg ti elektroni izvrše zavisi od ove sile izvora. Sila izvora, koja je električne prirode (tera električnu struju kroz električno kolo), predstavlja odnos između izvršenog rada i količine naelektrisanja. Ova sila se naziva **elektromotorna sila**.
Elektromotorna sila (E) predstavlja silu izvora, pri kojoj će on izvršiti neki rad (A) po jediničnom naelektrisanju (Q).

$$\mathbf{E = \frac{A}{Q}[J/C]}$$

jedinica je **volt [V = J/C].**

Elektromotorna sila (skraćeno ems) je razlika potencijala koju izvor ostvaruje na osnovu neke spoljašnje sile (neelektrične prirode). Ona se javlja u izvoru usled konverzije (pretvaranja) neke neelektrične energije (mehaničke, hemijske…) u električnu.
Kako je oznaka za ems **E,** a to je i oznaka za jačinu električnog polja, kod jačine električnog polja umesto oznake E uzeti ćemo oznaku E′.(Kod oznaka je veliki problem, jer je mnogo više veličina od broja slova.)

ELEKTRIČNI NAPON

Kod kretanja elektrona u električnom kolu oni troše određeni deo električne energije (obavljen je neki rad), kako bi savladali otpor na tom delu puta. Pri tome se njihova energija pretvara u neki drugi oblik energije (toplota), te energija elektrona postaje sve manja. Ovaj postepeni gubitak energije nije ništa drugo nego postepeno smanjenje elektromotorne sile uzduž električnog kola. Dakle, elektromotorna sila se rasporedi po celom električnom kolu, odnosno, svi delovi električnog kola poseduju izvesni deo ems.
Deo elektromotorne sile koji deluje u nekom delu električnog kola naziva se električni napon.
Jedan deo elektromotorne sile izvora potroši se na savladavanje unutrašnjeg otpora izvora, pa u spoljašnjem delu kola deluje samo preostala ems. Taj deo ems. koji deluje u spoljašnjem delu električnog kola naziva se **naponom generatora** (generator pri opterećenju daje ovu potencijalnu razliku)**.** Ako je generator neopterećen (prazan hod), tada je napon generatora jednak elektromotornoj sili. Iz ovog se vidi da su ems generatora i napon jedno te isto , pa je jedinica za napon kao i za elektromotornu silu **volt [V].**

ELEKTRIČNO POLJE

U izvoru, usled +Q i –Q polova, javlja se električno polje jačine **E′.** Ovo polje deluje na elektrone u samom izvoru, koji se u njemu kreću pri zatvaranju električnog kola. Usled toga na elektrone deluje sila **F** koja je jednaka: $F = E'Q \ [N]$ (Kulonova sila).
Rad je jednak: $A = F \cdot l = E'Q \cdot l \ [J]$.
Kako je elektromotorna sila jednaka $E = A / Q \Rightarrow A = E \cdot Q$, te je:

$$E' \cdot Q \cdot l = E \cdot Q \Rightarrow$$

$$\mathbf{E' = \frac{E}{l}[V/m]} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E = E' l [V]}$$

Iz ovoga se može izvući zaključak da će na elektrone u električnom kolu delovati jačina električnog polja **E′,** odnosno elektromotorna sila (napon) **E** po određenoj dužini (put koji pređu elektroni) **l** .

Z A D A C I :

1.2.1. Koliki električni rad izvrši izvor za vreme dok količina elektriciteta od 10 Ah prođe kroz zatvoreno električno kolo, ako je napon na krajevima električnog izvora stalan i iznosi 5 V?

1.2.2. Pod kojim se naponom nalazi električni motor koji izvrši rad od 110 KJ kada kroz njega prođe količina naelektrisanja od 220 C ?

1.2.3. Električni generator čiji je napon $U' = 225$ V napaja električnom energijom električni motor. Pad potencijala u svakom provodniku iznosi 7,5 V. Koliki je napon na krajevima motora ?

1.2.4. Kolika je elektromotorna sila jednog generatora koji izvrši rad od 120 J dok kroz njega, pri stalnoj vrednosti struje, protekne količina naelektrisanja od $Q = 20$ C ?

1.2.5. Generator čija je ems $E = 1{,}2$ V pretvori energiju od 1 000 J u električnu energiju pri održavanju stalne jednosmerne struje u kolu. Kolika količina naelektrisanja pri tome protekne kroz taj generator ?

1.2.6. Po prestanku procesa razdvajanja naelektrisanja u nekom električnom izvoru , gde je razmak između polova 5 cm, među polovima je uspostavljeno homogeno električno polje jačine 34 V/m. Kolika je elektromotorna sila tog izvora ?

1.2.7. U hemijskom izvoru se proizvede količina naelektrisanja od 20 C, pri čemu se 150 J hemijske energije pretvori u električnu. Kolika je elektromotorna sila izvora ?

1.2.8. U izvoru se u električnu energiju pretvori 5 000 J, pri čemu je elektromotorna sila izvora 100 V. Kolika je proizvedena količina naelektrisanja ?

1.2.9. Homogeni bakarni provodnik dužine 100 m stavljen je pod napon od 5 V. Koliki je intenzitet električnog polja u provodniku ?

1.2.10. Kolika je jačina električnog polja u telegrafskom vodu ako je radni napon 24 V a rastojanje radnih stanica (dužina voda) je 65 km ?

1.2.11. Kolika je jačina električnog polja u jednom kalemu (navoju) sa 10 000 navojaka i srednjeg prečnika od 6,5 cm, ako je kalem priključen na napon od 7,9 V ?

1.2.12∗. Elektromotorna sila od 1 V deluje na dužini od 1 m na elektron ($m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg i $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C). Odrediti:

a) ubrzanje koje dobije elektron,
b) vreme u kome se elektronu ostvari navedeno ubrzanje izračunato pod a)

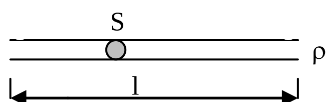
1.2.13∗. Između anode i katode jedne diode je razmak od 5 cm. Ako je na diodi priključen napon od 20 V, izračunati:

a) jačinu homogenog električnog polja između elektroda,
b) silu kojom električno polje deluje na jedan elektron,
c) ubrzanje elektrona,
d) vreme za koje jedan elektron stigne sa katode na anodu,
e) brzinu elektrona pri dolasku na anodu i
f) energiju elektrona po dolasku na anodu.

1.3. ELEKTRIČNI OTPOR I ELEKTRIČNA PROVODNOST

ELEKTRIČNI OTPOR

Otpor koijim se provodnik suprostavlja prolasku elektrona naziva se električni otpor.



Sl.2.

Električni otpor provodnika **R** (sl.2), srazmeran je sa dužinom provodnika **l** a obrnuto srazmeran sa poprečnom površinom **S.**
Pored dužine i preseka električni otpor još zavisi i od vrste materijala od kojeg je napravljen provodnik (otpornik).

Električni otpor je jednak: $$\mathbf{R = \rho \frac{l}{S} [\Omega]}$$ jedinica je **om [Ω]**

Iz navedene relacije sledi: $\rho = R \cdot S / l$ [$\Omega m^2/m = \Omega m$]. Kako iz praktičnih razloga je u našoj struci za presek provodnika usvojena jedinica mm^2, tada je :

$$\mathbf{\rho = RS / l [\Omega mm^2 / m]}$$

Ako je $l = 1$ m I $S = 1$ mm^2 ⇒ **ρ = R.** Zato se za **ρ** kaže da je to specifični električni otpor provodnika jediničnih dimenzija . Dakle, **Specifični otpor provodnika (ρ) je otpor provodnika dužine 1 m i poprečnog preseka 1 mm^2 na temperaturi 20°C.**
Za bakar on iznosi 0,0175 [$\Omega mm^2/m$], a za aluminijum 0,028 [$\Omega mm^2/m$]. Kako otpor, samim tim i specifični električni otpor zavisi i od temperature tada se specifični električni otpor daje na određenoj temperaturi (20°C ili 0°), koja je najčešće sobna temperatura (20°C). Treba imati u vidu i da nečistoće u metalu utiču na otpornost, te navedeni podaci mogu u izvesnoj meri da se ne slažu, no razlika je vrlo mala.
Specifični električni otpor za sve provodnike, kao i otpornike daje se u tabelama (na kraju knjige), koja se koristi kod proračuna kako provodnika, tako i otpornika.

Napomena: Ako je presek provodnika dat u m^2 za spec. el. otpor koristiti jedinicu Ωm, a ako je za presek provodnika data jedinica mm^2 za specifični el. otpor koristiti jedinicu $\Omega mm^2/m$.

$$1\ \Omega m^2/m\ [\Omega m] = 1\ \Omega \cdot 10^6 mm^2/m = 10^6\ \Omega mm^2/m \Rightarrow 1\ \Omega mm^2/m = 10^{-6}\ \Omega m .$$

ELEKTRIČNA PROVODNOST

Recipročna vrednost električnog otpora je električna provodnost (G).
Dakle,

$$\mathbf{G = 1 / R \quad [S]}$$ jedinica je **simens [S].**

Gde je :

R…. električni otpor provodnika [Ω] , a
G…. električna provodnost [S].

Kako je $G = 1 / R \Rightarrow G = 1 / (\rho\, l / S) = S / \rho\, l = (1/\rho)\cdot(S / l) = \gamma \cdot S / l$

$$\mathbf{G = \gamma \frac{S}{l} [S]} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\gamma = G \frac{l}{S} [S m / mm^2]}$$

gde je **γ (γ = 1/ρ)** specifična električna provodnost.

Specifična električna provodnost (γ) provodnika je električna provodnost provodnika dužine 1 m poprečnog preseka 1 mm^2 na temperaturi 20°C.
Najbolji provodnici (idući redom) su: srebro sa 62,5; bakar sa 57,1; aluminijum sa 35,7 [Sm/mm^2].

Z A D A C I :

1.3.1. Provodnik od bakra ima presek $S = 6\ mm^2$ i dužinu $l = 50$ m. Koliki je otpor provodnika ?

1.3.2. Žica od aluminijuma dužine $l = 28,5$ m ima otpor $R = 0,05\ \Omega$. Koliki je presek žice ?

1.3.3. Žica od nihroma ima prečnik $d = 0,3$ mm I dužinu $l = 20$ m, Koliki je otpor žice ako je $\rho_{nih.} = 1.12\ \Omega mm^2/m$?

1.3.4. Koliki treba da je prečnik gvozdene žice duge 100 m da bi imala provodnost od 0,1925 S ?

1.3.5. Bakarno uže sastoji se od 19 žica prečnika 1,8 mm. Koliki je otpor užeta po 1 km dužine ?

1.3.6. Sijalica je udaljena od izvora 30 m i vezana bakarnim žicama preseka $S = 1,5\ mm^2$. Koliki je otpor a kolika provodnost žica ?

1.3.7. Koliki je otpor telegrafske linije (dve žice) prečnika $d = 3,6$ mm i dužine 10 km, ako je linija od gvožđa ($\rho_{Fe} = 0,13\ \Omega mm^2/m$).

1.3.8. Otpor provodnika dužine $l_1 = 300$ m iznosi $R_1 = 9\ \Omega$. Kolika treba da je dužina ovog provodnika da bi mu otpor bio $75\ \Omega$?

1.3.9. Bakarnu žicu dužine l i preseka $S = 6\ mm^2$ treba zameniti isto toliko dugom žicom od aluminijuma, čiji otpori moraju biti isti. Koliki je presek žice od aluminijuma ?
($\rho_{Cu} = 0,0175\ \Omega mm^2/m$ a $\rho_{Al} = 0,028\ \Omega mm^2/m$)

1.3.10. Merenjem je ustanovljeno da žica ima sledeće podatke: dužina $l = 30$ m, prečnik $d = 2,785$ mm i električni otpor $R = 0,14\ \Omega$. Odrediti od kojeg je materijala žica ? (izračunati spec. električnu otpornost)

1.3.11. Grejač treba da ima otpor $R = 100\ \Omega$ a na raspolaganju su nam provodnici od konstantana, hromonikla i cekasa prečnika $d = 0,4$ mm. Kolika je dužina potrebna za svaki od ovih materijala ?
Spec el. otpor navedenih materijala (idući redom) je: 0,5 ; 1.1 ; i $1,4\ \Omega mm^2/m$.

1.3.12. Izračunati otpor C_u trake pravougaonog preseka $S = 120\times10\ mm^2$ i dužine $l = 10$ m.

1.3.13. Žica od kantala prečnika $d = 0,5$ mm namotana je razmaknuto na izolacioni valjak spoljašnjeg prečnika $D = 4,9$ cm, pa je tako načinjen navoj sa 100 navojaka. Koliki je otpor navoja ?

1.3.14. Sračunati otpor bakarne cevi dužine $l = 30$ m unutrašnjeg prečnika $d_2 = 40$ mm i debljine zida $d' = 5$ mm.

1.3.15. Olovna kocka čija je osnova $a = 1$ cm, a otpor između dveju paralelnih stranica je $R = 0,208\cdot10^{-4}\ \Omega$. Odrediti koje dimenzije S' i l' treba da ima žica izvučena iz kocke da bi otpor te žice bio $R' = 1\ \Omega$ ($\rho = 0,208\ \Omega mm^2/m$; pretpostavka: temperatura nepromenjena, količina materijala ista).

1.3.16. Otpor žice kružnog poprečnog preseka je $10\ \Omega$. Ako bi se dužina žice povećala za 60% a prečnik za 20%, naći novu vrednost otpora (pod pretpostavkom da je temperatura ostala konstantna).

1.3.17. Kako se odnose dužine dvaju provodnika jednakih otpora ako im prečnici stoje u odnosu $d_1/d_2 = 2$? Specifični električni otpori su: $\rho_1 = 1,78\cdot10^{-8}\ \Omega m$ i $\rho_2 = 4,45\cdot10^{-9}\ \Omega m$.

1.3.18. Odrediti dužinu l_1 manganske žice prečnika d_1, tako da ima istu otpornost kao bakarna žica dužine l_2 i prečnika d_2. Specifična električna otpornost manganske žice je ρ_1, a bakarne ρ_2.
Brojni podaci: $d_1 = 0{,}5$ mm; $l_2 = 10$ m ; $d_2 = 0{,}1$ mm ; $\rho_1 = 0{,}5\ \Omega mm^2/m$; $\rho_2 = 0{,}0157\ \Omega mm^2/m$.

1.3.19. Provodnik načinjen od legure mangana, specifične električne otpornosti ρ, ima dužinu l i poprečni presek S. Odredi otpornost R provodnika koji se dobije ravnomernim izvlačenjem datog provodnika na dužinu koja je n puta od početne dužine.
Brojni podaci: $l = 100$ m ; $S = 0{,}1\ mm^2$; $\rho = 0{,}5\ \Omega mm^2/m$; $n = 3$.

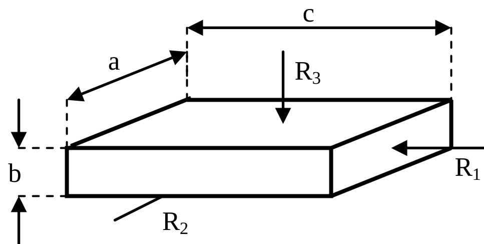
1.3.20. Žičani provodnik dužine l_1 i prečnika d_1 načinjen je od materijala specifične otpornosti ρ. Provodnik je podvrgnut operaciji izvlačenja tako da mu se prečnik smanjio na d_2. Pod pretpostavkom da se prilikom operacije izvlačenja nije smanjila količina metala i nije promenula temperatura, odrediti:

a) otpornost provodnika R_1 pre izvlačenja žice;
b) otpornost provodnika R_2 nakon njegovog izvlačenja i
c) dužinu provodnika l_2 posle izvlačenja.

Brojni podaci: $l_1 = 1$ m ; $d_1 = 2$ mm ; $\rho = 0{,}48\ \Omega mm^2/m$; $d_2 = 0{,}08$ mm.

1.3.21. Izračunati otpornost bakarne cevi, dužine l, spoljnjeg prečnika d_1 I unutrašnjeg prečnika d_2. Cevasti provodnik je načinjen od materijala specifične otpornosti ρ.
Brojni podaci : $l = 3$ m ; $d_1 = 1{,}5$ cm ; $d_2 = 1{,}1$ cm ; $\rho = 0{,}017\ \Omega mm^2/m$.

1.3.22.

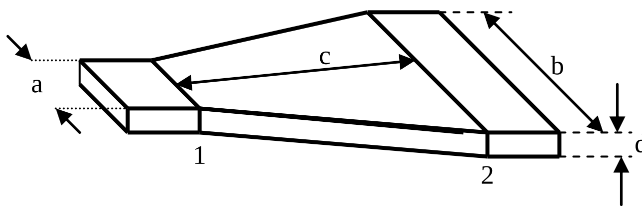


Sl.1.3.22.

Data ploča, sl.1.3.22, izrađena je od bakra specifične otpornosti ρ. Odrediti otpornosti R_1, R_2 i R_3 pločice za sve tri ose, ako su ispunjeni uslovi da se otpornost može računati po obrascu za linijske provodnike.

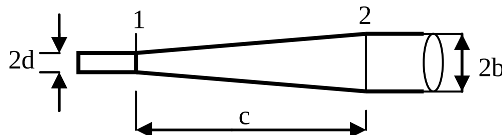
Brojni podaci: $a = 10$ mm ; $b = 4$ mm ; $c = 16$ mm ; $\rho = 0{,}016\ \Omega mm^2/m$.

1.3.23. Približno izračunati otpornost između preseka 1 i 2 trakastog provodnika specifične otpornosti ρ prikazanog na slici 1.3.23. Zbog čega se ova otpornost može izračunati samo približno.



Sl.1.3.23.

1.3.24.



Sl.1.3.24.

Približno izračunati otpornost izmedju preseka 1 i 2 koničnog dela provodnika prikazanog na sl. 1.3.24. ako je specifična otpornost provodnika ρ .

1.3.25. Od žice od konstantana prečnika $d = 0{,}1$ mm treba napraviti otpornik otpornosti jednake $R = 40\ \Omega$. Žica se mota na valjkasto jezgro od izolacionog materijala prečnika $D = 5$ mm. Odrediti potrebnu dužinu žice od konstantana i dužinu jezgra ako se žica mota na jezgro u jednom sloju, sa razmakom od 0,025 mm između susednih zavojaka .

1.3.26. Koji je odnos između prečnika d_1 i d_2 dva provodnika iste dužine i istih otpornosti, napravljenih od materijala čije su specifične otpornosti ρ_1 i ρ_2 ?

2. UTICAJ TEMPERATURE NA ELEKTRIČNU OTPORNOST

Temperatura na električni otpor kod različitih materijala ima sledeći uticaj:

a) Porastom temperature raste specifična otpornost (čelik, bakar, i većina drugih metala),

b) Pri promeni temperature specifična otpornost se ne menja (konstantan, manganin, kantal ..i drugi) i

c) Porastom temperature specifična otpornost se smanjuje (staklo, grafit, silicijum i elektroliti).

Ako specifičnu otpornost na temperaturi θ_o označimo sa ρ_o a na temperaturi θ sa ρ, tada će kod promene temperature od $\Delta\theta$ ($\Delta\theta = \theta - \theta_o$) doći do neke promene specifične otpornosti $\Delta\rho$. Ako se temperatura promeni za 1°C, tada će promena specifične električne otpornosti iznositi : $\boldsymbol{\Delta\rho = \alpha\cdot\rho_o}$.
Gde je α određena konstanta koja pomnožena sa ρ_o daje promenu specifične otpornosti, pri promeni temperature za 1°C. Ova konstanta se naziva **temperaturni koeficijent specifične otpornosti, i ona govori za koliko će se promeniti specifična otpornost materijala (provodnika) ako mu se promeni (poveća) temperatura za 1°C.**

Kod metala $\alpha \cong 0{,}004$ a to znači da će kod njih pri porastu temperature za 1°C porasti i specifična otpornost za 0,004 puta, tj za 0,4% u odnosu na početnu vrednost.

Za materijale pod tačkom a) $\alpha > 0$, za materijale pod tačkom b) $\alpha \cong 0$ a za materijale pod tačkom c) $\alpha < 0$.

Redovito se za početnu temperaturu uzima sobna temperatura, tj. $\theta_0 = 20°$ C (ponegde i 0°C).

Ako je pri promeni temperature za 1°C $\Delta\rho = \alpha\cdot\rho_o$, tada će pri većoj promeni temperature linearno doći do veće promene specifične otpornosti (ovo uglavnom važi do 100 °C), pa za $\Delta\theta = \theta - \theta_o \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\Delta\rho = \alpha\cdot(\theta - \theta_o) \cdot \rho_o}$$

Ukupna vrednost specifične otpornosti $\boldsymbol{\rho}$ jednaka je zbiru početne vrednosti $\boldsymbol{\rho_o}$ i priraštaja $\boldsymbol{\Delta\rho}$.
Konačan izraz za specifičnu otpornost je:

$$\boldsymbol{\rho = \rho_o[1 + \alpha\cdot(\theta - \theta_o)]}$$

gde je :

- θ_o …… početna temperatura (najčešće 20°C) [°C ili K],
- θ ……. krajnja temperatura [°C],
- ρ_o …… specifična otpornost na temperaturi θ_o [$\Omega mm^2/m$],
- ρ ……..specifična otpornost na temperaturi θ i
- α …… temperaturni koeficijent (sačinilac) [1/°C ili 1/K].

Kako je iz navedene relacije $\{ \rho / \rho_o = 1 + \alpha (\theta - \theta_o) \Rightarrow (\rho - \rho_o) / \rho_o = \alpha (\theta - \theta_o) \}$:

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o(\theta - \theta_o)} \qquad \text{jedinica } \left[\frac{\Omega mm^2}{\Omega mm^2 \cdot {}^oC} = \frac{1}{{}^oC} \right].$$

Ako se dimenzije provodnika sa promenom temperature ne menjaju ili pak neznatno menjaju, što je redovit slučaj, tada se umesto specifične otpornosti može preći na električnu otpornost, pa sledi:

$$\boldsymbol{R = R_o [1 + \alpha\cdot(\theta - \theta_o)]}$$

gde je R otpor na temperaturi θ a R_o na temperaturi θ_o .

Ako za početnu temperaturu Q_o imamo neku drugu, npr. θ_p, a za krajnju θ_k, tada se navedeni izraz piše:
$\boldsymbol{R_k = R_p [1 + \alpha\cdot (\theta_k - \theta_p)]}$, gde je R_k otpor na temperaturi θ_k a R_p otpor na temperaturi θ_p.

Kod visokih temperatura (iznad 100°C) te su promene znatno složenije (nisu linearne),a to se proučava na većem nivou, što nije za ovu zbirku.

Temperaturni koeficijenti odgovarajućih materijala se daje u tabelama (na kraju zbirke), na osnovu kojih se može vršiti odgovarajući proračuni.

Smanjenjem temperature otpori provodnika se smanjuju, što na veoma niskim temperaturama može dovesti do vrednosti otpora koja je jednaka nuli. Za ovaj slučaj se kaže da je provodnik postao **superprovodan.**
Temperature metala kod kojih provodnici postaju superprovodni je – 273°C (što predstavlja apsolutnu nulu).

Z A D A C I :

2.1. Spirala grejača na temperaturi $\theta_o = 20°C$ ima otpornost od $R_o = 60\ \Omega$. Kolika će biti otpornost spirale na temperaturi od $\theta = 250°C$, uz pretpostavku da se otpor linearno menja sa porastom temperature. Spirala je načinjena od nikelina čiji je temperaturni koeficijent $\alpha = 2{\cdot}10^{-4}$ [1/°C].

2.2. Odrediti temperaturu lampe čija je nit od platine ($\alpha = 25{\cdot}10^{-5}$ 1/°C). Njena otpornost na temperaturi od 15 °C je 220 Ω, a na nepoznatoj temperaturi je 300 Ω.

2.3. Provodnik dužine l = 1 km, poprečnog preseka $S = 4{,}15\ mm^2$, načinjen je od materijala specifične otpornosti na sobnoj temperaturi (20°C) $\rho_o = 0{,}0175\ \Omega mm^2/m$ (bakar), a temperaturni koeficijent mu iznosi $\alpha = 0{,}004$ 1/°C.Izračunati otpornost provodnika na temperaturama : 50°C ; – 20°C i – 273°C.

2.4. Namotaj električne mašine ima na sobnoj temperaturi (20°C) specifičnu otpornost $\rho_o = 0{,}0175\ \Omega mm^2/m$. Tokom rada mašine, specifična otpornost poraste na vrednost $\rho = 0{,}0217\ \Omega mm^2/m$, a temperaturni koeficijent otpornosti iznosi $\alpha = 0{,}004$ 1/°C. Kolika je radna temperatura mašine ?

2.5. Namotaj od aluminijuma ($\rho_o = 0{,}029\ \Omega mm^2/m$, $\alpha = 0{,}0039$ 1/°C), ima površinu poprečnog preseka $S = 1{,}5\ mm^2$ i otpornost od 65 Ω na temperaturi od 28°C. Kolika je dužina namotaja ?

2.6. Na temperaturi od 100°C otpornost provodnika, čiji je temperaturni koeficijent otpornosti $\alpha = 0{,}004$ 1/°C, iznosi 108 Ω. Izračunati otpor toga provodnika na temperaturi od 10°C.

2.7. Sračunati specifičnu otpornost aluminijskog provodnika na temperaturi 50°C.($\rho_o = 0{,}028\ \Omega mm^2/m$, $\alpha = 0{,}004$ 1/°C)

2.8. Otpor elektrolita od sumporne kiseline H_2SO_4 (30%) na sobnoj temperaturi iznosi 0,8 Ω. Koliki je ovaj otpor na temperaturi od 40°C? Temperaturni koeficijent sumporne kiseline je $\alpha = -\ 0{,}02$ 1/°C.

2.9. Sračunati specifičnu otpornost žice od volframa na temperaturi $\theta = 2\ 500$ °C . Koliko je puta ova otpornost veća od otpornosti pri sobnoj temperaturi ? ($\rho_o = 0{,}056\ \Omega mm^2/m$; $\alpha = 0{,}0045$ 1/°C)

2.10. Koliki je otpor voda od aluminijuma (dve žice) dužine 5 km i poprečnog preseka $S = 25\ mm^2$ kad se pri radu zagreje na temperaturu od 40°C? ($\rho_o = 0{,}028\ \Omega mm^2/m$, $\alpha = 0{,}004$ 1/°C)

2.11. Izračunati otpor telegrafske linije (dve žice) od čelika ($\rho_o = 0{,}15\ \Omega mm^2/m$, $\alpha = 0{,}005$ 1/°C) na temperaturi – 20°C ako je prečnik žise d = 4 mm a dužina linije 10 km.

2.12. Otpor bakarne žice iznosi 237 Ω na sobnoj temperaturi. Kada se žica zagreje do neke temperature otpor se poveća za 71 Ω. Kolika je promena temperature? ($\alpha = 0{,}004$ 1/°C).

2.13. Pri proračunu navoja od bakarne žice za električne mašine uzet je specifični električni otpor od $\rho = 0{,}02\ \Omega mm^2/m$. Za koju je radnu temperaturu predviđen navedeni specifični otpor? ($\rho_o = 0{,}0175\ \Omega mm^2/m$, $\alpha = 0{,}004$ 1/°C)

2.14. Namotaj električnog motora od bakra ima pre početka rada otpor $R_o = 0{,}2\ \Omega$ a po završetku rada $R = 0{,}23\ \Omega$. Do koje se temperature zagrejao namotaj? ($\alpha = 0.004$ Ω/ Ω°C).

2.15. Sijalica sa grafitnom niti ima radnu temperaturu $\theta = 1\ 220$ °C. Ako je nit pre uključenja sijalice imala otpor $R_o = 150\ \Omega$ pri sobnoj temperaturi (20 °C), koliki će biti otpor pri radnoj temperaturi θ ?
($\alpha = -\ 0{,}0004$ 1/°C)

2.16. Navoj načinjen od bakarne žice prečnika d = 0,8 mm i dužine l = 400 m potopljen je u uljnu posudu čija je temperatura (ulja) θ = 80 °C. Ako je γ_o = 57 Sm/mm^2 i α = 0,0038 1/°C, treba odrediti otpor žice R_o pre potapanja u ulje i otpor R nakon njegovog potapanja, ako je temperatura okoline 20 °C.

2.17. Navoj transformatora pri sobnoj temperaturi (20 °C) ima otpornost R_o = 2,1 Ω. Otpornost transformatora u radnom pogonu pri nominalnom opterećenju poraste na R = 2,54 Ω. Navoj je načinjen od bakra čiji je temperaturni koeficijent α = 0,0038 1/°C. Kolika je radna (srednja) temperatura θ navoja transformatora u stalnom pogonu pri nominalnom opterećenju ?

2.18. Spirala od nikelina ima temperaturu od θ = 220 °C i otpor R = 55 Ω. Koliki je otpor te spirale na sobnoj temperaturu (20 °C)? Temperaturni koeficijent nikelina iznosi α = 0,0002 1/°C.

2.19. Otpor nekog elektrolita na temperaturi θ = 24 °C iznosi R = 27,69 Ω, a na temperaturi θ_o = 20 °C R_o = 46,46 Ω. Naći temperaturni sačinilac elektrolita α i specifičnu provodnost γ ako je γ_o = 0,226 S/cm .

2.20. Navoj od nepoznatog materijala ima temperaturni koeficijent α_1 = 0,001 1/°C i otpor R_{o1} = 5 Ω, a navoj od bakarne žice čiji je temperaturni koeficijent α_2 = 0,0039 1/°C ima otpor R_{o2} = 4 Ω (oba otpora su pri temperaturi od θ_o = 20 °C). Na kojoj će temperaturi θ oba navoja imati isti otpor R i koliko on iznosi ?

2.21. Merenjem električnog otpora nekog provodnika na temperaturi θ_1 = 15 °C i θ_2 = 90 °C dobijene su vrednosti R_1 = 25 Ω i R_2 = 32,4 Ω. Izračunati temperaturni koeficijent otpora α i otpor R na 0 °C.

2.22. Volframska žica na temperaturi 0 °C ima otpor R_o. Na kojoj će temperaturi ova žica imati duplo veći otpor (R = 2 R_o) ? Temperaturni koeficijent volframa iznosi α = 0,0048 1/°C.

2.23. Žičani provodnik ima otpornost R_1 na temperaturi θ_1 i R_2 na θ_2. Odrediti temperaturu θ_3 na kojoj će provodnik imati otpornost R_3.
Brojni podaci: R_1 = 10 Ω; R_2 = 15 Ω; R_3 = 30 Ω; θ_1 = 0 °C; θ_2 = 100 °C.

2.24. Provodnik prečnika d je izrađen od legure čija je specifična otpornost ρ_o na temperaturi 0 °C, a temperaturni koeficijent je α. Otpornost provodnika je R na temperaturi θ. Odrediti dužinu provodnika l.
Brojni podaci: ρ_o = 0,2536 Ωmm^2/m; α = 0,0026 1/°C; R = 12 Ω; θ = 50 °C; d = 2 mm.

2.25. Žičani provodnik ima otpornost R_1 na temperaturi θ_1 , a R_2 na temperaturi θ_2 . Odrediti temperaturni koeficijent α.
Brojni podaci: R_1 = 85 Ω; θ_1 = 15 °C; R_2 = 102 Ω; θ_2 = 65 °C.

2.26*. Merenjem otpornosti R bakarnog provodnika sa promenom temperature θ, dobijeni su sledeći rezultati:

θ [°C]	15	30	40	60	75
R[Ω]	19.6	20.9	21,6	23,1	24,4

Nacrtati dijagram otpornosti u funkciji temperature: R = f (θ) i odrediti temperaturni koeficijent na osnovu dijagrama (Dali je on konstantan, a ako nije ustanoviti u kojem je temperaturnom opsegu najveći a u kojem najmanji.).

2.27. Koliki će biti odnos specifičnih otpornosti bakarne žice (ρ_1 / ρ_2) koja se nalazi prvo u pustinji na temperaturi θ_1 = 58 °C a zatim na Antartiku na temperaturi θ_2 = – 88 °C ? (α_{Cu} = 0,0039 1/°C)

2.28. Za koliko se procenata promeni otpornost aluminijskog provodnika ako mu se temperatura poveća za 50 °C ? Temperaturni koeficijent aluminijuma iznosi α = 0,004 1/°C.

2.29∗. Merenjem je utvrđeno da otpornost kalema poraste sa 50 Ω na 58 Ω kada temperatura poraste sa 15 °C na 55 °C. Koliki je temperaturni koeficijent otpornosti materijala od kojeg je napravljen kalem pri temperaturi 0 °C ?

2.30∗. Od dva otpornika, jedan je načinjen od tanke bakarne žice, a drugi od uglja. Kolike trebaju da budu otpornosti ova dva otpornika (tj. njihov zbir) pa da otpornost njihove redne veze ne zavisi od temperature i bude jednaka 250 Ω ? Pretpostaviti da su temperature otpornika iste. Temperaturni koeficijenti na temperaturi 0 °C za date materijale iznose: α_{Cu} = 0,00427 1/°C, α_{u} = – 0,0008 1/°C.

3. OMOV ZAKON. DŽULOV ZAKON. ELEKTRIČNA ENERGIJA I SNAGA

3.1. OMOV ZAKON

Om je ustanovio, da pri konstantnoj temperaturi, jačina električne struje **I** linearno zavisi od napona na provodniku **U** i električne provodnosti provodnika **G.**
Dakle:

$$I = UG = \frac{U}{R}[A]$$

gde je: I …. jačina struje [A],
U …. napon na provodniku (otporniku) [V]
G …..električna provodnost [S]
R… ..električna otpornost [Ω]

Kako elektromotornu silu kod izvora (generatora) možemo posmatrati kao ukupni napon strujnog kola (u praznom hodu $E = U_o$), tada se Omov zakon može predstaviti i u tzv. **opštom obliku :**

$$I = \Sigma E / \Sigma R \ [A]$$

gde je:

- ΣE ….. ukupan zbir svih elektromotornih sila u strujnom kolu ($\Sigma E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$)
- ΣR ….. ukupan električni otpor u strujnom (električnom) kolu .

OMOV ZAKON U LOKALNOM OBLIKU

Iz Omovog zakona $I = U{\cdot}G \Rightarrow J{\cdot}S = U{\cdot}G$; jer je $J = I / S$.
Kako je $G = \gamma{\cdot}S / l \Rightarrow J{\cdot}S = U{\cdot}\gamma{\cdot}S / l \Rightarrow J = \gamma{\cdot}U / l = \gamma{\cdot}E$
Izraz

$$J = \gamma \cdot E \ [A/m^2]$$

predstavlja Omov zakon u lokalnom obliku, gde je:
- **J ….** Gustina struje (A/m^2)
- **γ ….** Specifična električna provodnost (Sm/mm^2)
- **E ….** Jačina električnog polja u linearnom provodniku (V/m).

3.2. DŽULOV ZAKON

Džulov zakon govori o pretvorbi električne energije u toplotnu. **Toplotna energija W** (koja je nastala iz električne) **srazmerna je sa kvadratom struje I, vremenom trajanja procesa pretvaranja t i električnom otporu R.**

$$W = I^2 R t \ [J]$$

jedinica je **džul [J].**

Kako je **snaga P** izvršeni rad u jedinici vremena sledi :

$$P = I^2 R \ [W]$$

jedinica **vat [W].**

ili

$$P = I{\cdot}I{\cdot}R = I{\cdot}U \Rightarrow W = P{\cdot}t = U I t \ [J = Ws]$$

Omov i Džulov zakon čine jednu celinu i oba se istovremeno primenjuju kod prijemnika kod kojih se električna energija pretvara u toplotnu (1. termički prijemnici, 2. sijalice, 3. provodnici−gubici energije).

Stepen korisnog dejstva (iskorišćenja) η , predstavlja odnos između korisne snage **P** (koju koristi prijemnik) i prouzvedene snage **P′** (ukupne) koja se dovodi kolu.

$$\eta = P / P'$$

[nema jedinicu – realan broj **$0 < \eta < 1$** , ili u %].

Z A D A C I :

3.1.1 Kroz kalem od bakarne žice, preseka $S = 0{,}6\ mm^2$ i dužine $l = 200$ m, protiče struja jačine 2 A. Koliki je napon na krajevima kalema, ako je specifična otpornost $\rho = 0{,}018\ \Omega mm^2/m$?

3.1.2. Izračunati potrebnu dužinu provodnika od aluminijuma l ($\rho = 0{,}029\ \Omega mm^2/m$), poprečnog preseka $S = 1{,}5\ mm^2$, kada sa priključenjem napona od $U = 12$ V kroz provodnik teče struja od $I = 8$ A.

3.1.3. Napon na jednom otporniku je $U = 5{,}5$ V, a jačina struje kroz njega je 110 mA. Kolika je provodnost tog provodnika ?

3.1.4. Na izvor napona $U = 50$ V priključen je potrošač čija je provodnost $G = 0{,}2$ S. Kolika je jačina struje I koja protiče kroz potrošač ?

3.1.5. Galvanski izvor ima elektromotornu silu $E = 1{,}5$ V i unutrašnju otpornost $R_g = 0{,}5\ \Omega$. Ako kratko spojimo krajeve galvanskog izvora , kolika će biti struja I_k kratkog spoja ?

3.1.6. Kroz električno kolo protiče struja jačine $I = 5$ A pri naponu U. Struja poraste na $I_1 = 6$ A kada se napon poveće na vrednost $U_1 = 48$ V. Koliki je bio napon U pri kojem je proticala struja I ?

3.1.7. Napon nekog izvora je U, a kroz kolo protiče struja I. Ako napon poraste za $\Delta U = 30$ V, struja poraste na $I_1 = 13$ A. Ako je otpor kola $R = 10\ \Omega$, koliki je napon U i struja I ?

3.1.8. U jednom kolu nalazi se kalem od aluminijske žice prečnika $d = 0{,}5$ mm i ukupne dužine $l = 100$ m. Kod napona izvora $U = 142{,}7$ V kalem nakon izvesnog vremena ostvari temperaturu $\theta_1 = 60$ °C i uzima iz mreže struju $I_1 = 8{,}62$ A. Treba odrediti koja struja I_o protiče kroz kalem ako je on na sobnoj temperaturi (20 °C) ($\rho = 0{,}028\ \Omega mm^2/m$; $\alpha = 0{,}004$ 1/°C)

3.1.9. Kroz bakarni namotaj (kalem) pri temperaturi 20°C protiče struja od $I = 10$ A pri naponu od $U = 100$ V. Nakon trajnog nominalnog opterećenja namotaja pri istom naponu teče struja jačine $I_1 = 9{,}2$ A. Za koliko je stepeni $\Delta\theta$ porasla temperatura namotaja i kolika je radna temperatura namotaja θ_1 ?

3.1.10. Odrediti struju I koja protiče kroz kalem sa N = 500 navojaka bakarne žice prečnika d = 0,2 mm. Srednji prečnik kalema je D = 8 cm. Temperaturni koeficijent bakra je $\alpha = 0{,}0037$ 1/°C a specifična otpornost $\rho_o = 0{,}0175\ \Omega mm^2/m$ (na 20 °C), a struja kod stalnog pogona kalema održava temperaturu na kalemu $\theta_1 = 60$ °C. Kalem je priključen na napon $U = 12{,}06$ V.

3.1.11. Kroz navoj od bakarne žice, preseka $S = 0{,}5\ mm^2$ i dužine $l = 150$ m prolazi struja od 4 A. Koliki je napon na krajevima navoja ?

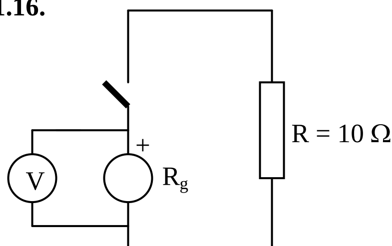
3.1.12. Na udaljenosti od 100 m od generatora nalazi se električni motor čija struja iznosi $I = 20$ A i koji je vezan bakarnim provodnicima (dve žice) preseka $S = 10\ mm^2$. Ako je napon generatora $U' = 220$ V koliki je napon na krajevima motora U ?

3.1.13. Koliki bi morali biti preseci dovodnog i odvodnog provodnika iz predhodnog zadatka da bi pad napona na provodnicima iznosio $U_p = 2{,}8$ V ?

3.1.14. Udaljenost prijemnika od generatora iznosi 220 m, a struja prijemnika je 20 A. Vod se sastoji od dve bakarne žice. Koliki mora biti presek svake žice pa da pad napona u njima ne bude veći od 10 V ?

3.1.15. Generator čija je ems $E = 12$ V pri stalnoj struji od 15 A puni akumulatorsku bateriju čija je kontra ems $E_k = 9$ V. Koliki je otpor celog kola ?

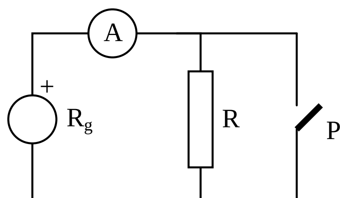
3.1.16.



Sl.3.1.16.

U kolu na sl.3.1.16. izmeren je napon na krajevima izvora (generatora) i on iznosi U_1 = 20 V pri otvorenom prekidaču P, a pri zatvorenom prekidaču U_2 = 19 V. Koliki je unutrašnji otpor izvora R_g ?

3.1.17.



Sl.3.1.17.

Na slici 3.1.17. pri otvorenom prekidaču P ampermetar pokazuje jačinu struje I_1 = 2,4 A a pri zatvorenom prekidaču P I_2 = 120 A. Ako je otpor potrošača R = 48 Ω, koliki je unutrašnji otpor izvora R_g ?

3.1.18. Elektromotorna sila generatora iznosi E = 250 V, njegova unutrašnja otpornost R_g = 0,2 Ω a napon na krajevima generatora iznosi U = 220 V. Odrediti:
a) nominalnu struju generatora,
b) struju kratkog spoja generatora.

3.1.19. Pri praznom hodu generatora izmeren je napon od 100 V na njegovim krajevima . Kada se priključi otpornost od 1 KΩ, napon padne na 50 V. Odrediti intezitet električne struje u oba slučaja kao i elektromotornu silu generatora.

3.1.20. Neki prijemnik prima iz baterije, čija je ems E = 120 V, električnu struju od 80 mA. Ako je napon na krajevima date baterije 110 V, odrediti:
a) unutrašnju otpornost baterije,
b) otpornost prijemnika.

3.1.21∗. Da li je moguće izračunati unutrašnji otpor izvora jednosmerne struje, ako se izvrši jedno merenje ampermetrom i jedno merenje voltmetrom ? Odgovor detaljno prokomentarisati.

3.1.22∗. Za polove generatora ems E i zanemarljivo male unutrašnje otpornosti, priključen je otpornik R, čija se otpornost menja. Ako je struja u kolu I_1, odnosno I_2, na temperaturi θ_1 odnosno θ_2, odrediti struju I_3 na temperaturi θ_3 i temperaturni koeficijent α za dati temperaturni opseg.
Brojni podaci: E = 6 V; I_1 = 1 A; I_2 = 0,85 A; θ_1 = 0 °C; θ_2 = 40 °C; θ_3 = 80 °C.

3.1.23∗. Žičani provodnik, prečnika d, priključen je na generator ems E, zanemarljivo male unutrašnje otpornosti. Odrediti dužinu provodnika l, ako je poznato da on prima snagu P na temperaturi θ_2. Specifična otpornost materijala na temperaturi θ_1 je ρ_1, a temperaturni koeficijent je α.
Brojni podaci: E = 6 V; d = 0,2 mm; ρ_1 = 0,06 $\Omega mm^2/m$; θ_1 = 20 °C; θ_2 = 60 °C; α = 0,005 Ω/Ω°C; P = 60 W.

3.2.1. U toku 2 sata proticanja struje jačine 80 mA kroz prijemnik, razvije se količina toplote od 4 186 J. Kolika je otpornost, a kolika provodnost datog prijemnika ?

3.2.2. Specifična otpornost žičanog otpornika je ρ = 0,525 $\Omega mm^2/m$. Pri struji od 2 A u prijemniku se razvije snaga (Džulova) od 28 W. Ako je poluprečnik upotrebljene žice 0,5 mm, kolika je dužina žice l?

3.2.3. Lampa sa vlaknom od volframa predviđena je za rad pri naponu U = 220 V i snazi P = 40 W. Kolika je otpornost vlakna i jačina struje pri sobnoj temperaturi (20 °C), kao i na radnoj temperaturi koja oznosi 2 500 °C? Temperaturni koeficijent volframa je α = 0,004 Ω/Ω°C.

3.2.4. Dvožični vod od bakra dužine l = 100 m, poprečnog preseka S = 25 mm^2 spaja generator sa prijemnikom koji radi pri naponu od 220 V i struji jačine 120 A. Izračunati:

a) snagu prijemnika,
b) gubitak snage i napon duž voda (pad napona),
c) napon na krajevima generatora i snagu generatora.

3.2.5. Za vreme od 5 minuta grejač poprečne površine S = 0,25 mm^2 oslobodi energiju W = 1 780 KJ, a priključen je na napon od 220 V. Izračunati:

a) jačinu struje koja prolazi kroz grejač,
b) gustinu struje u grejaču,
c) snagu grejača.

3.2.6. Električna energija se pretvara u toplotnu brzinom od 100 J/s pri struji od 2 A. Koliki je otpor kola ?

3.2.7. Struja jačine 40 A napaja prijemnik za vreme od 3 sata i tom prilikom izvrši rad od 1 440 KJ. Koliki je napon na krajevima prijemnika ?

3.2.8. Sijalica je priključena na napon od 200 V i potrošila je energiju od 0,06 KWh. Izračunati jačinu struje kroz sijalicu ako radi 1 sat, kao i otpor sijalice.

3.2.9. Motor, napajan strujom od 12,4 A, priključen je na napon od 120 V i daje snagu od 1,294 KW. Izračunati stepen iskorišćenja motora.

3.2.10. Električna grejalica je priključena na napon U =220 V. Otpornost grejalice je R = 11 Ω.

a) Kolika je snaga grejalice ?
b) Koliki je izvršeni rad ako grejalica radi 5 sati ?

3.2.11. Kroz električnu peglu protiče struja I = 3,5 A za vreme od 50 minuta i oslobodi količinu toplote od 1 575 KJ. Kolika je otpornost pegle ?

3.2.12. Kroz metalni provodnik otpora 10 Ω ravnomerno protekne naelektrisanje od 40 C u toku od 20 minuta. Kolika se količina toplote pri tome oslobodi u provodniku ?

3.2.13. Kroz poprečni presek gvozdene žice protekne $18 \cdot 10^{25}$ elektrona za t = 6 s i pri tome se oslobodi toplotna energija Q = 800 J (W = Q) Kolika je dužina ove žice ako joj je poprečni presek S = 2,5 mm^2 ?

3.2.14. Kolika mora biti korisna snaga motora P_m koji za t = 10 s podigne teret od F = $49,05 \cdot 10^3$ N na visinu l = 3 m ?

3.2.15. U kolu se nalaze generator i motor. Ampermetar pokazuje struju u kolu I = 15 A, a voltmetar napon generatora U′ = 230 V i napon motora U = 218 V. Kolika je snaga generatora,motora i snaga gubitaka u provodnicima ?

3.2.16. Snaga instalisanih sijalica u stanu iznosi 400 W. Ako se uzme da jedna četvrtina sijalica prosečno svetli 5 h dnevno. Koliko će iznositi račun za naplatu utrošene električne energije za ceo mesec, ako je cena koštanja 1 KWh 3,5 dinara ?

3.2.17. Motor snage P = 5 KW i napona 110 V napaja se iz generatora napona od 120 V udaljenog 150 m. Koliko iznosi presek provodnika (dve žice), ako je on od bakra ($\rho = 0{,}0175\ \Omega mm^2/m$) ?

3.2.18. Koliki je otpor hladnog vlakna od volframa sijalice od 200 W i 125 V ako se pri radu vlakno zagreje na temperaturu od 2 600 °C ? ($\alpha = 0{,}0045$ 1/°C)

3.2.19. Električni motor prima električnu snagu od 8 KW i ima etepen iskorišćenja $\eta = 0{,}85$. Kolika je korisna snaga motora ?

3.2.20. Voltmetar je stalno priključen na 220 V. Ako je otpor voltmetra 10 000 Ω, kolika je njegova potrošnja (Džulovi gubici – zagrevanje voltmetra) za godinu dana ?

3.2.21. Bakarni vod (dve žice) dužine 200 m i preseka 25 mm^2 napaja prijemnik čija je struja 120 A pri naponu od 220 V. Koliki je napon na početku voda, i kolika je snaga izvora ?

3.2.22. Koliko treba da se promeni poprečni presek provodnika dvožičnog voda da bi gubici ostali nepromenjeni u slučaju kada se napon poveća dva puta a snaga ostane ista ?

3.2.23. Grejač napravljen od bakarnog provodnika priključen je na mrežu konstantnog napona. Pet sekundi posle priključenja na mrežu snaga je iznosila P_1 a nakon 1 sata P_2. Kakav je tih odnos snaga ?

3.2.24. Potrebno je napraviti grejač koji kada se priključi na mrežu napona U = 220 V, zagreje dva litra vode od 15 °C na 100 °C za 10 minuta. Stepen korisnog dejstva grejača je $\eta = 70$ %. Na raspolaganju je žica od hromonikla ($\rho = 1{,}37\ \Omega mm^2/m$) prečnika d = 0,2 mm, koju treba spiralno namotati na izolacioni valjak. Kolika je ukupna dužina upotrebljene žice ?

3.2.25. Ako bi se grejač iz predhodnog zadatka pravio od bakarne žice istog prečnika kolika bi tada iznosila dužina potrebne žice ? Dati komentar, vezan za električne otpornike.

3.2.26. Prenos snage P = 100 MW treba da se obavi na rastojanju l = 100 km pomoću dvožičnog voda napravljenog od materijala čija je specifična otpornost $\rho = 0{,}02\ \Omega mm^2/m$, uz maksimalni dozvoljeni gubitak snage usled zagrevanja voda od $\Delta P = 10$ %. Koliko treba da iznosi poprečni presek provodnika voda u tom slučaju ako je napon na početku voda: a) 100 KV; b) 10 KV?

3.2.27. Kroz provodnik protekne $8 \cdot 10^{19}$ elektrona u toku 4 s. Za to vreme se u žici oslobodi količina toplote od 670 J. Koliki je otpor provodnika ?

3.2.28. U jednom provodniku otpora 150 Ω stalna struja za 40 min izvrši rad od 36 MJ. Koliko elektrona u svakoj sekundi prođe kroz poprečni presek provodnika ?

3.2.29. Usled preopterećenja gradske mreže napona U = 220 V snaga grejača opadne sa $P_1 = 1\ 000$ W na $P_2 = 800$ W. Izračunati koliki je pad napona u mreži, predpostavljajući da otpor grejača pri tome ostane isti.

3.2.30. Dalekovodom se prenosi snaga P = 1 MW pri naponu U = 6 KV. Otpor voda dalekovoda je R = 3,6 Ω. Koliki je stepen korisnog dejstva prenosa dalekovoda ?

3.2.31. Pri kolikom naponu treba prenositi električnu energiju na rastojanje l = 10 km da bi pri gustini struje $J = 0{,}5\ A/mm^2$ gubici u provodnicima bili 1 % od predate snage. Specifični otpor provodnika iznosi $\rho = 0{,}12\ \mu\Omega m$.

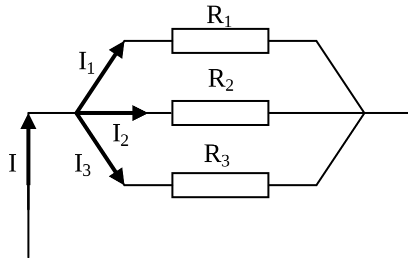
3.2.32∗. Za vlakno sijalice snage P = 100 W, predviđene za napon U = 220 V, koristi se 45 mg volframa. Radna temperatura vlakna od volframa je 2 400 °C, a specifična masa volframa $\rho_m = 19{,}3\ g/cm^3$. Odrediti potrebnu dužinu i prečnik vlakna.

3.2.33. U provodniku poprečnog preseka **S** i dužine **l** uspostavljeno je električno polje **E** i gustina struje **I**. Izvesti izraz za količinu toplote, u funkciji navedenih veličina, koja se oslobodi u ovom provodniku u jedinici vremena.

3.2.34. Četiri otpornika otpornosti $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 3\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$ i $R_1 = 1\ \Omega$, veyana su tako da im je ekvivalentna otpornost jednaka $1\ \Omega$. Kolika je snaga na na otporniku R_1 P_1 ako je na drugom otporniku R_2 snaga $P_2 = 27$ W ?

4. VEZIVANJE OTPORA I KIRHOFOVA PRAVILA (ZAKONI)

4.1. PRVI KIRHOFOV ZAKON



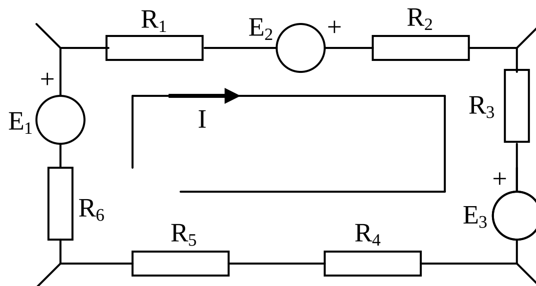
Sl.3.

Prvi Kirhofov zakon govori o strujama u čvornom mestu (sl.3). On glasi: **Zbir svih struja koje ulaze u jaedn čvor jednak je zbiru svih struja koje iz njega izlaze.** To znači, za našu sliku:

$$\mathbf{I = I_1 + I_2 + I_3 \quad ili \quad I - I_1 - I_2 - I_3 = 0.}$$

Što znači, da je algebarski zbir svih struja u čvornom mestu jednak 0, s tim da se struje koje ulaze u čvor ozunače sa + , a izlazne za predznakom –

4.2 DRUGI KIRHOFOV ZAKON



Sl.4.

Da bi se drugi Kirhofov zakon mogao praktično primenjivati u praksi treba pre toga poznavati električne sile (veličine) koje teraju struju (elektrone) kroz električno kolo, slika 4, ili se pak njoj suprostavljaju. To su:

1. elektromotorna sila E
2. kontraelektromotorna sila E_K i
3. elektrootporna E_R

Elektromotorna sila je sila koju stvara električni izvor. Zahvaljujući njoj kroz kolo protiče struja, jer je ona svojom potencijalnom razlikom (koja se stvara na izvoru usled pretvaranja neke neelektrične veličine u električnu) omogućila usmereno kretanje elektrona (od – ka + , sa tim da je tehnički smer obrnut, tj. od + ka –) .Ona je istog smera kao i struja, pa se obeležava sa predznakom +.

Suprotno elektromotornoj sili postoji i **kontraelektromotorna sila** koja deluje suprotno od smera struje (tehnički smer) pa se ona obeležava sa predznakom – . Kontraelektromotorna sila se javlja kod motora (koji imaju suprotan proces rada) , kao i kod izvora (generatora) koji se suprotno vežu (pogrešno) u odnosu na smer struje.

Kako se električni otpori suprostavljaju prolasku električne struje, možemo konstantovati da će oni svojom nekom silom da se suprostavljaju tom prolasku struje. Ta sila kojom se otpornik suprostavlja prolasku električne struje naziva se **elektrootporna sila.** Elektrootporna sila je jednaka omskom padu napona, jer da bi se ova sila savladala na datom otporniku mora da deluje određeni napon (pad napona) koji je brojno jednak elektrootpornoj sili ali suprotnog smera. To znači da je elektrootporna sila jednaka:
$E_R = - I \cdot R = - U_R$. Ona je takođe obeležena sa predznakom – , jer se suprostavlja prolasku struje.

Opšti je zaključak, da je samo elektromotorna sila pozitivna (istog je smera kao i struja), dok su druge dve negativne. Predznak + ili – može se odrediti i na osnovu potencijala, koji idući u smeru struje ili raste ili opada za datu električnu silu. **Ako potencijal raste idući u smeru struje sila je pozitivna, a ako opada sila je negativna.**

Konkretno za dato kolo na slici 4 sledi:

$$\mathbf{E_1 - I\,R_1 + E_2 - I\,R_2 - I\,R_3 - E_3 - I\,R_4 - I\,R_5 - I\,R_6 = 0}$$

Navedeni izraz predstavlja **drugi Kirhofov zakon, koji glasi: ZBIR SVIH ELEKTRIČNIH SILA U ZATVORENOM KOLU (KONTURI) JEDNAK JE NULI, poštujući njihove predznake.**

Kako predhodnu jednačinu možemo napisati:

$$\mathbf{(E_1 + E_2) - E_3 = I\, R_1 + I\, R_2 + I\, R_3 + I\, R_4 + I\, R_5 + I\, R_6}$$

E_1 i E_2 .... predstavljaju elektromotorne sile (potencijal raste idući u smeru struje),
E_3.... kontraelektromotorna sila (potencijal opada idući u smeru struje)
IR_1, IR_2.... IR_6.... elektrootporne sile tj. omski pad napona (potencijal opada idući u smeru struje).
Konačno, drugi Kirhofov zakon se može definisati i na sledeći način (zadnji obrazac), **algebarski zbir svih elektromotornih i kontraelektromotornih sila jednak je zbiru svih omskih padova napona u zatvorenoj konturi (petlji), odnosno zatvorenom kolu.**
Navedena definicija se može matematički napisati :

$$\mathbf{\Sigma E = \Sigma I R}$$

4.2.VEZIVANJE OTPORA

R e d n a v e z a

Ako umesto E_1, E_2 i E_3 u kolu prema slici 9 priključimo samo jedan izvor koji daje napon U, tada drugi Kirhofov zakon za to kolo glasi:
$U = I R_1 + I R_2 + I R_3 + I R_4 + I R_5 + I R_6 \;/ : I \Rightarrow U / I = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6$.
Sledi, **kod redne veze otpora ukupni (ekvivalentni) otpor je jednak zbiru pojedinačnih** :

$$R = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

a recipročna vrednost ekvivalentne provodnosti je jednaka zbiru reciprocnih vrednosti pojedinačnih provodnosti:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + ... + \frac{1}{G_n}$$

P a r a l e l n a v e z a

Prema prvom Kirhofovom zakonu, za sliku 8, sledi $I = I_1 + I_2 + I_3 = U / R_1 + U / R_2 + U / R_3 \;/ : U$
$I / U = 1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3 \Rightarrow$

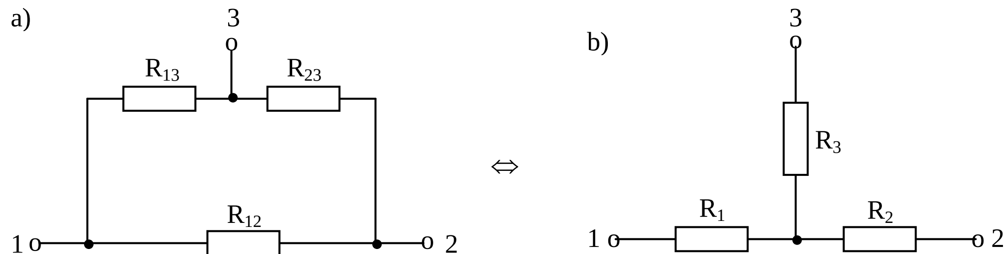
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$$

$$G = G_1 + G_2 + ... + G_n$$

Dakle**, kod paralelne veze, ukupna provodnost jednaka je zbiru pojedinačnih provodnosti**.

M e š o v i t a   v e z a , je kombinacija dveju predhodnih veza.

V e z a   u   t r o u g a o   i   v e z a   u   z v e z d u   i   n j i h o v a   t r a n s f o r m a c i j a



Sl.5.

Transformacija je potrebna, kako bi se nakon nje olakšao postupak pri rešavanju zadatka.
Kod transformacije (pretvaranja) veze otpora u zvezdu u vezu u trougao i obrnuto, slika 5, važi opšte pravilo da otpor između stezaljki 1 - 2, 2 - 3 i 3 – 1 ostane konstantan za obe veze (ovo važi i za ostale veze). Primenjujući ovo pravilo dolazi se do sledećih izraza, pomoću kojih se direktno prelazi sa veze u trougao u vezu u zvezdu i obrnuto.:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

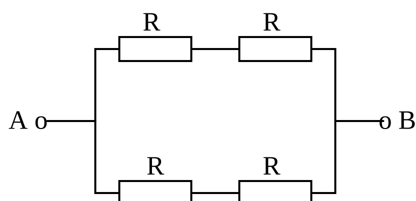
$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

gde su:

- R_{12}, R_{23}, R_{13}... otpori u trouglu, slika 5 a)
- R_1, R_2 i R_3... otpori u zvezdi, slika 5 b).

Z A D A C I :

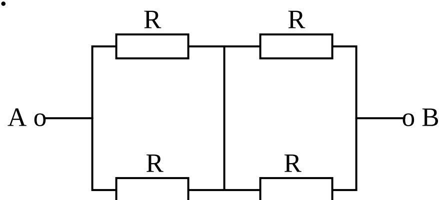
4.1.



Sl.4.1.

Koliki je ekvivalentni otpor, prema sl. 4.1 ?

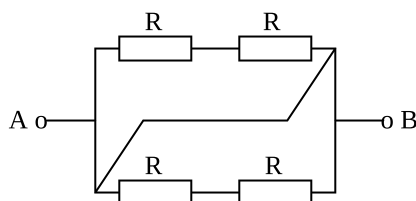
4.2.



Sl.4.2.

Koliki je ekvivalentni otpor prema sl.4.2 ?

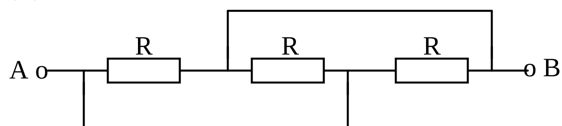
4.3.



Sl.4.3.

Koliki je ekvivalentni otpor prema sl.4.3 ?

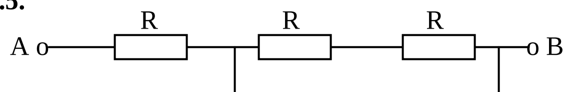
4.4.



Sl.4.4.

Koliki je ekvivalentni otpor prema sl.4.4 ?

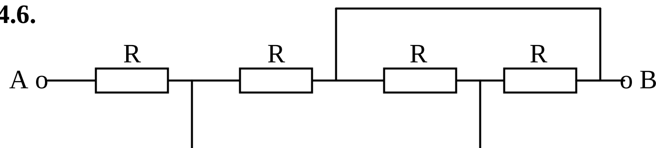
4.5.



Sl.4.5.

Koliki je ekvivalentni otpor prema sl.4.5 ?

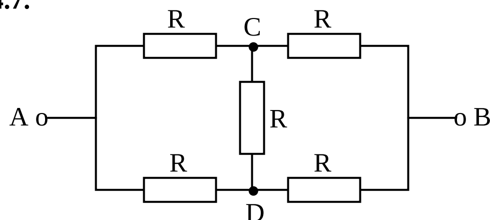
4.6.



Sl.4.6.

Koliki je ekvivalentni otpor prema sl.4.6 ?

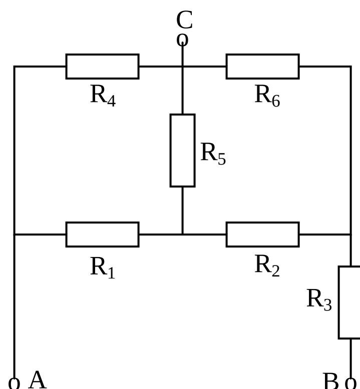
4.7.



Sl.4.7.

Koliki je ekvivalentni otpor, između tačaka A i B; na slici 4.7 ?

4.8.



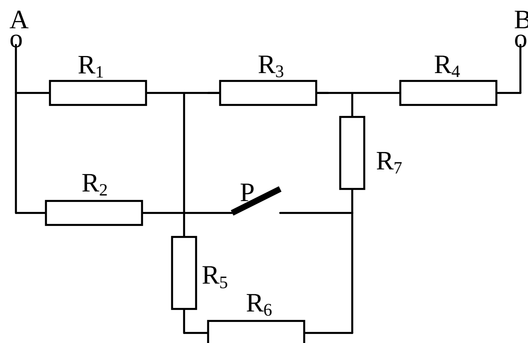
Sl.4.8.

Kolika je ekvivalentna otpornost, prema Slici 4.8, između tačaka:

a) A i C,
b) B i C i
c) A i B

Brojni podaci: $R_1 = 1\Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_3 = 5\ \Omega$; $R_4 = 6\ \Omega$; $R_5 = 3\ \Omega$ i $R_6 = 4\ \Omega$.

4.9.

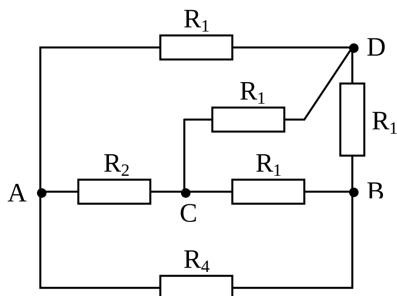


Sl.4.9.

U kolu na slici 4.9. poznato je:
$R_1 = 300\ \Omega$; $R_2 = 600\ \Omega$; $R_3 = 600\ \Omega$; $R_4 = 180\ \Omega$; $R_5 = 200\ \Omega$; $R_6 = 400\ \Omega$; $R_7 = 300\ \Omega$.
Koliki je ekvivalentni otpor između tačaka A i B, kada je:

a) P otvoren;
b) P zatvoren.

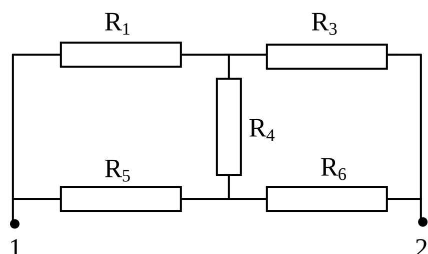
4.10.



Sl.4.10.

Ako se za tačke A i B grupe od 5 otpornika prikazane na sl.19. priključi otpornik otpornosti R_4, ekvivalentna otpornost između tačaka A i B iznosi R_e. Kolika će biti otpornost R_2 ako je:
$R_1 = 9\ \Omega$; $R_4 = 2{,}2\ \Omega$; $R_e = 1{,}716\ \Omega$

4.11.

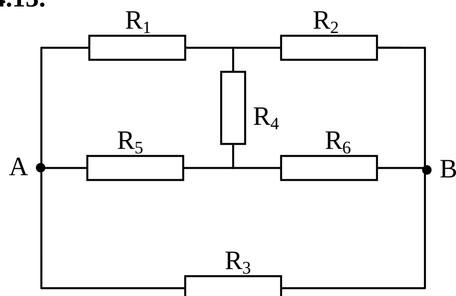


Sl.4.11.

Četiri otpornika poznate otpornosti vezani su kao što je prikazano na slici 4.11. Ako je ekvivalentna otpornost između tačaka 1 i 2 R_{12}, odrediti nepoznatu otpornost R_5.
Brojni podaci: $R_1 = 2\ \Omega$; $R_3 = 100\ \Omega$; $R_4 = 40\ \Omega$; $R_5 = 60\ \Omega$; $R_{12} = 42{,}7\ \Omega$.

4.12. Kada se dva otpornika vežu redno, njihova ekvivalentna otpornost jednaka je $R = 40\ \Omega$, a kada se vežu paralelno, onda je ekvivalentna otpornost jednaka $R' = 10\ \Omega$. Kolike su otpornosti ovih otpora ?

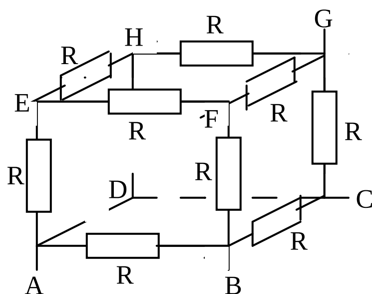
4.13.



Sl.4.13.

Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B prikazano na slici 4.13.
Brojni podaci: $R_1 = R_2 = R_3 = 6\ \Omega$; $R_4 = R_5 = R_6 = 2\ \Omega$.

4.14.



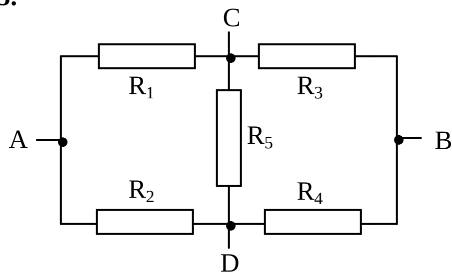
Sl.4.14

Dvanaest jednakih otpora otpornosti R vezani su tako da čine stranicu jedne kocke, kao na slici 4.14. Odrediti ekvivalentnu otpornost između sledećih temena kocke:

a) A i B;
b) A i C,
c) A i G.

Brojni podaci : $R = 12\ \Omega$.

4.15.



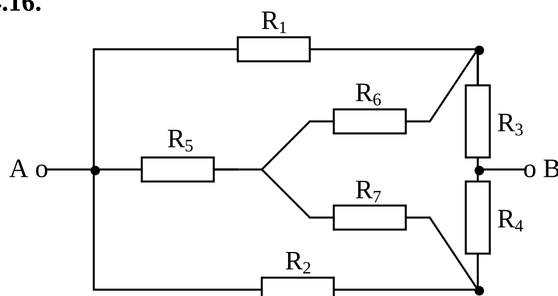
Sl.4.15.

Grupa od pet otpornika poznatih otpornosti, vezana je prema slici 4.15.
Odrediti ekvivalentnu otpornost, i to:

a) između tačaka A i B;
b) između tačaka C i D.

Brojni podaci: $R_1 = R_2 = 4\ \Omega$; $R_3 = R_4 = 6\ \Omega$; $R_5 = 2\ \Omega$.

4.16.

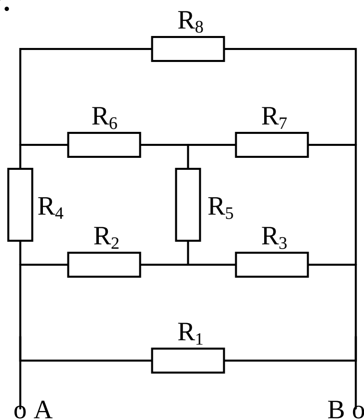


Sl.4.16.

Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B za kolo prikazano na slici 4.16.

Brojni podaci:
$R_1 = R_2 = 16\ \Omega$; $R_3 = R_4 = R_5 = 6\ \Omega$;
$R_6 = R_7 = 4\ \Omega$.

4.17.

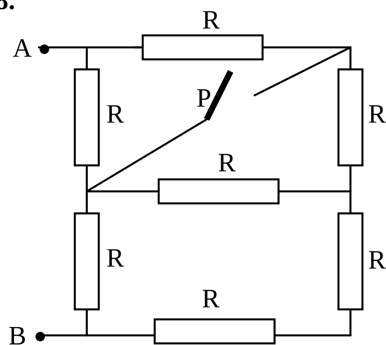


Sl.4.17.

U kolu prikazanom na slici 4.17, poznate su sve otpornosti. Kolika je otpornost između tačaka A i B ?

Brojni podaci:
$R_1 = 3\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_3 = 1\ \Omega$; $R_4 = 1\ \Omega$; $R_5 = 5\ \Omega$;
$R_6 = 2\ \Omega$; $R_7 = 3\ \Omega$; $R_8 = 5\ \Omega$.

4.18.

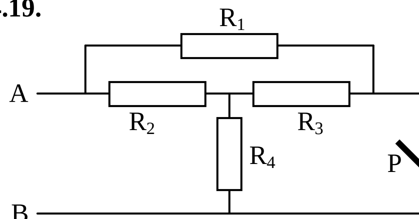


Sl.4.18.

Izračunati otpornost između tačaka A i B, na slici 4.18, ako je prekidač P zatvoren, i ako je prekidač P otvoren.

Brojni podaci : $R = 5\ \Omega$.

4.19.

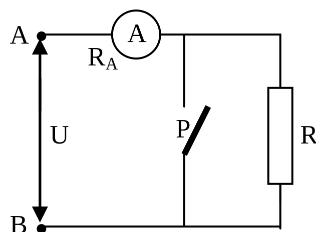


Sl.4.19

Izračunati otpornost između tačaka A i B na slici 4.19, ako je prekidač P otvoren, i ako je prekidač P zatvoren.

Brojni podaci: $R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$; $R_3 = 75\ \Omega$;
$R_4 = 120\Omega$.

4.20.



Sl.4.20.

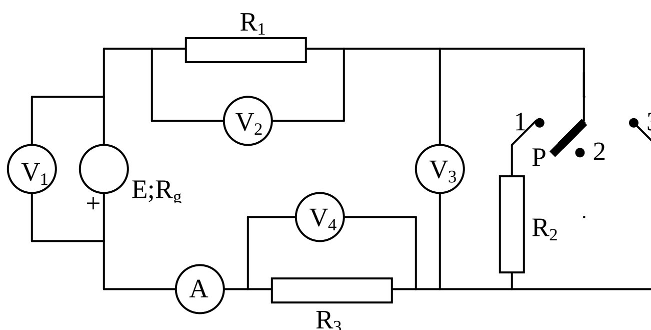
Ako ampermetar na slici 4.20 pokazuje struju od $I = 2,5$ A, koliki će biti njegov unutrašnji otpor R_A ?

Brojni podaci : $R = 48\ \Omega$; $U = 230$ V.

Šta će pokazati ampermetar nakon uključenja prekidača P?

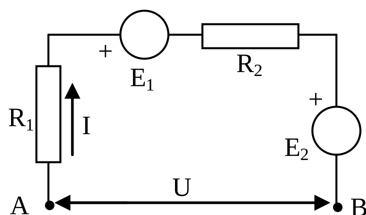
4.21. Šta će pokazivat idealni instrumenti u prostom kolu na slici 4.21, ako se prekidač postavi u sva tri položaja ?

Brojni podaci: $E = 40,5$ V; $R_g = 0,8\ \Omega$; $R_1 = 4,2\ \Omega$; $R_2 = 2,7\ \Omega$; $R_3 = 8,5\ \Omega$



Sl.4.21.

4.22.

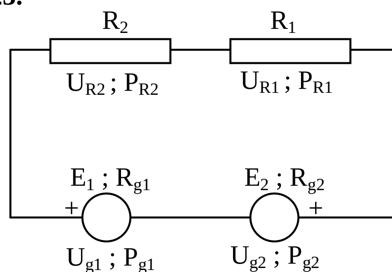


Sl.4.22

Kolo na slici 4.22 ima sledeće podatke:
$E_1 = 10$ V; $E_2 = 50$ V; $U = 10$ V; $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$.
Odrediti struju u kolu, i to:

a) napon U ima veći potencijal u tački A u odnosu na tačku B
b) napon U ima veći potencijal u tački B u odnosu na tačku A.

4.23.

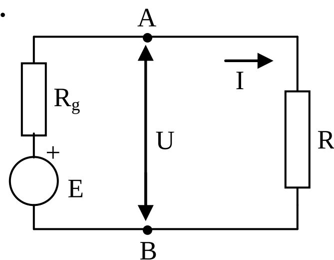


Sl.4.23.

Za kolo na slici 4.23. izračunati struju, i sve pojedinačne napone i pojedinačne snage (prikazane na slici) i objasniti zakon o održanju energije u datom kolu.

Brojni podaci:
$E_1 = 48$ V; $E_2 = 24$ V; $R_{g1} = 0,4\ \Omega$; $R_{g2} = 0,2\ \Omega$;
$R_1 = 28\ \Omega$; $R_2 = 11,4\ \Omega$.

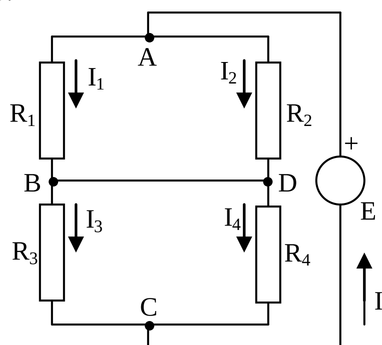
4.24.



Sl.4.24.

Dato je kolo na sl.4.24. Naći unutrašnju otpornost R_g generatora, ako je ems E = 40 V; otpornost potrošača R = 17 Ω, a struja u kolu I = 2 A.

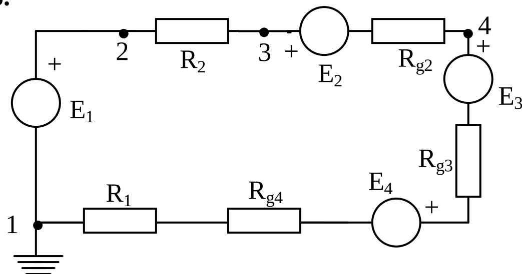
4.25.



Sl.4.25.

Naći struje u svim granama kola na slici 4.25, ako je dato:
E = 75 V; R_1 = 3 Ω; R_2 = 15Ω; R_3 = 10Ω; R_4 = 6 Ω

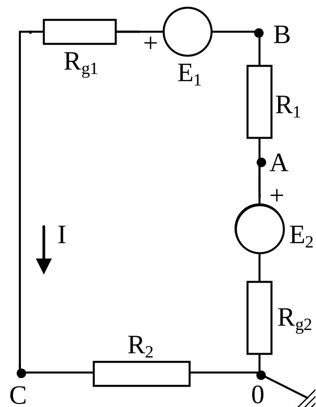
4.26.



Sl.4.26.

Za kolo na sl. 4.26. dati su sledeći podaci:
$R_{g2} = R_{g3} = R_{g4}$ = 5 Ω; $R_1 = R_2$ = 20 Ω;
E_1= 20 V; E_2 = 40 V; E_3 = 60 V; E_4 = 25 V.
Odrediti napone na svim otpornicima u kolu, kao i potencijale u tačkama 2, 3 i 4 u odnosu na tačku 1 .

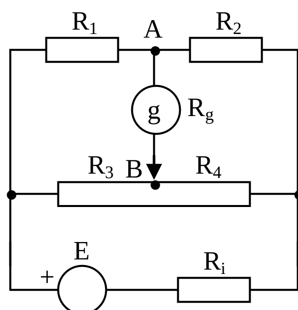
4.27



Sl.4.27.

Za kolo na slici 4.27. poznato je :
E_1 = 16 V; E_2 = 8 V; R_{g1} = 8 Ω; R_{g2} = 2 Ω;
R_1 = 6 Ω; R_2 = 20 Ω.
Odrediti potencijale tačaka A, B i C u odnosu na referentnu tačku 0 (zemlja – masa).

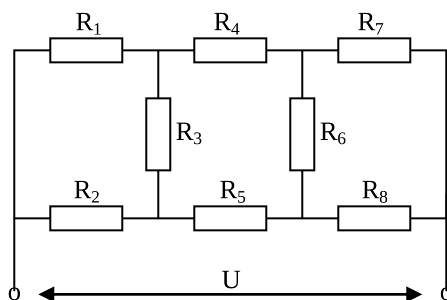
4.28.



Sl.4.28

Dato je kolo prema slici 4.28 (Vitstonov most). Kada je klizač B u naznačenom položaju poznate su sledeće vrednosti:
$R_1 = 50\ \Omega$; $R_2 = 57{,}5\ \Omega$; $R_3 = 60\ \Omega$; $R_4 = 93\ \Omega$;
$R_i = 17\ \Omega$; $R_g = 90\ \Omega$; $E = 24$ V;
Odrditi napon na galvanometru U_{AB}, struju kroz galvanometar I_g te pad napona U_i na otporu R_i.

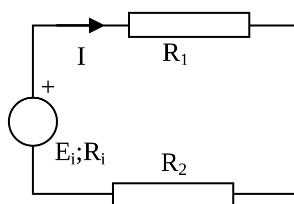
4.29.



Sl.4.29.

Za dato kolo prema slici 4.29, poznati su sledeći podaci:
$R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$; $R_4 = 17\ \Omega$;
$R_5 = 3\ \Omega$; $R_6 = 1\ \Omega$; $R_7 = 1\ \Omega$; $R_8 = 7\ \Omega$ i napon izvora $U = 25$ V.
Odrediti sve struje u granama datog kola.

4.30.

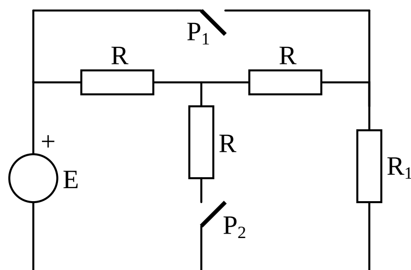


Sl.4.30.

Kada na polove generatora ems E_i i unutrašnje otpornosti R_i priključimo otpornike otpornosri R_1 i R_2 vezane na red, kao na sl.4.30, u tako formiranom kolu protiče struja I_1. Ako nakon toga na polove istog generatora priključimo ove otpornike u paralelnoj vezi, kroz otpornik R_1 protiče struja I_1 (kao u predhodnoj vezi), dok je napon na krajevima generatora tada jednak U. Odrediti ems E i njegovu unutrašnju otpornost R_i .

Brojni podaci: $U = 10$ V; $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$.

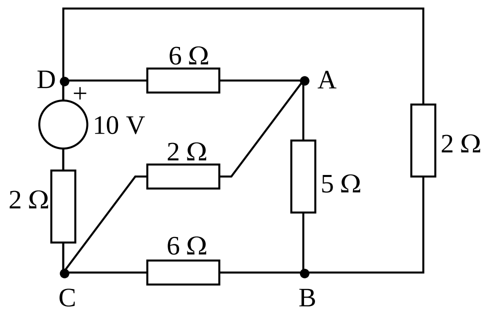
4.31.



Sl.4.31.

Za kolo prikazano na slici 4.31, odrediti takvu otpornost R_1 da pri zatvorenom prekidaču P_1 i otvorenom prekidaču P_2 u grani sa izvorom ems E bude isti intenzitet električne struje kao i pri otvorenom prekidaču P_1 i zatvorenom prekidaču P_2. Koliki je intenzitet te električne struje ?
Brojni podaci : $E = 12$ V; $R = 10\ \Omega$; a unutrašnji otpor izvora je zanemarljiv.

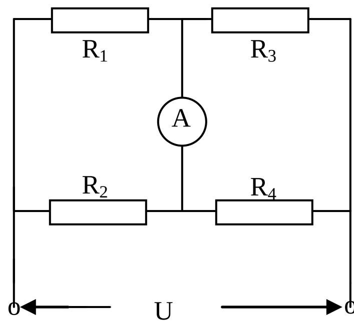
4.32.



Sl.4.32.

U kolu prikazanom na slici 4.32 odrediti napon između tačaka A i B i naznačiti polaritet napona. Svi potrebni podaci su dati na slici.

4.33.

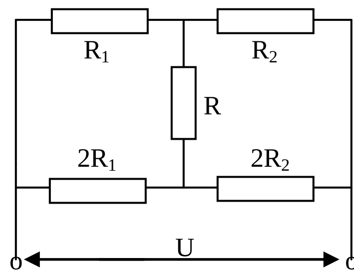


Sl.4.33.

U kolu prema slici 4.33. poynato je:
$R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_3 = 6\ \Omega$. U = 100 V

a) Odrediti otpor R_4 ako ampermetar pokazuje nulu.
b) Koliku jačinu struje će pokazati ampermetat, ako se zamene mesta ampermetra i izvora u datom kolu ?

4.34.



Sl.4.34.

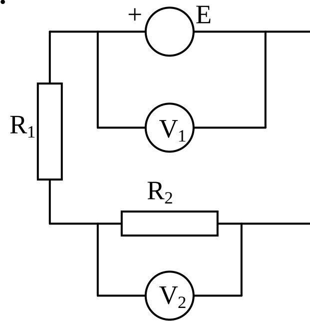
Izračunati jačina struje koja protiče kroz otpornik R_2, prema slici 4.34, ako je priključeni napon na kolu U = 10 V , a vrednost otpornika iznosi : $R_1 = 5\ \Omega$ i $R_2 = 20\ \Omega$

Rešenje prokomentarisati.

4.35. U kolu su uključene srebrna i aluminijumska žica jednakih dužina i prečnika. Koliki je odnos količina toplote koje se izdvajaju u tim žicama kada su žice povezane:
a) redno ; b) paralelno ?
Specifične otpornosti žica su : $\rho_{Ag} = 0{,}0147\ \Omega mm^2/m$; $\rho_{Al} = 0{,}0263\ \Omega mm^2/m$.

4.36. Strujno kolo sastavljeno je od akumulatora i otpornika otpora 10 Ω. Ako na red sa otporom uključimo voltmetar, on pokazuje istu vrednost kao kada ga uključimo paralelno otporu. Unutrašnji otpor voltmetra je 1 000 Ω. Odrediti unutrašnji otpor akumulatora.

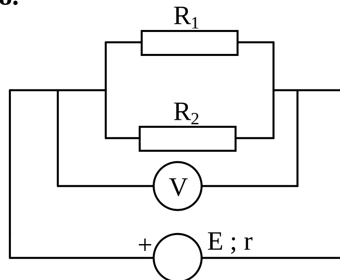
4.37.



Sl.4.37

Elektromotorna sila generatora je $E = 135$ V, a njegova unutrašnja otpornost 0,5 Ω. Kolike će vrednosti pokazivati idealni voltmetri V_1 i V_2 u kolu prikazanom na slici 4.37, ako su otpori $R_1 = 2\ \Omega$ i $R_2 = 20\ \Omega$?

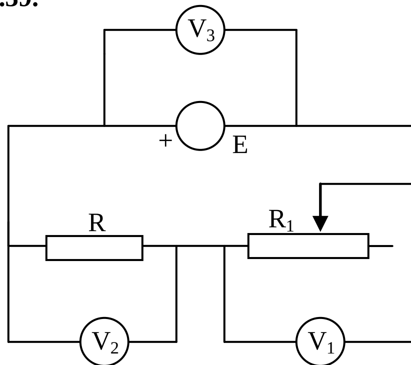
4.38.



Sl.4.38.

Dva jednaka otpornika po 4 Ω vezana su paralelno i priključena na izvor, pri čemu voltmetar pokazuje 6 V, Slika 4.38. Ako se isključi jedan otpornik, voltmetar pokazuje 8 V. Koliki su elektromotorna sila E i unutrašnji otpornik izvora r ?
Voltmetar je idealan.

4.39.



Sl.4.39.

Kako će se promeniti vrednosti koje pokazuju voltmetri V_1, V_2, i V_3, prema slici 4.39, ako se klizač koji klizi po kliznom otporniku R_1 pomeri ulevo ? Voltmetri su idealni.

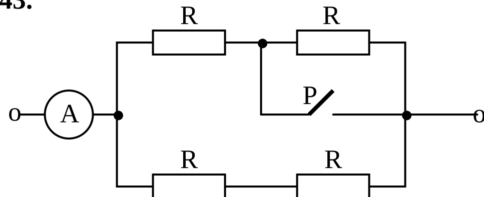
4.40. Baterija (izvor) daje struju $I_1 = 6$ A ako je kratko spojena. Ako redno sa njom vežemo otpor otpornosti od 2 Ω, jačina struje je $I_2 = 4$ A. Koliki su unutrašnji otpor i elektromotorna sila izvora ?

4.41. Dva otpornika, otpornosti $R_1 = 360\ \Omega$ i $R_2 = 240\ \Omega$, vezani su prvo paralelno a zatim redno na napon U. Naći u oba slučaja, na kon otporniku je veća snaga i koliko puta.

4.42. Električni bojler ima dva grejača. Kada je uključen jedan grejač voda proključa za 15 minuta, a kada se uključen drugi za 30 minuta. Koliko je vremena potrebno da voda proključa kada su uključena oba grejača i to:

a) redno vezana,
b) paralelno vezana ?

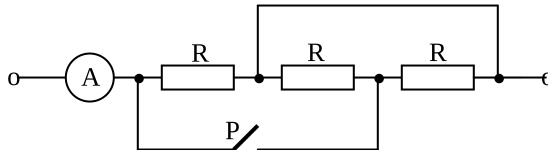
4.43.



Sl.4.43

Šta će pokazivati ampermetar, sl.4.43, posle zatvaranja prekidača P ako je pre zatvaranja pokazivao 9 A ?
Napon koji je doveden ovom kolu je konstantan

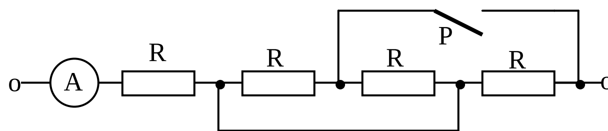
4.44.



Sl.4.44.

Pre zatvaranja prekidača P, prema sl.4.44, ampermetar je pokazivao 6A. Šta će pokazati ampermetar posle zatvaranja prekidača, ako je napon U konstantan za celo kolo.

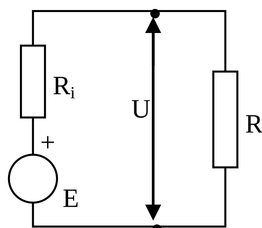
4.45.



Sl.4.45.

Do zatvaranja sklopke P, sl.4.45, ampermeter je merio 2 A. Koliku će jačinu struje izmeriti ampermetar nakon zatvaranja sklopke P, ako se ukupni napon kola ne menja ?

4.46.

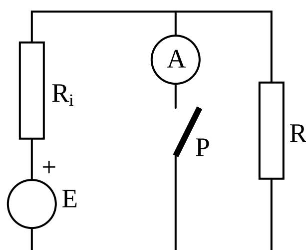


Sl.4.46.

Za kolo na slici 4.46, zraziti napon U preko parametara kola : E; R_1 i R.

4.47. Za predhodni zadatak, sl.49, izraziti pad napona na unutrašnjem R_i U_i, preko parametara: E; R_i i R.

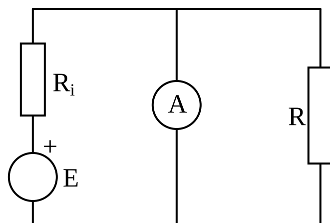
4.48.



Sl.4.48

Za kolo prema slici 4.48 poznato je:
E = 240 V; $R_i = 1\ \Omega$; $R = 50\ \Omega$.
Paralelno otporu R priključen je idealni ampermetar ($R_A = 0$)
Koju će vrednost pokazivati ampermetar (kada se uključi prekidač P) ?.

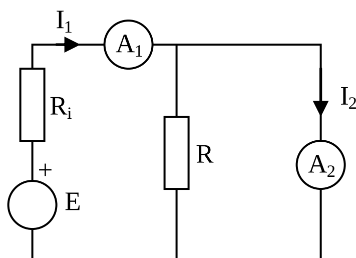
4.49.



Sl.4.49.

Koju vrednost struje pokazuje idealni ampermetar, prema slici 4.49, ako su dati sledeći parametri: E, R_i i R ?

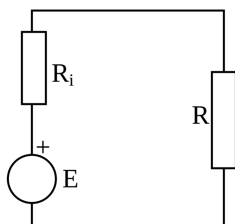
4.50.



Sl.4.50.

Dva idealna ampermetra priključena su u električno kolo prema slici 4.50. Koji je odnos njihovih pokazivanja ? Potrebni parametri su obeleženi na slici.

4.51.



Sl.4.51.

Preko parametara naponskog izvora (E i R_i) i otpora potrošača R, slika 4.51, napisati izraz za snagu P koja se troši na potrošaču čija je otpornost jednaka R.

4.52. Za predhodni zadarak napisati izraz za snagu gubitaka P_i koja se troši u samom izvoru (Džulovi gubici). Potrebni parametri su: E; R_i i R.

4.53. Zadani su parametri naponskog izvora, sl.53, (E; R_i) i otpor potrošača R. Preko navedenih parametara napisati izraz sa stepen korisnog dejstva uzvora.

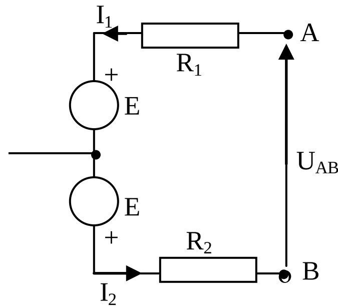
4.54. Koliki je stepen korisnog dejstva (iskorišćenja) kod naponskog generatora ako je unutrašnji otpor izvora R_i jednak otporu potrošača R ? Rešenje analizirati uz dokaz (odgovarajući izraz).

4.55. Na slici 53 su dati parametri naponskog izvora (E ; R_i) i otpor potrošača R. Kod kojeg odnosa veličina R_i i R će stepen korisnog dejstva biti maksimalan ($\eta = 1$) ?

4.56. Dva jednaka žičana otpora vezana su paralelno i priključena na izvor konstantnog napona. Jedan od otpora (nazovimo ga prvi) postavljen je na prozorskoj dasci u toploj sobi, a drugi van prozora - na zimi. Koji će od otpora imati veću snagu ? Rešenje proanalizirati.

4.57. Dva jednaka žičana otpora vezana su redno i priključena na izvor konstantnog napona. Jedan od otpora (nazovimo ga prvim) postavljen je na prozorskoj dasci u toploj sobi, a drugi van prozora – na zimi. Koji od otpora će imati veću snagu ? Rešenje prokomentarisati.

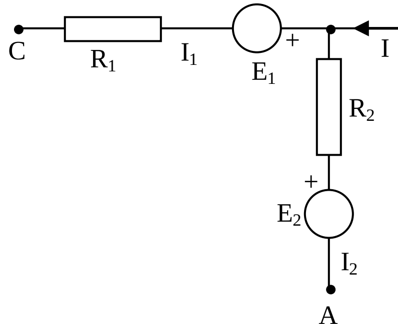
4.58.



Sl.4.58.

Na slici 4.58 poznato je: I_1 = 3 A; I_2 = 2,4 A; E_1 = 70 V; E_2 = 20 V; R_1 = 8 Ω; R_2 = 5 Ω. Koliki je napon U_{AB} ?

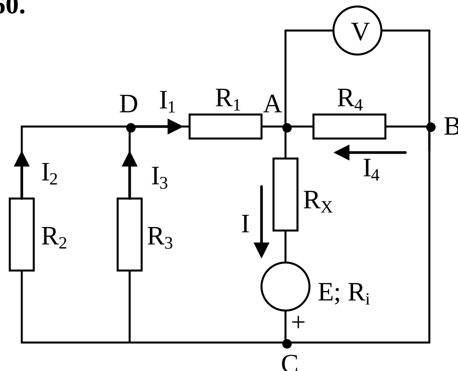
4.59.



Sl.4.59.

Na slici 4.59 prikazan je deo složenog kola. Ako je dato: E_1 = 100 V; E_2 = 130 V; I = 8 A; R_1 = 3 Ω; R_2 = 4 Ω; U_{CA} = 70 V, izračunati struje I_1 i I_2, koristeći jednačine koje predstavljaju Kirhofova pravila.

4.60.



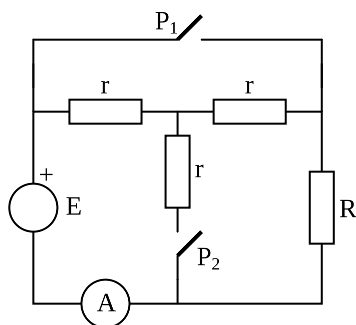
Sl.4.60.

Pet otpornika R_1, R_2, R_3, R_4; R_X i izvor E unutrašnje otpornosti R_i vezani su prema sl.4.60. Ako voltmetar pokazuje napon $U_V = U_4$ = 110 V izračunati:

a) napon između tačaka D i B U_{DB};
b) vrednost otpora R_X;
c) Šta će pokazati voltmetar ako pregori otpornik R_1?

Brojni podaci:
E = 127 V; R_i = 2 Ω; R_1 = 70 Ω; R_2 = 120 Ω; R_3 = 60 Ω; R_4 = 275 Ω.

4.61.

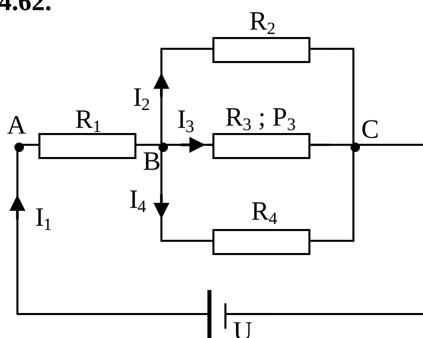


Sl.4.61.

Odrediti otpornost R tako da pri zatvorenom prekidaču P_1 i otvorenom prekidaču P_2 jačina struje kroz ampermetar ostane ista kao i kod otvorenog prekidača P_1 i zatvorenog prekidača P_2, prema slici 4.61.

Brojni podaci: E = 10 V; r = 1,73 Ω.

4.62.

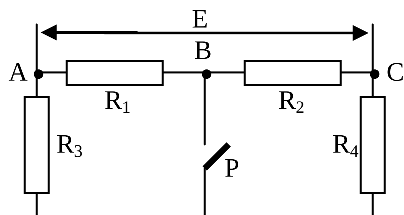


Sl.4.62

Na izvor napona U = 63 V priključeni su otpornici prema slici 4.62. Jačina struje u otporniku R_2 je $I_2 = 4$ A, snaga na otporniku R_3 je $P_3 = 36$ W, a $R_4 = 2\ \Omega$. Ukuona snaga kola je P = 945 W. Navedeni podaci odgovaraju u neposrednom uključivanju kola na izvor, tj. Pri temperaturi $\theta_o = 20$ °C, na kojoj je $R_1 = R_{1o} = 3\ \Omega$.
Posle izvesnog vremena R_1 se zagreje na temperaturu $\theta = 106$ °C ($\alpha = 0{,}0039$ 1/°C). Ostali otpornici su od materijala čija otpornost ne zavisi od temperature. Odrediti:

a) I_1; I_3; I_4 i U_{BC} na početku, pri temperaturi $\theta_o = 20$ °C;
b) R_3 i R_2;
c) I_1'; I_2'; I_4'; P_3' i u kupnu snagu P na temperaturi $\theta = 106$ °C

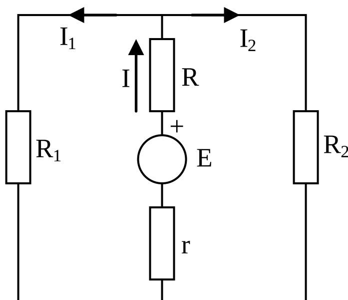
4.63.



Sl.4.63.

Na kolo prema slici 4.63. dovedena je ems koja je konstantna (E = konst.). Kako će se promeniti naponi U_{AB} i U_{BC} ako se prekidač P zatvori ?
Brojni podaci:
E = 72 V; $R_1 = 2{,}5$ kΩ; $R_2 = 1{,}5$ kΩ; $R_3 = 1{,}5$ kΩ i $R_4 = 1{,}5$ kΩ.

4.64.

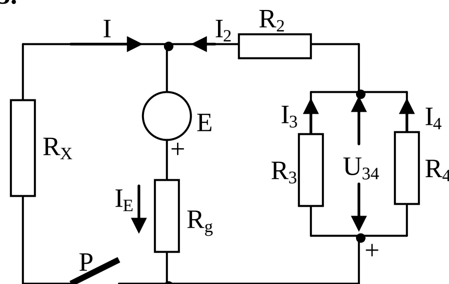


Sl.4.64

U kolu na slici 4.64, snaga na otporniku R_2 iznosi P_2 . Kolika je ems E i struje I_1, I_2 i I_3?

Brojni podaci:
E = 200 W; $R_1 = 23\ \Omega$; $R_2 = 4{,}5\ \Omega$; R = 8 Ω; r = 1 Ω.

4.65.

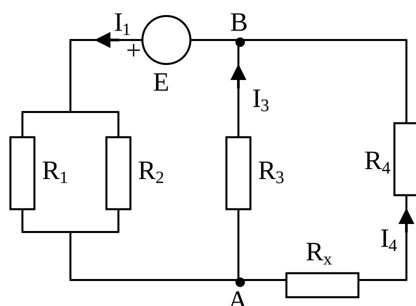


Sl.4.65.

Za kolo sa slike 4.65 poznate su sledeće vrednosti: $R_g = 0{,}8\ \Omega$; $I = 0{,}5$ A; $R_2 = 24\ \Omega$; $R_3 = 10\ \Omega$; $R_4 = 15\ \Omega$ i snaga na otporu R_3 $P_3 = 14{,}4$ W.
Odrediti:

a) otpornost R_x i ems izvora E;
b) snagu otpornika R_3, P_3 kada se isključi prekidač P.

4.66.



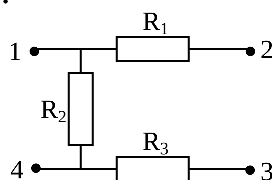
Sl.4.66.

Za dato kolo prikazano na slici 4.66 odrediti R_x i ems E, ako je:
$R_1 = R_2 = 5$ KΩ; $R_3 = 1{,}5$ KΩ; $R_4 = 2$ KΩ;
$I_1 = 2{,}4$ mA; $I_3 = 1{,}6$ mA.

4.67. Dva žičana grejača od nihroma prečnika $d = 0{,}5$ mm treba tako projektovati da, vezani pojedinačno i paralelno i priključeni na napon $U = 220$ V, mogu da daju snage: 500 W, 1000 W i 1500 W.
Radna temperatura grejača u sva tri slučaja je približno ista i iznosi 900 °C. Kolike su potrebne dužine žica za oba grejača ? ($\rho_{nihroma} = 100 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m; $\alpha_{nihroma} = 0{,}0004$ 1/°C na temperaturi 0°C)

4.68. Odrediti potrebne dužine žice od hromonikla koje daju, pri naponu $U = 220$ V, snage grejača iznose: 1 500 W; 1 000 W i 500 W. Prečnik žice je $d = 0{,}6$ mm, a radna temperatura 850 °C. Koje sve ukupne snage možemo dobiti raznim vezivanjem (rednim, paralelnim, mešovitim) ova tri grejača smatrajući da se otpornost grejača pri tome ne menja sa promenom temperature i da se cela veza priključuje na napon $U = 220$ V.
($\rho_{hromonikal} = 137 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m ; $\alpha_{hromonikal} = 2 \cdot 10^{-7}$ 1/°C $\cong 0$)

4.69.

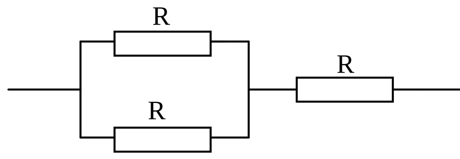


Sl.4.69.

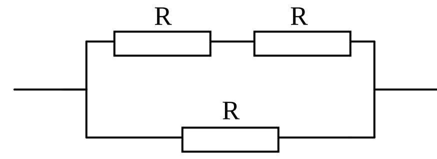
Ako su nominalne snage, pri naponu $U = 220$ V za grejače prema slici 4.69. jednake: $P_1 = P_3 = 100$ W, a $P_2 = 500$ W, koje snage se dobiju ako se na izvor priključe sledeći priključci:
a) 2 i 3; b) 1 i 3; c) 1 i 4; d) 3 i 4; e) 1 i 4 i istovremeno kratko spoje 2 i 4; f)1 i 4 i istovremeno prespoje 1 i 3, i 2 i 4 ?
Smatrati da je, približno, temperatura grejača u svim slučajevima ista.

(Napomena: Ovakve veze grejača koriste se kod električnih štednjaka.)

4.70.



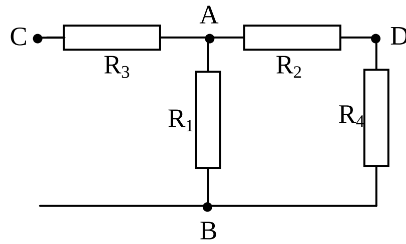
Sl.4.70 a)



Sl.4.70 b)

Maksimalna snaga svakog otpornika na slikama 4.70 a) i b) iznosi 48 W.
Kolike se maksimalne snage (ukupne veze) mogu ostvariti pomoću navedenih veza ?

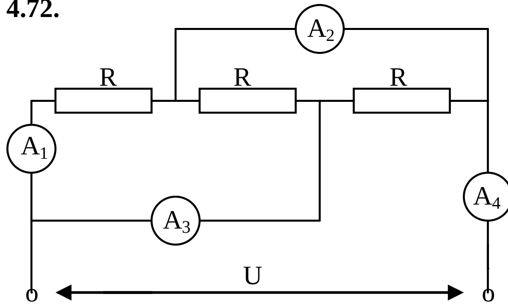
4.71.



Sl.4.71.

Izračunati vrednost otpornika R_1 na slici 4.71, ako je: $U_{CB} = 12$ V; $U_{CD} = 10$ V; $R_2 = 4\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$; $R_4 = 2\ \Omega$.

4.72.



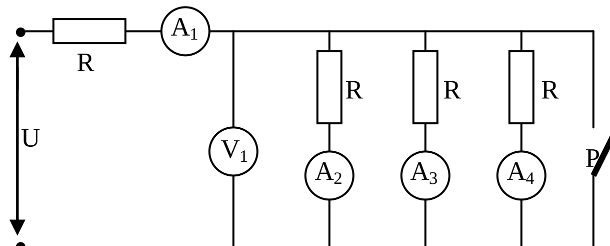
Sl.4.72.

U kolu na slici 4.72, napon izvora iznosi $U = 150$ V.
Kolika su pokazivanja pojedinačnih ampermetara ako je otpor $R = 30\ \Omega$?

4.73. Četiri otpornika istih otpornosti $R = 10\ \Omega$ vezani su prema slici 4.73. i priključeni na napon $U = 150$ V. Odrediti pokazivanje idealnog voltmetra V_1 i idealnih ampermetara A_1, A_2, A_3 i A_4 kada je prekidač P:

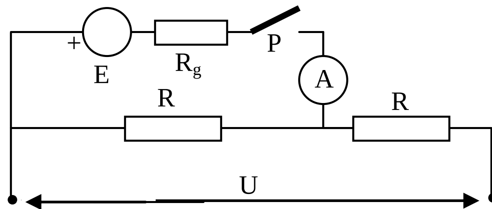
a) zatvoren,

b) otvoren



Sl.4.73.

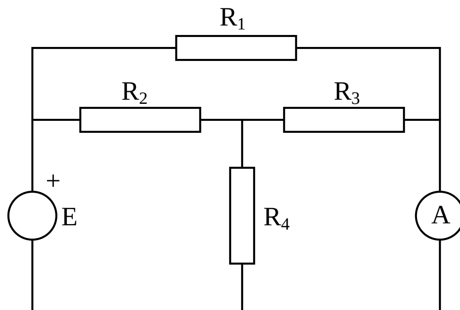
4.74.



Sl.4.74.

Za koju vrednost ems E u kolu na sl. 4.74. pri zatvorenom prekidaču P ne dolazi do skretanja na ampermetru, ako je napon U = 50 V ?

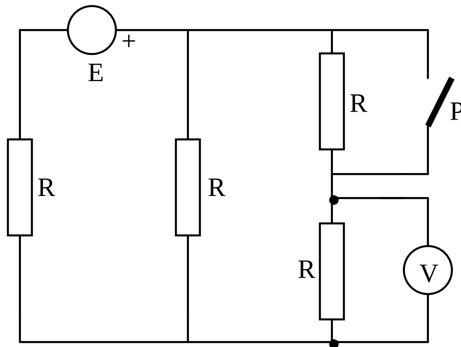
4.75.



Sl.4.75.

Odrediti vrednost koju pokazuje ampermetar zanemarljive unutrašnje otpornosti u kolu na slici 4.75, kod kojeg je:
E = 7,5 V; R_1 = 15 Ω; $R_2 = R_3 = R_4$ = 10 Ω.

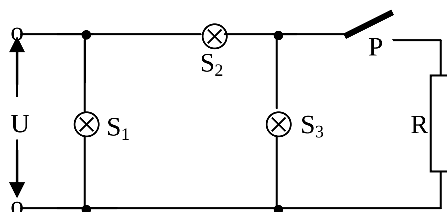
4.76*.



Sl.4.76.

Pri otvorenom prekidaču P u kolu na sl. 4.76. voltmetar pokazuje napon U_1 = 30 V. Kolika je vrednost napona U_2, koju će izmeriti voltmetar, kada se zatvori prekidač P ?

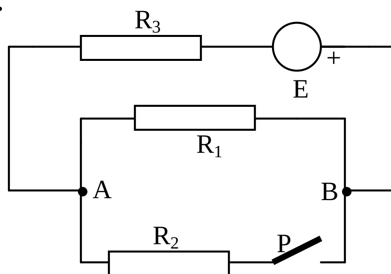
4.77.



Sl.4.77.

Kada se u kolu na slici 4.77 priključenom na konstantan napon U, zatvori prekidač P, kako će nakon toga svetleti sijalice S_1, S_2 i S_3 ? Rešenje prokomentarisati (koja će sijalica svetleti jače a koja slabije i zašto?)

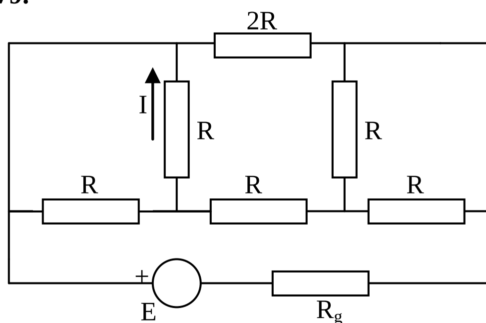
4.78.



Sl.4.78.

Na delu kola AB prikazanog na slici 4.78. snaga koja se pretvara u toplotu ista je pri otvorenom i pri zatvorenom prekidaču. Ako je $R_1 = R_2 = R = 10\ \Omega$, naći otpornost R_3.

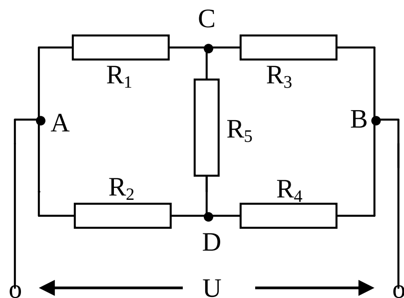
4.79.



Sl.4.79.

Za kolo na slici 4.79. poznato je: $R = 20\ \Omega$; $I = -0{,}05$ A; $\eta = 80$ %. Odrediti ems E i unutrašnji otpor izvora R_g.

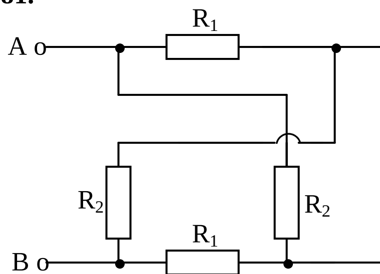
4.80.



Sl.4.80.

Pet otpornika čija je otpornost na temperaturi θ_1 poznata vezani su kao na sl. 4.80. Između tačaka A i B deluje stalni napon U. Otpornosti R_1, R_2; R_3 i R_5 se ne menjaju sa temperaturom, a temperaturni koeficijent materijala od kojeg je načinjen R_4 je α. Na temperaturi θ_1 tačke C i D nisu na istom potencijalu. Odrediti temperaturu θ_2 na kojoj će tačke C i D biti na istom potencijalu.
Na temperaturi $\theta_1 = 20$ °C je: $R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$; $R_3 = 48\ \Omega$; $R_4 = 20\ \Omega$ i $\alpha = 0{,}004$ 1/°C.

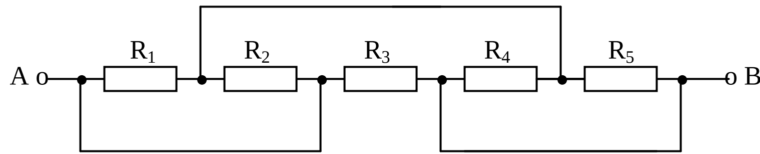
4.81.



Sl.4.81.

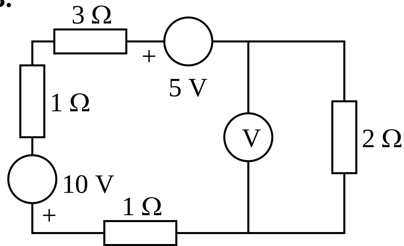
Odrediti ekvivalentni otpor između tačaka A i B, prema slici 4.81, ako je $R_1 = 800\ \Omega$ a $R_2 = 200\ \Omega$.

4.82. Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B, prema slici 4.82, ako je: R_1 = 10 Ω; R_2 = 20 Ω; R_3 = 30 Ω; R_4 = 40 Ω i R_5 = 50 Ω.



Sl.4.82.

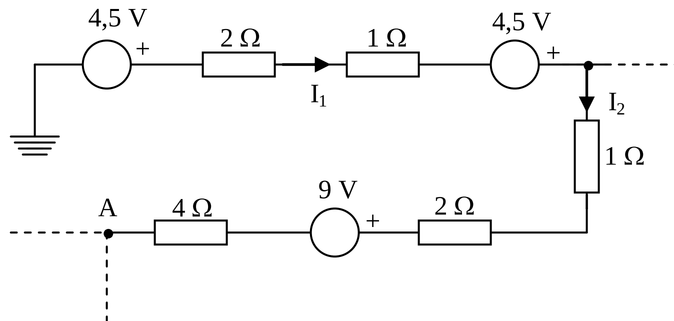
4.83.



Koliki napon meri idealni voltmetar, za kolo prema slici 4.83.

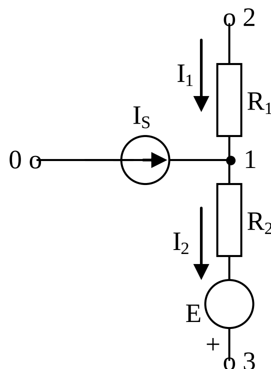
Sl.4.83.

4.84. Odrediti potencijal tačke A, za kolo prema slici 4.84, ako je I_1 = 2 A i I_2 = – 5 A.



Sl.4.84.

4.85.



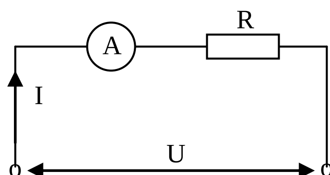
Odrediti napon U_{10} na krajevima strujnog generatora u kolu na slici 4.85.

Brojni podaci:
R_1 = 1 kΩ; R_2 = 2 kΩ; E = 6 V; I_S = 5 mA
Potencijali tačaka 2 i 3 u odnosu na tačku 0 iznose:
V_2 = – 7 V i V_3 = – 17 V.

Sl.4.85.

5. OSNOVNI POJMOVI IZ ELEKTRIČNIH MERENJA

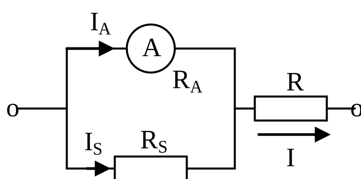
5.1. MERENJE ELEKTRIČNE STRUJE (AMPERMETAR)



Sl.6.

Električna struja se meri **ampermetrom**. On se veže redno sa potrošačem kojem merimo jačinu struje, kao naslici.6. Kako u kolu prilikom vezivanja ampermetra treba da ostane nepromenjeno stanje (nepromenjen otpor ⇒ nepromenjena struja),otpor ampermetra je vrlo mali ($R_A << R$).

PROŠIRENJE MERNOG DOMAŠAJA AMPERMETRA



Sl.7.

Da bi ampermeter mogao meriti veću struju od dozvoljene (I_A) paralelno mu se doda otpornik (R_S), kroz koji će proticati deo struje (I_S), kao na slici 7. Za ovaj deo struje je i povećan merni domašaj ampermetra, jer je ukupna struja (koja je predmet merenja) jednaka zbiru ove dve. Proširenje mernog domašaja se još naziva **šantiranje**, a dodati paralelni otpornik naziva se **otpor šanta.**

Dakle,

$$I = I_A + I_S = I_A + U_S / R_S \; ; \; U_S = I \cdot [R_A \cdot R_S / (R_A + R_S)] \; \Rightarrow \; I = I_A \cdot (R_A + R_S) / R_S$$

$$\boxed{\mathbf{I = \frac{R_A + R_S}{R_S} I_A}}$$

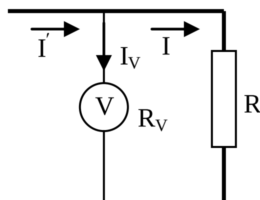
$$\mathbf{m = (R_A + R_S) / R_S \;\; \Rightarrow \;\; R_S = R_A / (m - 1) \; ; \;\; m = \frac{I}{I_A}} \; .$$

$$\boxed{\mathbf{I = m\, I_A}}$$

gde je:

R_A..... otpor ampermetra,
R_S...... otpor šanta (otoke),
I_A....... struja koja prolazi kroz ampermetar,
I......... ukupna jačina struje
m...... konstanta koja govori za koliko puta je proširen merni domašaj ampermetra ($m = I / I_A$)

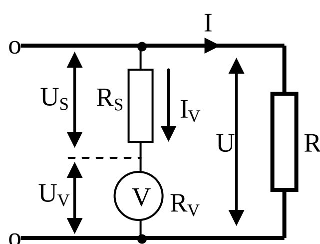
5.2. MERENJE ELEKTRIČNOG NAPONA (VOLTMETAR)



Sl.8.

Napon se meri voltmetrom, koji se veže paralelno sa potrošačem čiji napon želimo da izmerimo(sl.8). Od voltmetra se traži da mu je unutrašnji otpornik što veći ($R_V >> R$), kako se u kolu ne bi menjala jačina struje prilikom uključenja i isključenja voltmetra, odnosno da je ta promena zanemarljiva.Voltmetar meri napon na svojim krajevima, no zbog paralelne veze to je i napon potrošača .

PROŠIRENJE MERNOG DOMAŠAJA VOLTMETRA



Sl.9.

Voltmetar može meriti veći napon od dozvoljenog , ako ispred njega vežemo jedan predotpornik (sl.9) na kojem će se javiti određeni pad napona. Za ovaj pad napona povećava se ukupni napon, a samim tim voltmetru je za taj iznos povećan merni domašaj.

$U = U_P + U_V \Rightarrow U_P = U - U_V \;/:\, I_V \Rightarrow U / I_V = (U - U_V) / I_V \Rightarrow$
$R_P = U / I_V - R_V = R_V (U / I_V R_V - 1) \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{R_P = \frac{R_V}{U_V}\left(U - U_V\right)}} \quad ; \quad \mathbf{m = \frac{U}{U_V}} \; ; \quad \mathbf{U = m\, U_V}$$

gde je **m** konstanta koja govori za koliko puta se proširuje merni domašaj voltmetra.

Dalje sledi:

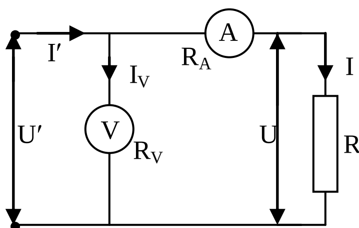
$R_P = R_V U / U_V - R_V = R_V \cdot m - R_V \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{R_P = R_V(m-1)}}$$

gde je:
- R_p .... otpornost predotpornika
- R_V .... otpornost voltmetra.
- U..........ukupni napon koji je predmet merenja (merni domašaj)
- U_V .... napon na voltmetru
- m.......... konstanta proširenja mernog domašaja.
- R_V / U_V..... karakteristika voltmetra.

5.3. MERENJE ELEKTRIČNOG OTPORA

UI METODA



Sl.10. a)

Za sl.79. a) sledi:

$R' = U' / I$; $R = U / I = (U' - U_A)\, I \Rightarrow$

$R = R' - R_A$

Apsolutna greška (Ag) iznosi :

$A_g = R' - R = R_A$,

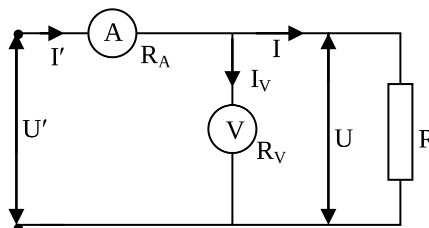
a relativna greška (Rg):

$R_g = Ag / R = R_A / R$

Relativna greška u % iznosi :

$$R_g = \frac{R_A}{R} \cdot 100[\%]$$

IU METODA



Sl.10. b)

Za sliku 79. b) sledi:

$R' = U / I'$; $R = U / I = U / (I' - I_V) \Rightarrow$

$$R = \frac{U}{I' - \dfrac{U}{R_V}}$$

$Ag = U / (I + I_V) - U / I$; $I_V / I = R / R_V \Rightarrow$

$$A_g = -\frac{UR}{I(R_V + R)} = -\frac{R^2}{R_V + R};$$

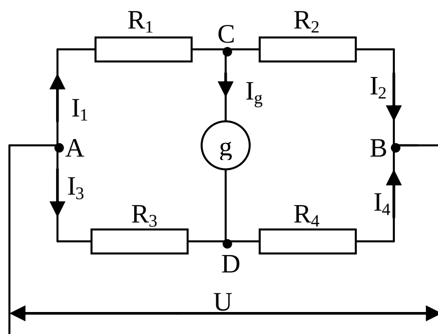
$$R_g = -\frac{R}{R_V + R} \cdot 100[\%]$$

gde je: R..... tačna vrednost otpornika,

R′....izmerana vrednost otpornika (količnik očitanja sa instrumenata).

Slika a se koristi kod merenja vrlo velikih otpora ($R >> R_A$), kako bi se otpor ampermetra mogao zanemariti.
Slika b se koristi kod vrlo malih otpornika ($R_V >> R$), kako bi bilo $I_V \cong 0$ ($I_V << I$).

VITSTONOV MOST



Sl.11.

Ako kroz galvanometar g ne protiče struja (sl. 11) sledi da su tačke C i D na istom potencijalu ($V_C = V_D$)$\Rightarrow$

$I_1 = I_2$; $I_3 = I_4$; $U_{AC} = U_{AD}$; $U_{BC} = U_{BD} \Rightarrow$

$I_1 R_1 = I_3 R_3$; $I_2 R_2 = I_4 R_4$

$I_1 R_1 / I_2 R_2 = I_3 R_3 / I_4 R_4 \Rightarrow$

$$\mathbf{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}}$$ ..... uslov ravnoteže mosta

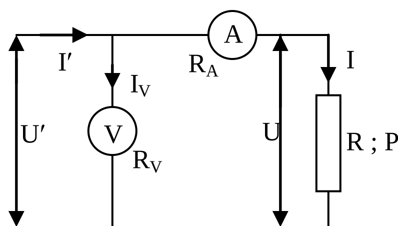
Uslov ravnoteže mosta se može predstaviti i u sledećem obliku:

$$\mathbf{R_1\,R_4 = R_2\,R_3}$$

Kada je ispunjen uslov ravnoteže mosta, to znači da kroz dijagonalu CD ne protiče nikakva struja. Vitstonov most u praksi se koristi kod najpreciznijih merenja električnih otpornosti. Da bi se to moglo realizovati na raspolaganju treba imati tri poznate otpornosti, galvanometar i izvor . Ti otpori su smešteni u jednu kutiju tzv. kutija otpora , kako bi merenje bilo pojednostavljeno. Jedan od navedena tri otpornika mora biti i promenljiv, kako bi se mogao most dovesti u ravnotežu. Ova metoda merenja je vrlo precizna zbog upotrebe galvanometra (vrlo osetljiv instrument).

5.5. MERENJE ELEKTRIČNE SNAGE

UI METODA



Sl.12.a)

Snaga izvora, slika 12. a, je:

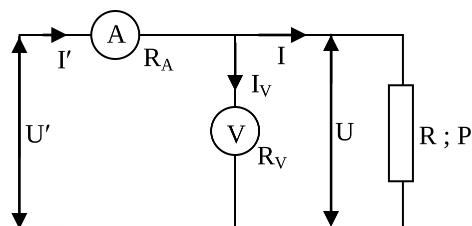
$P' = U' \cdot I' = U' \,(I_V + I\,) \;\Rightarrow$

$$\mathbf{P' = U' \cdot I + U'^2/R_V = U' \cdot I + P_{JV}}$$

Snaga potrošača: $P = U\,I = (\,U' - U_A\,) \cdot I \;\Rightarrow$

$$\mathbf{P = U' \cdot I - I^2 R_A = U' \cdot I - P_{JA}}$$

IU METODA



Sl.12.b)

Snaga izvora,slika 12. b, je :

$P = U' \cdot I' = (\,U + U_A\,)\, I' \;\Rightarrow$

$$\mathbf{P' = U \cdot I' + I'^2 \cdot R_A = U \cdot I' + P_{JA}}$$

Snaga potrošača : $P = U\,I = U\,(\,I - I_V\,) \;\Rightarrow$

$$\mathbf{P = U \cdot I' - \frac{U^2}{R_V} = U \cdot I' - P_{JV}}$$

gde je:

P'.... snaga izvora ;

P..... snaga potrošača ;

P_{JV}, odnosno P_{JA}...... gubici (Džulova toplota) na voltmetru, odnosno ampermetru

U' , I' ...... napon, odnosno struja izvora ; U; I .... napon, odnosno struja potrošača.

ZAKLJUČAK!

Snaga izvora (P′) je veća od proizvoda napona i struje, koje očitamo sa instrumenata, za Džulove gubitke na onom instrumentu koji je vezan do izvora.

Snaga potrošača (P) je manja od proizvoda napona i struje, koje očitamo sa instrumenata, za Džulove gubitke na onom instrumentu koji je vezan do potrošača.

Ako se Džulovi gubici na instrumentima ne uzmu kao korekcija merenju, sledi da će navedeno merenje praviti apsolutnu grešku, koja je jednaka ovim gubicima (toplota).

Snaga se još meri i vatmetrom (direktna metoda), a kako je vatmetar kombinacija naponskog i strujnog kalema, sledi da su gubici na ovim kalemovima identični gubicima na ampermetru, odnosno voltmetru.

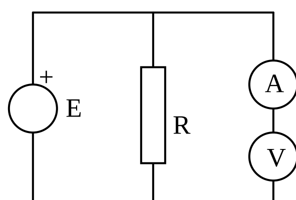
Z A D A C I :

5.1. Dat je voltmetar za merenje napona sa mernim opsegom (domašajem) 50 V i unutrašnjim otporom R_V = 800 Ω. Koliki otpor treba redno priključiti na voltmetar da bi on mogao meriti napon do 600 V ?

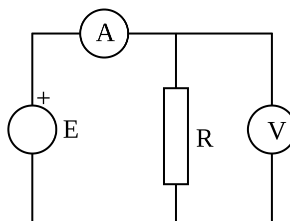
5.2. Ampermetar sa mernim opsegom do 1 A ima unutrašnju otpornost R_A = 0,5 Ω. Odrediti otpor šanta da bi se ampermetrom moglo izmeriti struja jačine do 5 A.

5.3. Za merenje napona gradske mteže (U = 220 V) upotrebljena su dva voltmetra unutrašnjih otpora R_{V1} = 28 KΩ i R_{V2} = 16 KΩ, svaki predviđen za opseg od 150 V. Koliki će napon pokazivati svaki od navedenih voltmetara ?

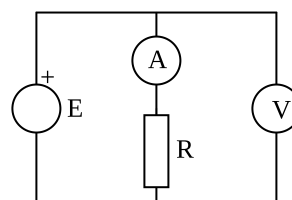
5.4. U kolu na slici 5.4 (a,b i c) vezani su isti ampermetri, voltmetri i otpori R. Šta će pokazati instrumenti, ako je E = 20 V (zanemarljiv unutrašnji otpor), R = 500 Ω, R_A = 0,2 Ω , R_V = 2 000 Ω. Prokomentarisati date veze (u odnosu na ispravnost, kao i u odnosu na unutrašnju otpornost.



Sl.5.4. a)



Sl.5.4. b)

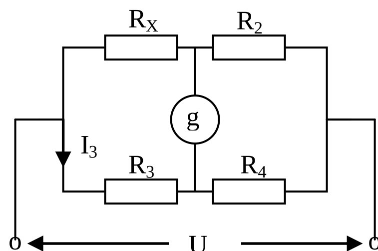


Sl.5.4. c)

5.5. Voltmetar čija je unutrašnja otpornost R_V = 20 Ω, sa strujom I_V = 5 mA, treba priključiti na red otpornost takve vrednosti da on može meriti napon do 250 V. Kolika je vrednost date otpornosti ?

5.6. Opseg merenja jednog ampermetra čija je otpornost R_A = 10 Ω iznosi 10 mA. Upotrebom šanta treba povećati opseg merenja na 3 A. Kolika je otpornost datog šanta ?

5.7.



Sl.5.7.

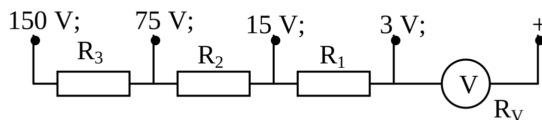
Ako je Vitstonov most, slika 5.7, u ravnoteži, odrediti otpornost R_X

Brojni podaci:
U = 2 V; I_3 = 2/35 A; R_2 = 30 Ω; R_4 = 15 Ω

5.8. Kolo čine izvor čiji je napon U′, potrošač otpornosti R = 10 Ω, a na raspolaganju su ampermetar i voltmetar. Povezati instrumente u kolo, pomoću kojih treba izračunati otpornost R (obe varijante). Kolika će biti apsolutna i relativna greška, ako je otpornost voltmetra R_V = 40 KΩ, a ampermetra R_A = 0,5 Ω ?

5.9. Kolika će biti snaga koju daje izvor P′, a kolika je snaga koja se razvija na potrošaču P čija je otpornosti R u predhodnom primeru ?Kolika je i šta predstavlja razlika navedenih snaga ? Navedenu razliku snaga obrazložiti.

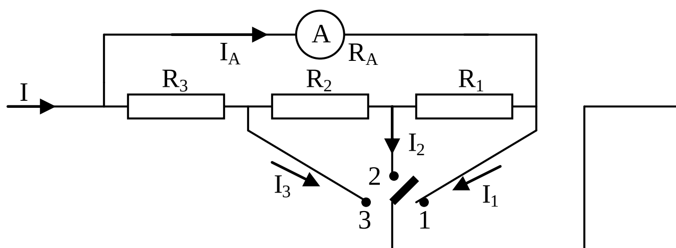
5.10. Voltmetar je predviđen za merenje napona od 3 V i ima unutrašnju otpornost R_V = 400 Ω. Naći otpornosti otpornika, prema sl.5.10, koji trebaju da omoguće merni opseg od 15, 75, i 150 V?



Sl.5.10.

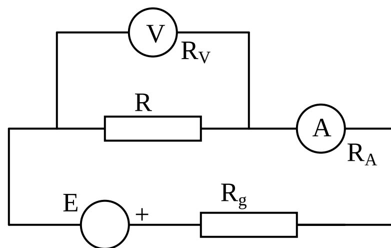
5.11. Ampermetar ima unutrašnju otpornost R_A = 10 Ω i opseg merenja do 1 A. Izračunati vrednost otpornika koji treba vezati paralelno ampermetru (šant), da bi on mogao meriti jačinu struje do 20 A.

5.12. Na slici 5.12. je prikazana šema miliampermetra sa sledećim mernim opsezima: I_1 = 10 mA; I_2 = 30 mA; I_3 = 100 mA. Unutrašnja otpornost ampermetra je R_A = 40 Ω, a kroz njega protiče struja I_A = 2 mA. Izračunati otpornosti šantova R_1, R_2 i R_3 pomoću kojih se postiže željeni merni opseg. Obrazložiti redosled položaja 1, 2 i 3. Da li je taj redosled mogao biti drugačiji ?

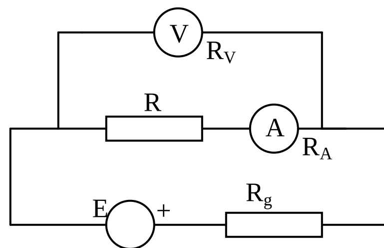


Sl.5.12.

5.13. Šta pokazuju instrumenti , prema slici 5.13. a) i b), ako je poznato:
R_A = 20 mΩ; R_V = 10 KΩ; E = 2 V; R_g = 10 mΩ; R = 5 Ω. Kolika će biti relativna greška, za obe varijante ? Obrazložiti primenu navedenih metoda (za koje otpore se koja metoda primenjuje ?).

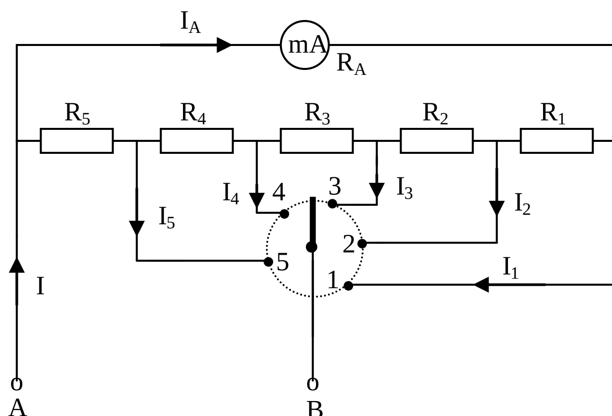


Sl.5.13. a)

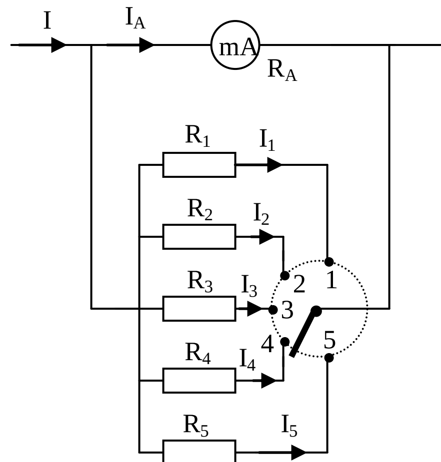


Sl.5.13. b)

5.14. Ampermetru čiji je merni opseg 3 mA,slika 5.14 a) i b), unutrašnjeg otpora R_A = 100 Ω proširiti opseg tako da on može meriti struju u pet mernih opsega, i to: I_1 = 15 mA; I_2 = 60 mA; I_3 = 150 mA; I_4 = 600 mA i I_5 = 3 A. Koliki su otpori šantova u obe varijente (a i b), i koja je varijanta praktičnija ? Dati objašnjenje.

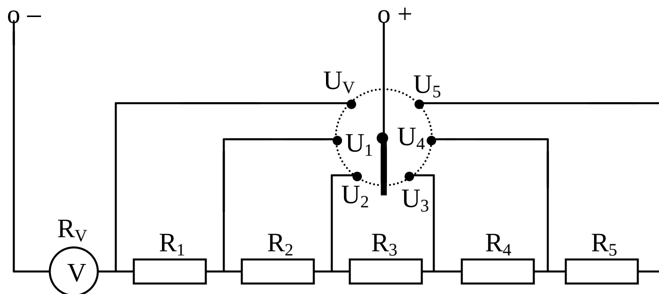


Sl.14. a)

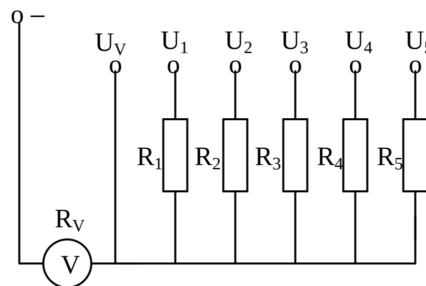


Sl.14. b)

5.15. Proširiti merni opseg voltmetru, koji ima merni napon U_V = 500 mV i unutrašnji otpor R_V = 2 kΩ, tako da on ima pet merni opsega, i to: U_1 = 5 V; U_2 = 25 V; U_3 = 100 V; U_4 = 250 V i U_5 = 500 V. Koliki će biti otpornici R_1, R_2, R_3, R_4 i R_5 u obe varijante (slika 5.15. a i b) ?

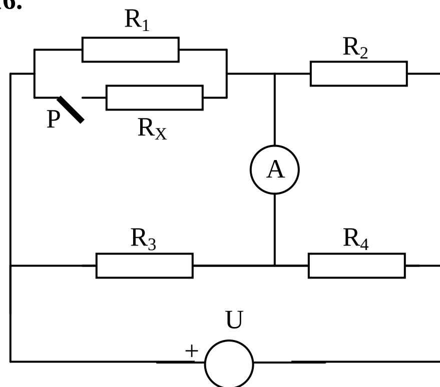


Sl.5.15. a)



Sl.5.15. b)

5.16.



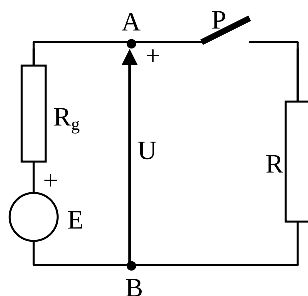
Sl.5.16.

Naći vrednost struje koju će pokazivati ampermetar na slici 5.16, ako je:
U = 48 V; $R_1 = R_4$ = 4 Ω; $R_2 = R_3$ = 2 Ω.
Unutrašnji otpor ampermetra zanemariti.

Kolika će biti otpornost R_X, ako kod uključenja prekidača P most bude u ravnoteži (struja u ampermetru bude jednaka nuli) ?

6. G E N E R A T O R I

6.1. NAPONSKI GENERATORI



Sl.13.

Parametri naponskog generatora (sl.13) su : elektromotorna sila **E,** unutrašnji otpor generatora $\mathbf{R_g}$ i napon na njegovim krajevima **U** (između tačaka A i B). Uključenjem potrošača (prekidača P) u kolu će proticati električna struja I, koja iznosi:

$I = E / (R + R_g) \Rightarrow E = I (R + R_g)$

$E = I R + I R_g = U + I R_g \Rightarrow$ $\mathbf{U = E - I R_g}$

Ako je $\mathbf{R_g << R} \Rightarrow$ $\mathbf{E \cong I R = U.}$

U ovom slučaju napon na krajevima generatora ne zavisi od vrednosti otpora potrošača, kao ni od opterećenja (struje I). Da bi napon na krajevima generatora bio konstantan otpor generatora treba da je zanemarljiv u odnosu na otpor potrošača.

Dakle, za $\mathbf{R >> R_g}$ napon je konstantan, i ovakvi generatori se nazivaju **naponski generatori**.

Režimi rada naponskog generatora:

1. neopterećen generator (prazan hod) [$E = U$]
2. nominalno opterećen generator [$U = E - I R_g$]
3. kratak spoj [$E = I_k R_g \Rightarrow I_k = E / R_g$]

Stepen korisnosti [η] :

$$\eta = \frac{P}{P'}$$

; gde je: P.. snaga potrošača ; P′..... snaga generatora.

Stepen korisnosti se kreće od 0 do 1 ($0 < \eta < 1$), u procentima od 0 do 100 ($0 < \eta$ 100%).

$$\eta = \frac{P}{P'} = \frac{UI}{EI} = \frac{U}{E} = \frac{IR}{I\left(R + R_g\right)} = \frac{R}{R + R_g}$$

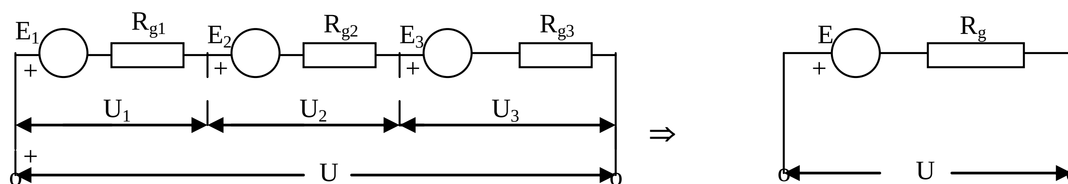
Maksimalna korisna snaga prijemnika ($\mathbf{P_m}$) se ostvari kada je otpor prijemnika izjednačen sa otporom generatora, tj. kada je

$$\mathbf{R_g = R}$$

Mana ovog režima rada je stepen korisnosti koji iznosi : $\eta = 0{,}5$.
To znači da 50% snage se koristi, dok preostalih 50% se utroši u samom generatoru (na njegovom unutrašnjem otporu u vidu toplote). Kod generatora velikih snaga (velika grejanja) ovaj režim rada nije dozvoljen (pregoreti će), dok kod manjih generatora (elektronika) veštački se stvara ovaj režim, jer su tu snage nekoliko mW, dakle generatori rade bezbedno.

VEZIVANJE NAPONSKIH GENERATORA

Redna veza



Sl.14.

$U = U_1 + U_2 + U_3 = (E_1 – I\ R_{g1}) + (E_2 – I\ R_{g2}) + (E_3 – I\ R_{g3}) = (E_1 + E_2 + E_3) – I (R_{g1} + R_{g2} + R_{g3})\Rightarrow$

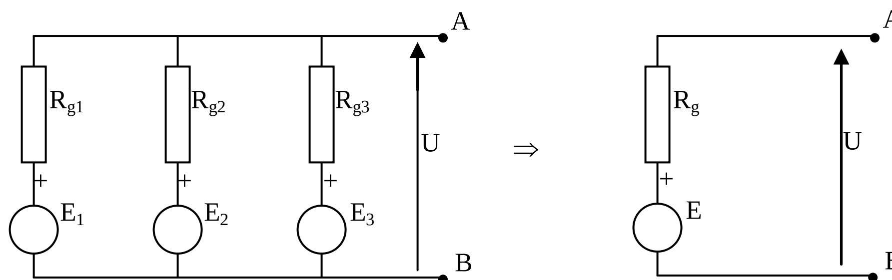
$\mathbf{U = E – I\ R_g}$; gde je: $\mathbf{E = E_1 + E_2 + \cdot\cdot + E_n}$, a $\mathbf{R_g = R_{g1} + R_{g2} + \cdots + R_{gn}}$

Ako izraz: $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ pomnožimo sa strujom $I \Rightarrow U\ I = U_1\ I + U_2\ I + \cdots + U_n\ I \Rightarrow$

$$\mathbf{P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n}$$

Ukupna snaga potrošača, kod redne veze (sl.14), jednaka je zbiru pojedinačnih snaga generatora.

Paralelna veza



Sl.15.

Ako su generatori istih parametara ($E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$ i $R_{g1} = R_{g2} = \cdots = R_{gn} = R_g$) $\Rightarrow$ $\mathbf{R_{ge} = R_g /n}$,
gde je **n** broj generatora. Ukupni napon jednak je pojedinačnim, tj. $\mathbf{U = U_1 = U_2 = \cdots = U_n = E – R_{ge}\cdot I}$

Ukupna struja jednaka je zbiru pojedinačnih (sl.15)**:** $\mathbf{I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = E / (R_{ge} + R)}$, gde je:

R....... otpor potrošača

Kako je najčešće $E = E_1 = E_2 = \cdots = E_n$, odnosno $R_{g1} = R_{g2} = \cdots = R_{gn}$, pa sledi:

$1/ R_{ge} = 1/ R_{g1} + 1/R_{g2} + \cdots + 1/R_{gn} \quad \Rightarrow \quad G_e = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$

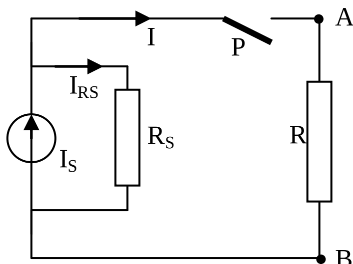
Ako izraz: $I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, pomnožimo sa $U \Rightarrow$ $\mathbf{U\ I = U\ I_1 + U\ I_2 + \cdots + U\ I_n \Rightarrow}$

$$\mathbf{P = P_1 + P_2 \cdots + P_n}$$

Dakle, i kod redne kao i kod paralelne veze ukupna snaga jednaka je zbiru pojedinačnih snaga generatora. Sledi zaključak, da je po pitanju ukupne snage svejedno koju će mo vezu primeniti. Iz praktičnih razloga, kod generatora velikih snaga (zbog eventualnih kvarova – prekida) primenjuje se paralelna veza.
Redna veza se primenjuje kada se želi povećati napon, struja im je ista (opterećenje isto), dok se **paralelna veza koristi kod većih opterećenja (veća struja),** ali su svi generatori istog napona**.**

6.2. STRUJNI GENERATOR

Kod naponskog generatora ($R_g << R$) na krajevima generatora treba da je što veći napon, i da on bude konstantan. Ako se zanemari unutrašnji otpor generatora on je jednak ems (U = E).
Ako je $\mathbf{R_g >> R} \Rightarrow E = I\,(R_g + R) = I\,R_g \Rightarrow$ $\mathbf{I = E / R_g}$. Sledi zaključak da je kod $R_g >> R$, struja koju daje generator konstantna, odnosno ona ne zavisi od spoljašnjeg opterećenja (otpora R), već je u funkciji sa unutrašnjim parametrima strujnog generatora (E i R_g).



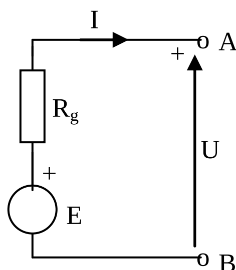
Sl.16.

Kod strujnog generatora osnovni su parametri struja $\mathbf{I_S}$ i unutrašnji otpor $\mathbf{R_S}$.
Za razliku od naponskog, kod strujnog generatora unutrašnji otpor se na generator veže paralelno. To je zbog toga što će:
– za $R_S = 0 \Rightarrow I = 0$ (strujni generator neće davati nikakvu struju, jer sva prolazi kratkom vezom kroz R_S)
– za $R_S \to \infty$ (prekid R_S) $\Rightarrow I_S \to I$ (prekidač uključen – sl.16). Na osnovu ova dva primera vidi se zašto je bitno da je kod strujnog generatora $\mathbf{R_S >> R}$.

Iz sl.16 $\Rightarrow \mathbf{I_S = I_{RS} + I} \Rightarrow \mathbf{I = I_S - I_{RS}}$ **;**
Za $\mathbf{R_S = \infty \Rightarrow I_{RS} = 0 \Rightarrow I = I_S}$ **,** ovo je **idealni strujni generator** (idealni naponski generator je za $R_g = 0$).
U praksi nema ništa idealno, što znači da ovakvi generatori ne postoje. Zbog toga svi generatori se mogu predstaviti i kao strujni i kao naponski. On će biti više strujni ako mu je unutrašnji otpor veći, odnosno naponski ako mu je unutrašnji otpor manji (poredeći ih sa otporom potrošača). To dalje znači da se naponski generator može pretvoriti u strujni, i obrnuto.

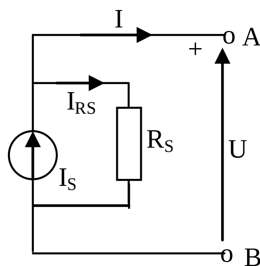
6.3. PRETVARANJE NAPONSKOG GENERATORA U STRUJNI I OBRNUTO

Naponski generator ⇔ Strujni generator



Sl.17.a)

⇔



Sl.17.b)

Osnovno pravilo kod svih pretvaranja (otpora, kond. ... itd.) je da se prilikom toga u kolu ne promeni stanje. To znači da naponi između tačaka A i B **U**, kao i struje **I** moraju biti istih vrednosti za oba generatora.

Ako jedan generator predstavimo, prvo kao naponski (sl.17 a), a zatim kao strujni (sl.17 b) , logično je da je unutrašnji otpor tih generatora isti. Iz ovoga sledi veoma važan zaključak kod pretvaranja jednog generatora u drugi, a to je da im je unutrašnji otpor isti. Dakle,

$$\mathbf{R_g = R_S}$$

Ako kod naponskog generatora tačke A i B kratko spojimo, tada će kroz kolo da teče struja: $\mathbf{I = I_K = E / R_g}$.
Ta struja mora biti ista i kod strujnog generatora, ako tačke A i B kratko spojimo, a to je ujedno struja koju daje strujni generator I_S. Iz ovoga sledi drugi veoma bitan zaključak, a to je da struja strujnog generatora jednaka**:**
$\mathbf{I_S = E / R_g} \Rightarrow$

$$\mathbf{E = I_S\, R_g}.$$

Kod pretvaranja naponakog generatora u strujni koristiti izraze:

$$R_S = R_g \qquad I_S = \frac{E}{R_g}$$

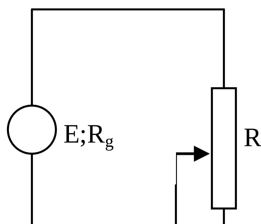
Kod pretvaranja strujnog generatora u naponski, koristiti sledeće izraze:

$$R_g = R_S \qquad E = I_S R_S$$

Idealni generatori se ne mogu pretvarati jedan u drugi, jer unutrašnji otpori kod idealnih generatora ne mogu se izjednačiti.
Pretvaranje generatora iz jednog oblika u drugi omogućuje rešavanje složenih kola, koja na ovaj način se svode na prosta kola.

Z A D A C I :

6.1.



Sl.6.1.

Na generator čija je ems E, a unutrašnja otpornost R_g, priključen je električni grejač čija se otpornost R može menjati (sl.6.1.).

a) Kolika je otpornost grejača kada se razvija najveća toplota i koliki je tada stepen korisnog dejastva ovoga sistema ?

b) Koliki je stepen korisnog dejstva ovog sistema ako se otpornost grejača poveća **n** puta u odnosu na predhodni slučaj ?

Brojni podaci: $E = 220$ V; $R_g = 0{,}04\ \Omega$; $n = 2{,}5$.

6.2. Generator ems $E = 50$ V i $R_g = 2\ \Omega$ vezan je na red sa otpornikom promenljive otpornosti R. Naći snagu koja se razvija na ovom otporniku, ako je:
a) $R = R_g / 2$; b) $R = R_g$; c) $R = 2R_g$. Prokomentarisati dobijene rezultate (u odnosu na η).

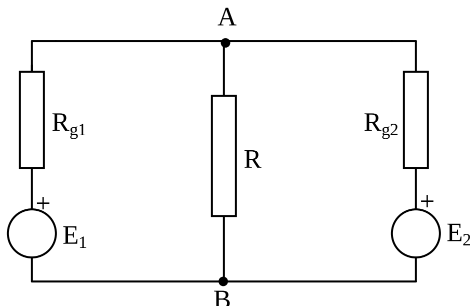
6.3. Jedna baterija ima ems od $E = 1{,}2$ V i unutrašnji otpor $R_g = 0{,}5\ \Omega$. Kolika je otpornost spoljašnjeg kola, ako njime protiče struja od $I = 0{,}8$ A ?

6.4. Na izvor ems $E = 100$ V, unutrašnjeg otpora $R_g = 1\ \Omega$, priključen je promenljivi otpornik otpornosti R. Koliki je:
a) stepen korisnog dejstva sistema, ako je $R = 0$ i $R = R_{max} = 5\ K\Omega$?
b) napon na krajevima generatora u oba slučaja pod a) ?

6.5. Četiri otpornika $R_1 = 20\ K\Omega$, $R_2 = 10\ K\Omega$, $R_3 = 15\ K\Omega$ i $R_4 = 25\ K\Omega$ vezani su redno na izvor čija je ems $E = 200$ V i unutrašnje otpornosti $R_g = 5\ K\Omega$. Odrediti:
a) snagu izvora P',
b) korisnu snagu sistema (ukupnu),
c) srepen iskorišćenja (korisnog dejstva) i
d) napon na krajevima generatora.

6.6. Dva otpornika, koji su paralelno vezani, $R_1 = 800\ \Omega$ i $R_2 = 400\ \Omega$ priključena su na generator ems $E = 100$ V unutrašnjeg otpora $R_g = 10\ \Omega$. Odrediti sve snage u kolu i stepen korisnog dejstva sistema.

6.7.

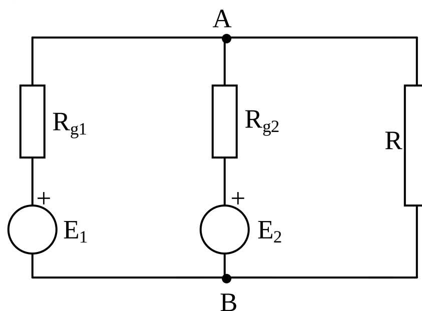


Sl.6.7.

Dato je kolo prema sl.6.7.Kolika je struja koja protiče kroz otpornik R i kojeg je ona smera ? Zadatak rešiti pretvaranjem naponskog generatora u strujni i obrnuto.

Brojni podaci :
$E_1 = 9$ V; $E_2 = 4{,}5$ V; $R_{g1} = 1\ \Omega$; $R_{g2} = 1{,}5\ \Omega$; $R = 6\ \Omega$.

6.8.



Sl.6.8.

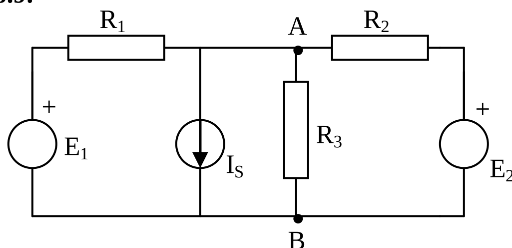
Pretvaranjem naponskog generatora u strujni i obrnuto, slika 6.8, odrediti:

a) struju sa generatorom ems E_2,

b) snagu generatora ems E_1.

Brojni podaci:
$E_1 = 15$ V; $E_2 = 12$ V; $R_{g1} = 20\ \Omega$; $R_{g2} = 10\ \Omega$; $R = 50\ \Omega$.

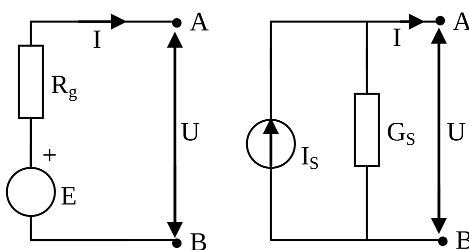
6.9.



Sl.6.9.

Kojom se brzinom električni rad pretvara u toplotu u otporniku R_3, ako je prema sl.6.9: $E_1 = E_2 = 10$ V; $I_S = 2$ A; $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$? (zadatak rešiti pretvaranjem generatora)

6.10.

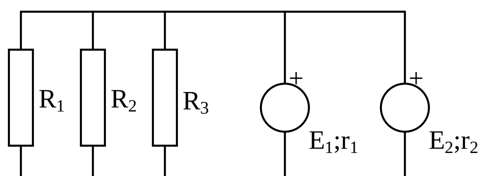


Sl.6.10. a) Sl.6.10. b)

Naći napon U na krajevima kola datog prema sl. 6.10 (a i b), ako je:
$I_S = 0{,}1$ A; $G_S = 1$ mS; $I = 90$ mA.

6.11. Dva izvora E_1 i E_2 ($E_2 > E_1$) vezana su redno i spojena sa otpornikom otpornosti $R = 4\ \Omega$, pri čemu je struja u kolu $I = 2$ A. Ako se na drugom izvoru zemenu polovi (kontra spoji) struja u kolu će iznositi $I' = 0{,}5$ A. Kada je priključen samo prvi izvor i otpornik R jačina struje u kolu je $I_1 = 1$ A. Ako je u kolu drugi izvor sa otporom R jačina struje iznosi $I_2 = 1{,}5$ A. Odrediti ems izvora E_1, E_2 i unutrašnje otpore R_{g1} i R_{g2}.

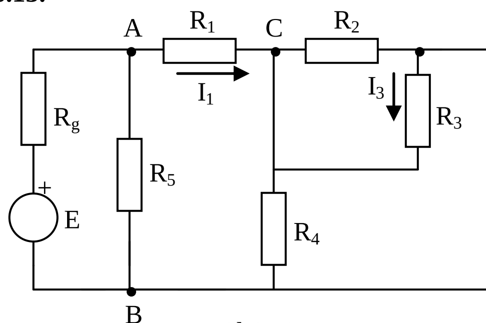
6.12.



Sl.6.11

Izračunati sve struje u kolu, prema sl.6.11, kao i stepen korisnosti dejstva celog sistema, ako je:
$R_1 = 20\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$; $R_3 = 30\ \Omega$; $E_1 = E_2 = 20$ V;
i unutrašnji otpori $r_1 = r_2 = 2\ \Omega$.

6.13.



Sl.6.13.

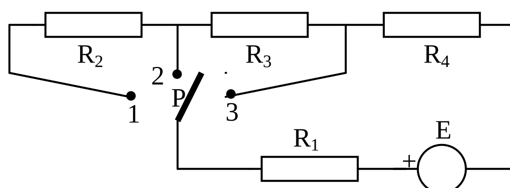
Generator, na sl.6.13, radi u režimu maksimalne korisne snage. Dato je: $I_1 = 6$ mA; $R_1 = 0{,}5$ kΩ; $R_2 = R_4 = 6$ kΩ; $R_3 = 3$ kΩ; $R_5 = 0{,}1$ kΩ.

a) zračunati struju I_3,
b) Izračunati elektromotornu silu generatora E i njegovu unutrašnju otpornost R_g.

6.14. Za krajeve generatora ems E i unutrašnje otpornosti r vezan je otpornik promenljive otpornosti R. Odrediti zavisnost korisne snagu u odnosu na otpornost R [P = f (R)] . Nacrtati karakteristiku za navedenu funkciju (Napomena! Uzeti za R proizvoljno vrednosti, npr $R_1 = 0{,}2$ r; $R_2 =$ r; $R_3 = 5$ r ...)
Kakav se zaključak može izvesti iz grafika ?

6.15. Za krajeve generatora ems E_1 i unutrašnje otpornosti $r_1 = 6\ \Omega$ vezan je prijemnik kontraelektromotorne sile E_2 i unutrašnje otpornosti $r_2 = 4\ \Omega$. Ukupna otpornost vodova koji spajaju generatore E_1 i E_2 iznosi $R = 10\ \Omega$. Odrediti struju I, ems E_1 i E_2, koeficijent korisnog dejstva η, koristan rad koji se obavi za vreme od 2 časa i snagu gubitaka. Snage generatora iznose $P_1' = 80$ W i $P_2' = 60$ W.

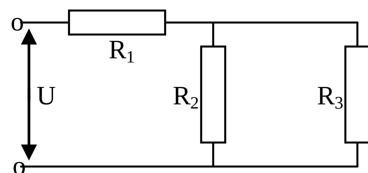
6.16.



Sl.6.16.

Prema sl.6.16, odrediti u kojem položaju P je stepen korisnog dejstva najveći ?
Brojni podaci: E = 10 V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4$. Rešenje obrazložiti.
Koliki su otpori R_2 (tj. R_3 i R_4), ako se u pol.2 ostvari maksimalna snaga sistema ?

6.17.



Sl.6.17.

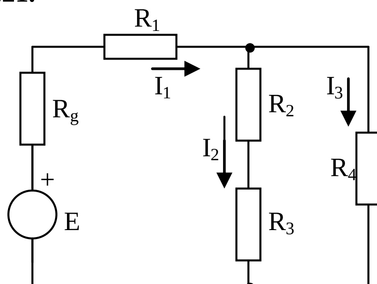
Odrediti otpornost otpornika R_3 u kolu prema sl.6.17, tako da snaga koja se u njemu razvije na osnovu Džulovog efekta (Džulova toplota) ima maksimalnu vrednost.
Brojni podaci: U = 100 V, $R_1 = 6\ \Omega$ i $R_2 = 8\ \Omega$.

6.18. Akumulator ems E = 12 V i unutrašnje otpornosti $R_g = 0{,}04\ \Omega$ napaja sijalicu snage P = 45 W. Izračunati jačinu struje u kolu i snagu gubitaka u samom akumulatoru (generatoru).

6.19. U nedostatku preciznog voltmetra, merenje ems i unutrašnjeg otpora jednog generatora obavljeno je pomoću ampermetra i dva otpornika poznatih vrednosti, $R_1 = 5\ \Omega$ i $R_2 = 10\ \Omega$. Otpornici su jedan po jedan bili redno vezani sa generatorom i ampermetrom. Pri tome izmerene su jačine struja $I_1 = 2{,}35$ A i $I_2 = 1{,}18$ A. Izračunati ems i unutrašnju otpornost generatora. Kolika je struja u kratkom spoju generatora ?

6.20. Generator ems E = 220 V i unutrašnje otpornosti $R_g = 2{,}1\ \Omega$ vezan je za prijemnik, nominalne snage pri 220 V jednake P = 1,5 KW , pomoću dve bakarne žice dužine l = 200 m i prečnika d = 2 mm. Izračunati jačinu struje kroz kolo, napon između provodnika voda kod generatora i kod prijemnika i stvarnu snagu prijemnika. Temperatura bakarnih žica je 20 ° C ($\rho_{Cu} = 0{,}0175\ \Omega mm^2/m$).

6.21.



Sl.6.21.

U kolu prikazanom na slici 6.21. izračunati jačinu struje kroz sve otpornike , napone između krajeva svih otpornika, snagu generatora i snage Džulovih gubitaka u svim otpornicima.
Brojni podaci:
E = 110 V; R_g = 0,5 Ω; R_1 = 25 Ω; R_2 = 10 Ω;
R_3 = 35 Ω; R_4 = 50 Ω.

6.22. Odrediti otpornost R_4, u kolu prema sl.6.21 (predhodni zadatak) tako da ukupna snaga Džulovih gubitaka u otpornicima R_2, R_3 i R_4 bude maksimalna. Kolika je snaga cele grupe ?
Brojni podaci:
isti kao u predhodnom zadatku (sem R_4).

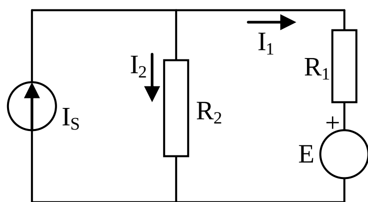
6.23. Odrediti otpornost R_2, u kolu prema sl.6.21. tako da ukupna snaga na otporima R_2, R_3 i R_4 bude maksimalna (Džulova snaga). Odrediti snagu: sistema, pojedinačnih otpora, kao i snagu generatora.
Brojni podaci:
isti kao u zadatku 6.21. (sem R_2).

6.24. Generator ems E = 100 V i unutrašnje otpornosti R_g = 2 Ω vezan je za promenljivi otpornik R, čija se otpornost može menjati od 0 do 1000 Ω. Nacrtati dijagram promene snage prijemnika, generatora i gubitaka u generatoru u zavisnosti od vrednosti otpornosti R (za navedeni opseg). Sa kojom sve vrednošću otpornosti R možemo postići snagu prijemnika koja iznosi 80% od maksimalne snage. Kakav je rad (koja otpornost R) povoljniji sa stanovišta bezbednosti generatora ? Rešenja obrazložiti.

6.25. Prijemnik snage P = 6 KW (pri nominalnom naponu U = 220 V) napaja se izvorom ems E = 220 V i zanemarljive unutrašnje otpornosti preko bakarnog dvožičnog voda dužine l = 80 m. Izračunati potreban presek provodnika voda tako da snaga prijemnika ne bude manja za više od :
a) 1% ; b) 5% od nominalne

6.26. Paralelna veza dva otpornika, jednog otpornosti R, a drugog promenljive otpornosti R′, vezana je za idealni strujni generator jačine struje I_S. Odrediti otpornost R′ tako da njegova snaga bude maksimalna i odrediti kolika je ta snaga.

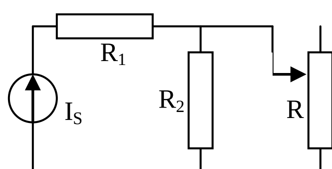
6.27.



Sl.6.27.

Izračunati jačinu struje kroz otpornike R_1 i R_2 na sl.6.27, ako je E = 20 V; R_1 = 2 Ω; R_2 = 4 Ω i :
a) I_S = 2 A
b) I_S = 10 A
Za oba slučaja odrediti snage strujnog i naponskog generatora.

6.28.

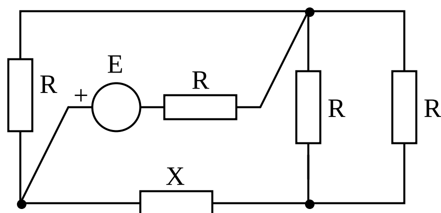


Sl.6.28.

U kolu na sl.6.28. izračunati:
a) maksimalnu snagu na promenljivom otporniku R
b) maksimalnu struju kroz promenljivi otpornik R

Brojni podaci: $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $I_S = 2$ A.

6.29.



Sl.6.29.

U lolu prikazanom na slici 6.29, odrediti otpornik X tako da na njemu snaga bude maksimalna.

Brojni podacvi: $R = 10\ \Omega$.

6.30. Otpornik otpornosti priključen je na generator nepoznate ems E, unutrašnje otpornosti R_g. Ako je poznata korisna snaga P koju prima otpornik R, odrediti:

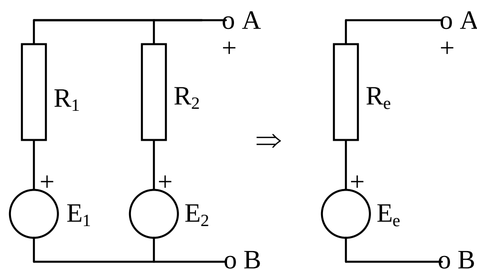
a) elektromotornu silu generatora E;
b) ukupnu korisnu snagu P_1, ako se na red sa otpornikom R priključi još jedan otpornik iste otpornosti..

Brojni podaci: $R = 5\ \Omega$; $P = 500$ W; $R_g = 1\ \Omega$;

6.31. Za polove generatora ems E i unutrašnje otpornosti R_g, priključen je prijemnik promenljive otpornosti R. Kada je otpornost prijemnika R_1, korisna snaga je P_1, a kada mu je otpornost podešena na R_2, korisna snaga je P_2. Kolika je unutrašnja otpornost generatora ?

Brojni podaci: $R_1 = 2\ \Omega$; $P_1 = 2$ W; $R_2 = 12\ \Omega$; $P_2 = 3$ W.

6.32.

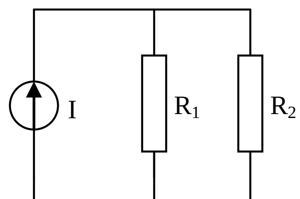


Sl.6.32.a) Sl.6.32.b)

Dva generatora ems E_1 i E_2 i unutrašnjih otpornosti R_1 i R_2, vezani su paralelno prema sl.6.32 a).Odrediti karakteristike ekvivalentnog naponskog generatora (E_e i R_e, sl.6.32 b)

Brojni podaci: $E_1 = 12$ V; $E_2 = 6$ V;
$R_1 = R_2 = 2\ \Omega$.

6.33.

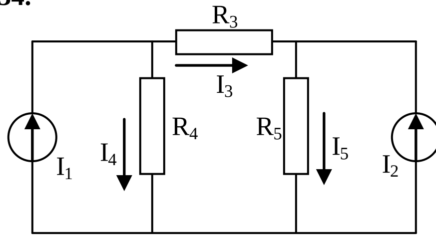


Sl.6.33.

Dva otpornika otpornosti R_1 i R_2 priključena su na strujni generator stalne struje I, prema slici 6.33.
Odrediti struje u granama sa otpornicima R_1, odnosno R_2.

Brojni podaci: $I = 6$ A; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 6\ \Omega$.

6.34.

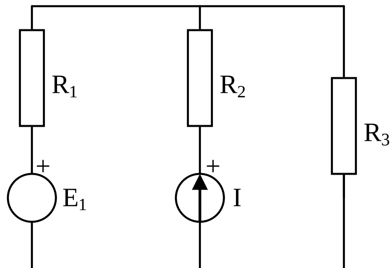


Sl.6.34

Dva strujna generatora, konstantnih struja I_1 i I_2, i tri otpornika R_3, R_4 i R_5 vezani su u kolo prema slici 6.34. Kolike su struje u granama sa otpornicima ?

Brojni podaci: $I_1 = 4$ A; $I_2 = 6$ A; $R_3 = 10\ \Omega$; $R_4 = 4\ \Omega$; $R_5 = 6\ \Omega$.

6.35.



Sl.6.35.

U kolu prema slici 6.35, odrediti nepoznatu otpornost R_3 tako da ona prima maksimalnu snagu.

Brojni podaci:
$R_1 = 6\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$; $E_1 = 12$ V; $I = 10$ A.

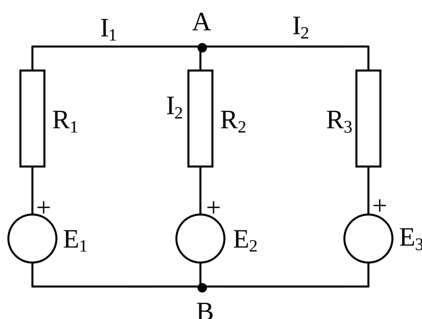
7. SLOŽENA KOLA (LINEARNE ELEKTRIČNE MREŽE)

Složena električna kola, koja sadrže provodnike (vodove) i potrošače konstantne otpornosti, napajana sa više izvora predstavljaju **linearne električne mreže.**

Složena kola (linearne električne mreže), koja su po pravila mnogo teža za rešavanje od prostih kola, mogu se rešiti na više načina. U praksi se najčešće koriste sledeće metode:

7.1.metoda kirhofovih pravila,
7.2. metoda konturnih struja,
7.3. metoda zajedničkog napona (metoda potencijala čvorova),
7.4. metoda pretvaranja generatora,
7.5. metoda superpozicije,
7.6. metoda Tevenena,
7.7. metoda Nortona.

7.1. METODA KIRHOFOVIH PRAVILA



Sl.18.

Postupak primene metode:

1**) Proizvoljno uzeti smerove struja(sl.18) u granama(npr. sve tri ulaze u čvor B, sl. 19.),**

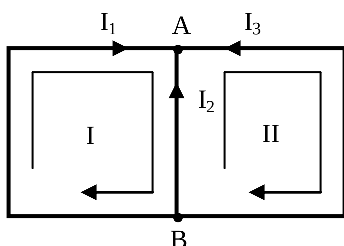
2) Postaviti prema prvom Kirhofovom zakonu jednačine (broj jednačina = broj čvorova – 1), sl.19,

3) Proizvoljno odabrati smer obilaska konture, sl.19,

4) Poštujući smer obilaska konture postaviti jednačine prema drugom Kirhofovom zakunu, čiji ukupan broj odgovara broju kontura (petlji).

Ukupan broj jednačina jednak je broju grana, odnosno broju nepoznatih (one nastaju primenom navedenog postupka). Rešenjem sistema jednačina rešen je dati zadatak.

U culju jednostavnijeg rešenja zadatka često se umesto šeme (slika 18) koristi graf date šeme, koji je dat na slici 19.



Sl.19.

Na osnovu navedenih postupaka sledi:

$\mathbf{I_1 + I_2 + I_3 = 0}$ **......** (I Kirh. pravilo)

$\mathbf{E_1 - I_1 R_1 - E_2 + I_2 R_2 = 0}$ (II Kirh. pravilo)

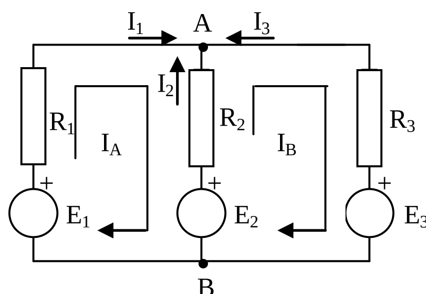
$\mathbf{- I_2 R_2 + E_2 + I_3 R_3 - E_3 = 0}$ (II Kirh. pravilo)

Ova metoda se primenjuje kod složenih kola sa malim brojem grana , zbog broja jednačina. Kako je najmanji broj jednačina 3 (najmanje su prisutne dve konture – tri grane), sledi da se metoda Kirhofovih pravila koristi kod najjednostavnijih složenih kola.

7.2. METODA KOMTURNIH STRUJA

Ova metoda se zasniva na postavljanju jednačina na osnovu drugog Kirhofovog pravila. Broj jednačina je jednak broju kontura (petlji), što znači za sl.18, slede dve jednačine.

Da bi postavili potrebne jednačine za svaku konturu zamišlja se po jedna struja, koja se naziva konturna struja. Konturnoj struji dajemo proizvoljno smer (ako je to smer kazaljke na satu, sl.20, što odgovara i smeru obilaska kod predhodne metode), i te struje obeležitmo sa I_A, I_B ... I_n (za sl.18, odnosno 20 ⇒ I_A i I_B) . Na osnovu smera konturnih struja obilazimo sve konture i postavljamo potrebne jednačine, primenjujući drugi Kirhofov zakon.



Sl.20.

$E_1 - I_A R_1 - (I_A - I_B) R_2 - E_2 = 0$;
$E_2 - (I_B - I_A) R_2 - I_B R_3 - E_3 = 0$

Sređivanjem navedenih jednačina sledi:

$\mathbf{E_1 - E_2 = I_A (R_1 + R_2) - I_B R_2}$

$\mathbf{E_2 - E_3 = I_B (R_2 + R_3) - I_A R_2}$

Rešenjem ovog sistema jednačina slede vrednosti konturnih struja, koje nam omogućuju rešenja struja po granama. Da bi odredili struje u granama proizvoljno im dajemo smer (Sl.112).

Sledi: $\mathbf{I_1 = I_A}$; $\mathbf{I_2 = - I_A + I_B}$; $\mathbf{I_3 = - I_B}$

Postupak primene kod metode konturnih struja:

1. **Proizvoljno odrediti smer konturnih struja**
2. **Postaviti jednačine primenjujući II Kirhofov zakon**
3. **Odrediti struje po granama, čiji smer predhodno proizvoljno odaberemo**

Metoda konturnih struja je univerzalna metoda, što znači da je primenljiva u svim složenim kolima. Njena prednost u odnosu na metodu Kirhofovih pravila je manji broj sistema linearnih jednačina (jednostavnije za njihovo rešenje), naročito kod većeg broja grana.

7.3. METODA ZAJEDNIČKOG NAPONA

Ova metoda je veoma praktična ako se više generatora veže paralelno, tj. ako je više grana spojeno između dva čvora (metoda čvorova), a samim tim na krajevima tih grana je isti napon (zajednički).
Za sl.20 (odnosno 18), napon između čvorova A i B, za date smerove ems i struja iznosi:

$U_{AB} = E_1 - I_1 R_1 = E_2 - I_2 R_2 = E_3 - I_3 R_3 \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{I_1} &= \mathbf{(E_1 - U_{AB}) G_1}; \\ \mathbf{I_2} &= \mathbf{(E_2 - U_{AB}) G_2}; \\ \mathbf{I_3} &= \mathbf{(E_3 - U_{AB}) G_3}. \end{aligned}}$$

gde je:
$G_1 = 1/R_1$; $G_2 = 1/R_2$; $G_3 = 1/R_3$.

Kako je $I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow$

$E_1 - U_{AB}) G_1 + (E_2 - U_{AB}) G_2 + (E_3 - U_{AB}) G_3 \Rightarrow$

$$\mathbf{U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + \cdots + E_n G_n}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}}}$$

Ako je jedna od ems suprotnog smera od nanačenog (ona se ponaša kao kontraelektromotorna sila), pa se ispred nje piše predznak **« – «.** Navedeni izraz odgovara za slučaj: $I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0$, što znači da bi se on koristio sve struje u granama treba usmeriti ka tački A.

Ovom metodom se sve struje rešavaju primenom jedne jednačine sa jednom nepoznatom, što je čini veoma praktičnom (brzo rešenje zadatka). Nedostatak ove metode je taj što se primenjuje kod složenih kola koja imaju samo dva čvora. (Moguća je primena i kod više čvorova, no u tom slučaju ona postaje znatno složenija, a samim tim postaje i nepraktična .)

7.4. METODA PRETVARANJA GENERATORA

Složena kola se rešavaju i pomoću pretvaranja naponskog generatora u strujni i obrnuto. Ova metoda je već obrađena kod pretvaranja generatora, gde se konstatovalo da pomoću pretvaranja odgovarajućih generatora složena kola se transformišu u prosta, čime je i rešenje zadatka postalo prosto.

7.5. METODA SUPERPOZICIJE

Metoda superpozicije je metoda pretpostavljenih ugašenih ems izvora.

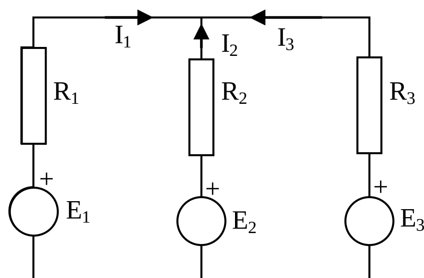
Postupak pri rešavanju je sledeći:

1) Pretpostaviti da su u zadanom kolu sve ems sem jedne ugašene (jednake nuli),

2) Izračunati struje u svim granama na osnovu pretpostavljene ems, vodeći računa o njihovom smeru (smer je dirigovan smerom pretpostavljene ems),

3) Tačku dva primeniti pojedinačno za svaki izvor (Ovako dobijene struje su samo fiktivne, tj one ne postoje u datim granama. Broj fiktivnih struja jednak je broju ems u kolu),

4) Algebarski sabrati fiktivne struje po granama (vodeći računa o njihovom smeru). Data rešenja predstavljaju stvarne struje u granama.

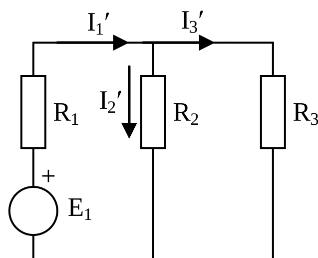


Sl.21.

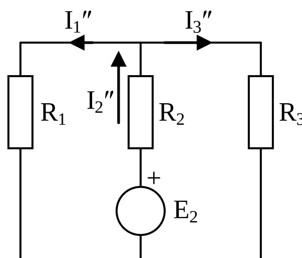
Primenom navedenih tačaka za složeno kolo prema slici 21 (isto kolo kao na sl. 18), nastaju fiktivna kola prikazana na sl. 21 a), 21 b) i 21 c).

Kolo prema slici 21 (a, b i c) je prosto kolo, pa se u njemu lako reše fiktivne struje (I_1', I_2', I_3', I_1'', I_2'', I_3'', I_1''', I_2''' i I_3''').

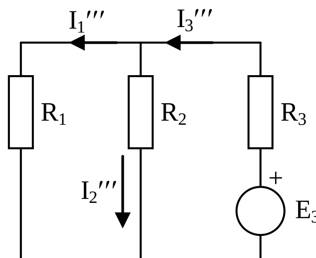
,:



Sl.21.a)



Sl.21.b)



Sl.21.c)

Struje u granama, što ujedno predstavlja konačno rešenje, jednake su:

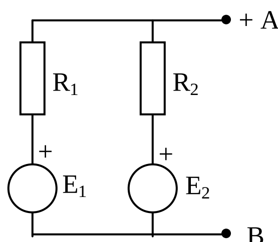
$$\mathbf{I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''' \quad ; \quad I_2 = -I_2' + I_2'' - I_2''' \quad ; \quad I_3 = -I_3' - I_3'' + I_3'''}$$

7.6. TEVENENOVA METODA

Ova metoda se najčešće koristi kod složenih kola (mreža) kada treba odrediti struju samo u jednoj grani kola. Električna mreža (složeno kolo), u odnosu na bilo koja dva svoja priključka ponaša se kao naponski generator ems E_T. To znači da dato kolo između navedenih tačaka stvara određeni napon, koji predstavlja napon praznog hoda (jer se odgovarajuća grana isključi) i taj napon se naziva **napon Tevenena E_T.** Ovaj napon predstavlja ems naponskog generatora u praznom hodu, koji još ima i svoj unutrašnji otpor, koji se naziva **otpor Tevenena R_T**. Kada se odredi E_T i R_T (parametri naponskog generatora za date tačke) na taj Tevenenov generator ponovo se vraća grana za koju treba odrediti jačinu struje.

Postupak korišćenja Tevenenove teoreme (primenimo na sl 111) :
Pretpostavimo da nam treba jačina struje u trećoj grani.

2) **Isključimo odgovarajuću granu** (treću). Nakon ovog data slika izgleda kao na sl.114.
3) **Izračunati napon Tevenena E_T**



Sl.22.

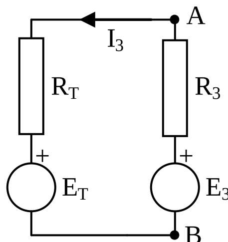
Za kolo na slici 22 izračunati napon između tačaka A i B. Voditi računa o polaritetu. Metoda je proizvoljna. Prema metodi zajedničkog napona napon je jednak:

$$E_T = U_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2}{G_1 + G_2}$$

3) **Izračunati otpor Tevenena R_T.** Ovaj otpor je jednak otporu izmeđi tačaka A i B (isključene grane). Kako je otpor generatora E_1 R_1 a generatora E_2 R_2 umesto ems E_1 i E_2 pretpostavljamo kratku vezu, a ako u mreži imamo još i strujni generator tada se on pri računanju otpora Tevenena isključi.

Dakle,
$$R_T = R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

4) **Vratiti isključenu granu na Tevenenov generator.** Ovako nastaje slika 23.



Sl.23.

Nakon navedenih tačaka, i kola prema sl.23 sledi konačno rešenje za struju u trećoj grani, koja iznosi:

$$I_3 = \frac{-E_T + E_3}{R_T + R_3}$$

Ako se za smer struje I_3 uzme suprotan od naznačenog, tada je:
$I_3 = (E_T - E_3) / (R_T + R_3)$

7.7 NORTONOVA METODA

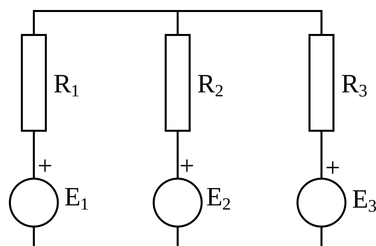
Ova metoda je zasnovana na strujnom (Nortonovom) generatoru. Postupak je isti kao kod Tevenenovog generatora, sa tom razlikom što sada umesto isključene grane činimo kratku vezu (strujni generator). Na ovaj način odredimo **struju Nortonovog generatora I_N**. Otpor **R_N je otpor Nortonovog generatora** i on je isti kao i R_T.

Kako je kod pretvaranja naponskog generatora u strujni (Tevenenova u Nortonov): **$I_N = E_T / R_T$; $R_N = R_T$**, i obrnuto: **$E_T = I_N R_N$; $R_T = R_N$.**

Kada smo našli struju u grani koja je bila kratko spojena (I_N) i otpor između tačaka navedene grane, na iste te tačke vraćamo granu u predhodnom obliku, vodeći računa o polaritetu (kao i kod Tevenena). Data grana je sada priključena na strujni (Nortonov) generator. Na osnovu ove veze rešiti struju za datu granu.
Ovim je zadatak rešen (postupak analogan Tevenenovoj metodi).

Z A D A C I :

7.1.

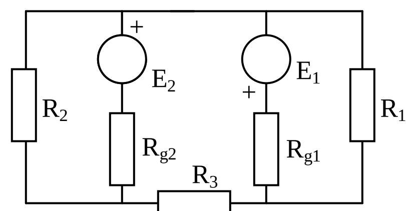


Sl.7.1.

Odrediti jačinu struje u svim granama složenog kola (mreže) na slici 7.1 metodom Kirhofovih pravila. Izračunati snage svih otpornika, kao i svih generatora.

Brojni podaci:
$E_1 = 20$ V; $E_2 = E_3 = 10$ V; $R_1 = R_3 = 10\ \Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$.

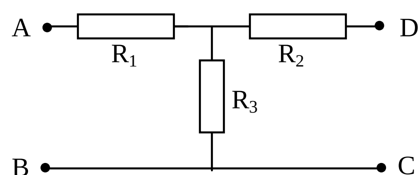
7.2.



Sl.7.2.

Odrediti struje u svim granama kola, prema sl.7.2, primenom Kirhofovih zakona, ako je:
$E_1 = E_2 = 30$ V; $R_{g1} = R_{g2} = 1\ \Omega$; $R_1 = 4\ \Omega$;
$R_2 = 2\ \Omega$ i $R_3 = 3\ \Omega$.

7.3.

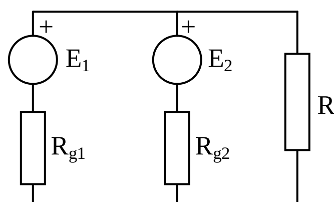


Sl.7.3.

Izračunati struje koje protiču kroz otpore, prema slici 7.3, snage generatora u kolu kao i snagu na otporniku R_3, koristeći metodu Kirhofovih zakona.

Brojni podaci: $U_{AB} = 12$ V; $U_{CD} = 5{,}6$ V; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$.

7.4.

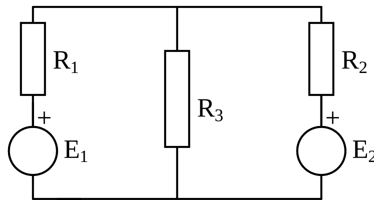


Sl.7.4.

Za kolo na sl.7.4 poznato je: $E_1 = 15$ V; $E_2 = 12$ V; $R_{g1} = 20\ \Omega$; $R_{g2} = 10\ \Omega$; $R = 50\ \Omega$.
Izračunati, metodom Kirhofovih pravila :

a) snagu generatora ems E_1;
b) struju kroz generator ems E_2
c) količinu toplote koja se razvije na prijemniku otpornosti R za vreme od 0,5 h.

7.5.

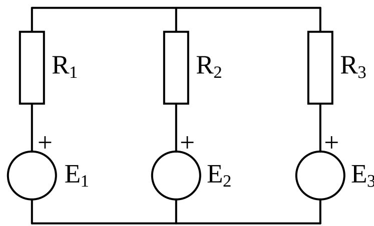


Sl.7.5.

U kolu na sl.7.5 , metodom Kirhofovih pravila, izračunati struje u granama i snagu na generatoru ems E_2.

Brojni podaci:
$E_1 = 20$ V; $E_2 = 10$ V; $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$.

7.6.



Sl.7.6.

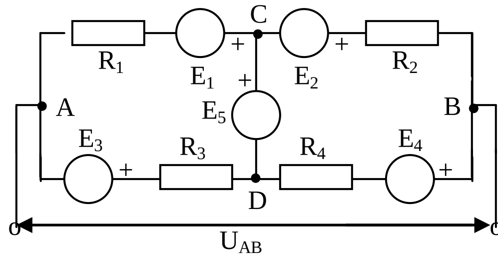
Metodom Kirhofovih pravila odrediti, prema sl.7.6, koji od izvora daju, a koji uzimaju energiju.

Brojni podaci:
$R_1 = 6\ \Omega$; $R_2 = 8\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$; $E_1 = 10$ V; $E_2 = 20$ V; $E_3 = 30$ V.

7.7. Odrediti, metodom Kirhofovih pravila, koji od izvora daje a koji uzima energiju prema slici 7.6. (zadatak 7.6.)

Brojni podaci : $E_1 = 30$ V; $E_2 = 10$ V; $E_3 = 5$ V; $R_1 = 6\ \Omega$; $R_2 = 8\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$.

7.8.



Sl.7.8.

Zadano je, prema slici 7.8:
$E_1 = E_4 = 60$ V; $E_2 = 30$ V; $E_3 = 10$ V;
$E_5 = 20$ V; $R_1 = R_3 = 10\ \Omega$; $R_2 = R_4 = 5\ \Omega$.
Metodom Kirhofovih pravila odrediti napon između tačaka A i B U_{AB}.

7.9. Rešiti zadatak 7.1 metodom konturnih struja.

7.10. Zadatak 7.2 rešiti metodom konturnih struja.

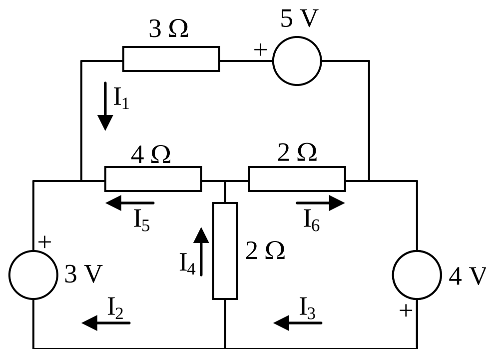
7.11. Zadatak 7.4 rešiti metodom konturnih struja.

7.12. Metodom konturnih struja rešiti zadatak 7.5.

7.13. Metodom konturnih struja rešiti zadatak 7.6.

7.14. Zadatak 7.8 rešiti metodom konturnih struja.

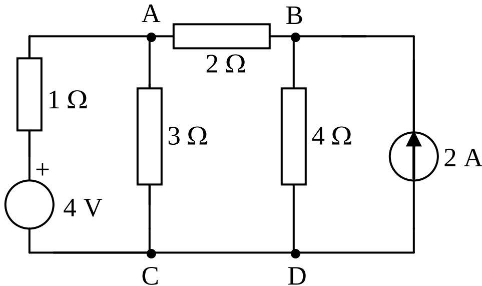
7.15.



Sl.7.15

Za mrežu sa slike 7.15. izračunati jačinu struje u svim granama primenom metode konturnih struja.

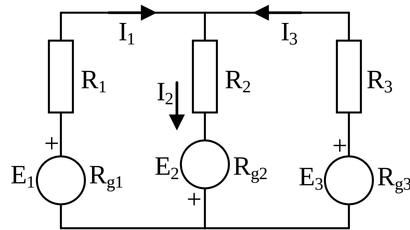
7.16.



Sl.7.16.

Izračunati jačinu struja u granama sa slike 7.16 metodom konturnih struja. Koliki je napon U_{CB} između tačaka C i B ?

7.17.

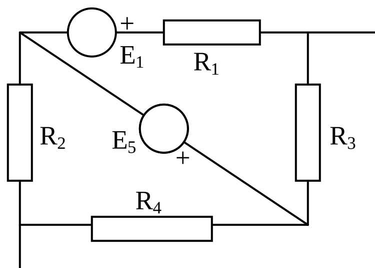


Sl.7.17

Za kolo na sl.7.17 poznato je:
$R_{g1} = R_{g2} = R_{g3} = 500\ \Omega$; $R_1 = 500\ \Omega$; $R_2 = 1\ 500\ \Omega$; $R_3 = 6\ 500\ \Omega$; $E_1 = 5$ V; $E_2 = 2$ V; $I_3 = 2$ mA.
Metodom konturnih struja izračunati:

a) ems E_3,
b) ukupnu snagu generatora ems E_3, njegovu korisnu snagu , snagu njegovih gubitaka i njegov stepen iskorišćenja

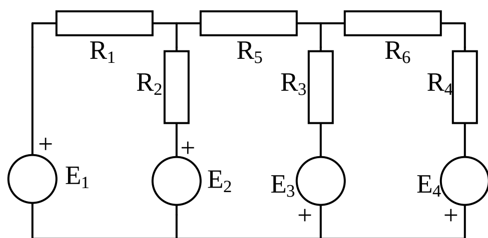
7.18.



Sl.7.18.

Za kolo na slici 7.18 poznato je:
$R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 3\ \Omega$; $R_3 = R_4 = 4\ \Omega$;
$E_1 = 10$ V; $E_5 = 14$ V.
Metodom konturnih struja odrediti sve struje u kolu.

7.19.

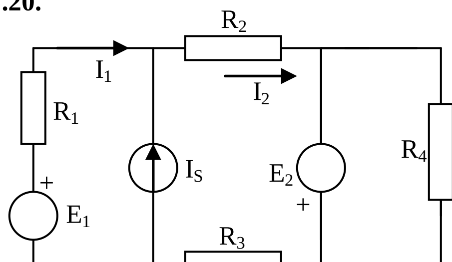


Sl.7.19.

Izračunati jačinu struje u svim granama mreže prikazane na slici 7.19. metodom konturnih struja. Kolike su snage na svim otpornicima, a kolike u generatorima ?

Brojni podaci: $E_1 = 12$ V; $E_2 = 4$ V; $E_3 = 25$ V; $E_4 = 6$ V; $R_1 = 0{,}1\ \Omega$; $R_2 = 0{,}2\ \Omega$; $R_3 = 0{,}1\ \Omega$; $R_4 = 0{,}3\ \Omega$; $R_5 = 5\ \Omega$; $R_6 = 7\ \Omega$.

7.20.



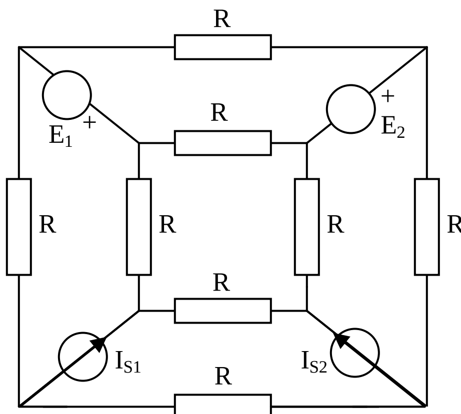
Sl.7.20

U složenom kolu prikazanom na slici 7.20 poznate su sledeće vrednosti:
$E_1 = 12$ V; $E_2 = 6$ V; $I_S = 0{,}52$ A; $I_2 = 1{,}72$ A;
$R_1 = 0{,}1\ \Omega$; $R_3 = 2{,}8\ \Omega$; i $R_4 = 2{,}2\ \Omega$. Izračunati:

a) otpornost R_2,
b) jačinu struje u svim granama
c) snage svih otpornika i svih generatora.

Primeniti metodu konturnih struja.

7.21.

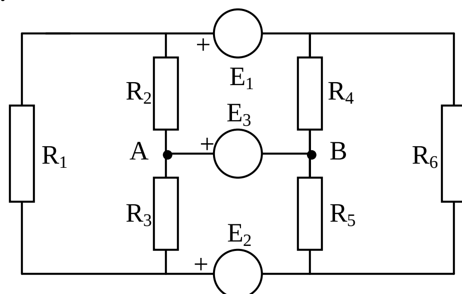


Sl.7.21

Metodom konturnih struja izračunati jačinu struje u svim granama kola prema slici 7.21, kao i snage svih otpornika i svih generatora.

Brojni podaci:
$E_1 = 2$ V; $E_2 = 4$ V; $I_{S1} = 2$ mA; $I_{S2} = 5$ mA;
$R = 1\,000\ \Omega$.

7.22.



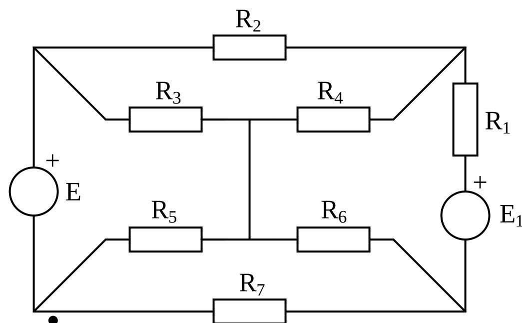
Sl.7.22.

Za složeno kolo, prema sl.7.22, odrediti metodom konturnih struja:

a) elektromotornu silu E_3 generatora u grani AB, sa kojom će u toj grani struja biti jednaka nuli;
b) snage koje primaju otpornici R_1 i R_6.

Brojni podaci: $E_1 = 10$ V; $E_2 = 15$ V;
$R_1 = R_6 = 2\ \Omega$; $R_2 = R_4 = R_5 = 1\ \Omega$; $R_3 = 5\ \Omega$.

7.23.



Sl.7.23.

Poznate su sve ems i sve otpornosti u složenom kolu prikazanom na slici 7.23. Primenom metode konturnih struja, odrediti snagu P koju generator sa ems E predaje kolu.

Brojni podaci: $E = 200$ V; $E_1 = 100$ V; $R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = R_3 = R_4 = 15\ \Omega$; $R_5 = R_6 = R_7 = 20\ \Omega$.

7.24. Rešiti zadatak 7.1 metodom zajedničkog napona (metoda čvorova).

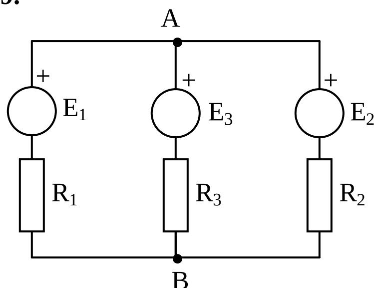
7.25. Rešiti zadatak 7.3 metodom zajedničkog napona.

7.26. Metodom zajedničkog napona rešiti zadatak 7.4.

7.27. Primenom metode čvorova (zajedničkog napona) rešiti zadatak 7.5.

7.28. Rešiti zadatak 7.6 metodom zajedničkog napona.

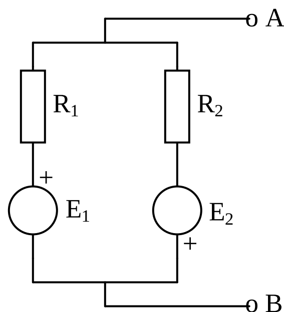
7.29.



Sl.7.29.

Za koju će vrednost otpora R_3, prema sl.7.29, napon U_{AB} između tačaka A i B biti jednak 20 V, ako je:
$E_1 = 10$ V; $E_2 = 20$ V; $E_3 = 25$ V;
$R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$.
Zadatak rešiti metodom zajedničkog napona.

7.30.

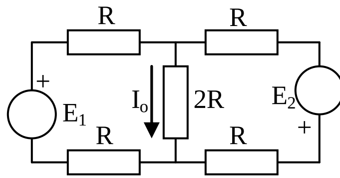


Sl.7.30.

Kako se menja napon U_{AB} između tačaka A i B, prema sl.7.30, ako E_2 poraste na $2E_2$?

Brojni podaci: $E_1 = 10$ V; $E_2 = 5$ V; $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$.

7.31.

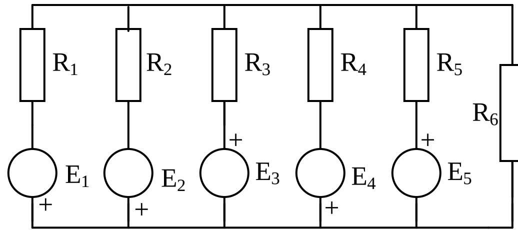


Sl.7.31

Odrediti promenu struje I_o, na slici 7.31, ako E_2 poraste za četiri puta. Zadatak rešiti metodom zajedničkog napona.

Brojni podaci: $E_1 = 24$ V; $E_2 = 6$ V.

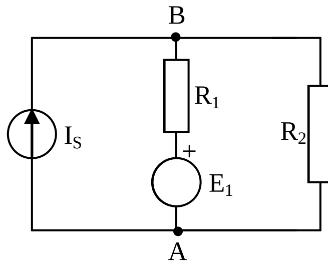
7.32.



Sl.7.32.

Koliki je napon na krajevima otpornika R_6 prema sl.7.32, ako su dati sledeći podaci: $E_1 = 2$ V; $E_2 = E_4 = 8$ V; $E_3 = 4$ V; $E_5 = 12$ V; $R_1 = R_4 = 0{,}5\ \Omega$; $R_2 = 1\ \Omega$; $R_3 = R_5 = 2\ \Omega$; $R_6 = 0{,}25\ \Omega$.

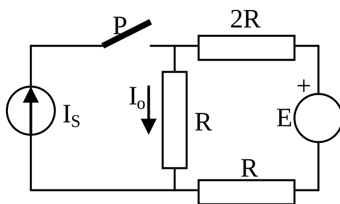
7.33.



Sl.7.33.

Zadano je, prema sl.7.33: $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$; $I_S = 10$ A.
Kod zamene polova ems E_1, napon U_{AB} se smanji za tri puta, ali polaritet mu ostane nepromenjen. Kolika je vrednost ems E ?

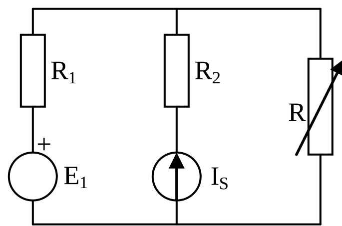
7.34.



Sl.7.34.

U kolu prema slici 7.34, pri uključenju prekidača P uključi se strujni generator sa strujom $I_S = 5$ [A.] Odrediti promenu struje I_o ako je ems $E = 5R$ [V].

7.35.



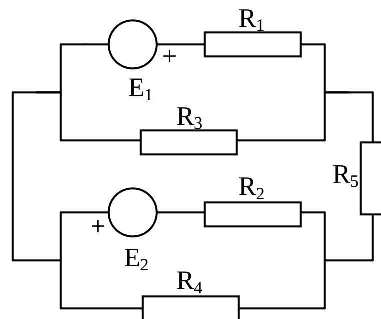
Sl.7.35.

Odrediti pri kojoj se vrednosti otpora R, prema sl.7.35, na njemu troši maksimalna snaga.

Brojni podaci: $R_1 = 20\ \Omega$; $R_2 = 50\ \Omega$.

Rešenje prokomentarisati.

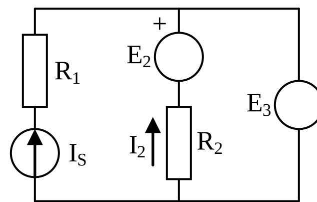
7.36.



Sl.7.36.

Za kolo na slici 7.36, poznato je:
$E_1 = E_2 = 30$ V; $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$; $R_3 = 4\ \Omega$; $R_4 = 2\ \Omega$ i $R_5 = 3\ \Omega$.
Kolika je struja u otporniku R_5 ?
Zadatak rešiti metodom pretvaranja naponskog u strujni generator i obrnuto.

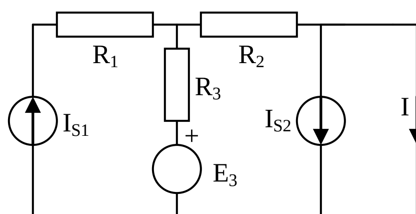
7.37.



Sl.7.37.

Za kolo sa slike 7.37. dati su sledeći podaci:
$I_S = 1$ A; $E_2 = 10$ V; $R_1 = 1\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$ i snaga strujnog generatora $P_S = 13$ W. Odrediti vrednosti E_3 i I_2 , kao i njihove smerove. (Da li je za I_2 smer dobro odabran ?)
Primeniti metodu pretvaranja generatora.

7.38.

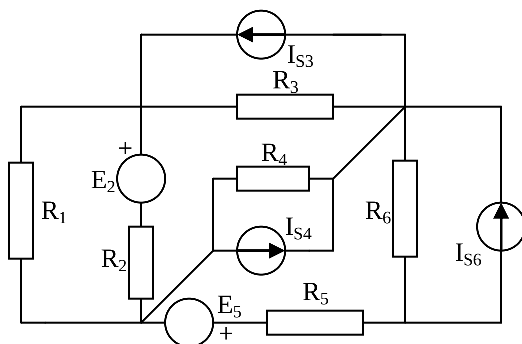


Sl.7.38.

U kolu sa slike 7.38 odrediti struju I, ako je poznato:
$R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 200\ \Omega$; $R_3 = 300\ \Omega$;
$I_{S1} = 10$ mA; $I_{S2} = 15$ mA; $E_3 = 1$ V.

7.39. Zadatak 7.20 rešiti metodom pretvaranja generatora (naponski u strujni i obrnuto).

7.40.



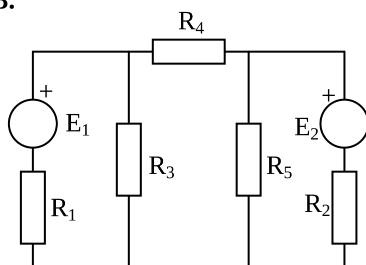
Sl.7.40.

U kolu (mreži) prikazanom na slici 7.40. poznato je:
$I_{S3} = 5$ A; $I_{S4} = 4$ A; $I_{S6} = 3$ A; $E_2 = 10$ V; $E_5 = 20$ V; $R_1 = 3\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_3 = 10\ \Omega$; $R_4 = 5\ \Omega$; $R_5 = 1\ \Omega$ i $R_6 = 15\ \Omega$.
Izračunati struje u svim granama kola i snage svih otpornika i svih generatora.
Koristiti se kombinovanom metodom : pretvaranje generatora (strujnih u naponske) i metodom konturnih struja.

7.41. Zadatak 7.1. rešiti metodom superpozicije.

7.42. Zadatak 7.29. rešiti metodom superpozicije.

7.43.

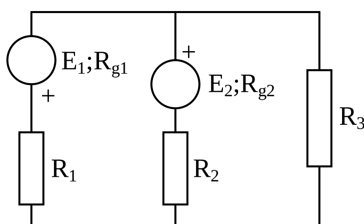


Sl.7.43

Za kolo, prema slici 7.43, naći struje kroz sve grane.
Zadatak rešiti metodom superpozicije.

Brojni podaci:
$E_1 = 2$ V: $E_2 = 10$ V; $R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 1\ \Omega$; $R_3 = R_4 = 5\ \Omega$; $R_5 = 4\Omega$.

7.44.

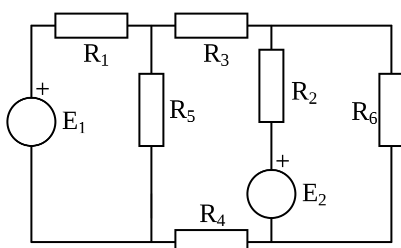


Sl.7.44

U kolu na slici 7.44. izračunati struje u svim granama, primenom metode superpozicije.

Brojni podaci:
$E_1 = 18$ V; $E_2 = 21$ V; $R_{g1} = 1\ \Omega$; $R_{g2} = 0\ \Omega$; $R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 9\ \Omega$; $R_3 = 6\ \Omega$.

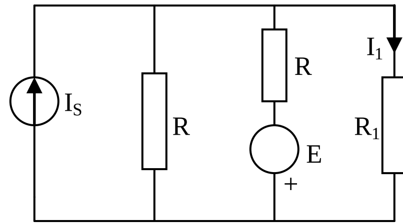
7.45.



Sl.7.45.

Prema slici 7.45. date su sledeće vrednosti:
$E_1 = 20$ V; $E_2 = 10$ V; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 6\ \Omega$; $R_3 = R_4 = 3\ \Omega$; $R_5 = 4\ \Omega$; $R_6 = 8\ \Omega$.
Izračunati sve struje u granamam koristeći metodu superpozicije.

7.46.



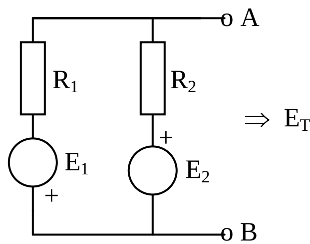
Sl.7.46

Jedan naponski i jedan strujni generator vezani su kao na slici 7.46. Odrediti struju I_1 koja prolazi kroz otpornik R_1 i utvrditi njen smer (da li je dobro odabran).
Brojni podaci: E = 6 V; R = 2 Ω; R_1 = 4 Ω; I_S = 5 A.
Zadatak rešiti:

a) metodom pretvaranja generatora
b) metodom superpozicije.

7.47. Zadatak 7.31. rešiti metodom superpozicije.

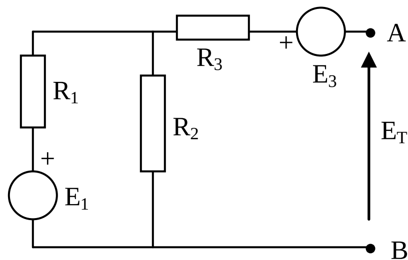
7.48.



Sl.7.48.

Zadano je, prema slici 7.48, E_1 = 50 V; E_2 = 70 V; R_1 = 15 Ω; R_2 = 9 Ω.
Odrediti ems Tevenenovog generatora (ekvivalentnog naponskog generatora) E_T.

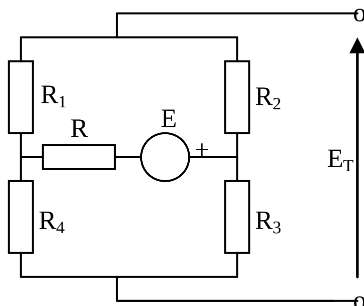
7.49.



Sl.7.49

Dato je, prema slici 7.49: E_1 = 54 V; R_1 = 9 Ω; R_2 = 18 Ω; R_3 = 5 Ω; E_3 = 12 V.
Odrediti ems Tevenena E_T, koja će delovati između tačaka A i B

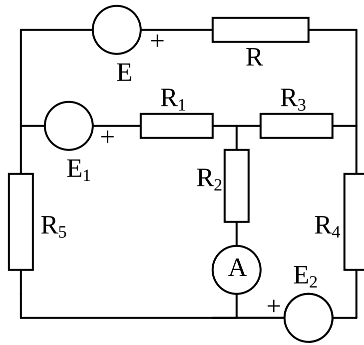
7.50.



Sl.7.50.

Odrediti Tevenenov napon E_T izvora koji je ekvivalentan zadanoj mreže prema slici 7.50.
Brojni podaci:
R_1 = 4 Ω; R_2 = 16 Ω; R_3 = 7 Ω; R_4 = 18 Ω;
R = 0 Ω; E 50 V.

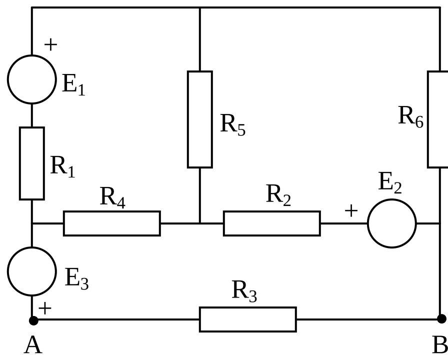
7.51.



Sl.7.51.

Poznato je, prema slici 7.51:
$R = R_1 = 5\Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$; $R_3 = 10\ \Omega$; $R_4 = 3\ \Omega$; $R_5 = 7\ \Omega$; $E = 90$ V; $E_1 = 110$ V; $E_2 = 15$ V.
Koju će vrednost pokazivati idealni ampermatar ?
Zadatak rešiti metodom Tevenena.

7.52.

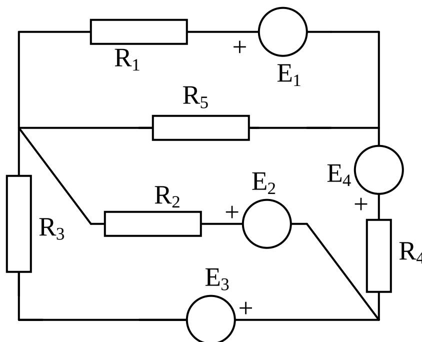


Sl.7.52.

Za kolo prema slici 7.52. naći struju I_3 koja protiče kroz otpornik otpornosti R_3.
Zadatak rešiti metodom Tevenena.

Brojni podaci:
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1\ \Omega$;
$E_1 = 10$ V; $E_2 = 4$ V; $E_3 = 2$ V.

7.53.

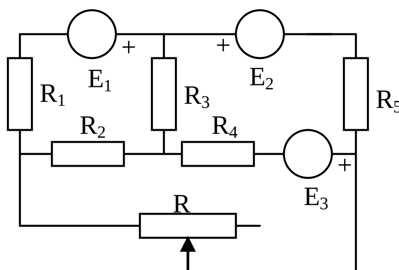


Sl.7.53.

Tevenenovom metodom odrediti struju koja protiče kroz otpornik R_4, prema slici 7.53.

Brojni podaci:
$E_1 = 10$ V; $E_2 = 4$ V; $E_3 = 5$ V; $E_4 = 2$ V;
$R_1 = R_5 = 4\ \Omega$; $R_2 = R_4 = 6\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$.

7.54.

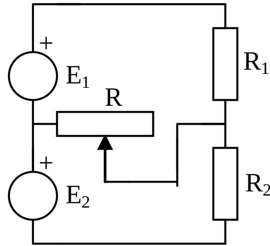


Sl.7.54.

U kolu prikazanom na slici 7.54. otpornik R ima promenljivu otpornost. Odrediti:
a) maksimalnu snagu na promenljivom otporniku,
b) maksimalnu struju kroz promenljivi otpornik.

Brojni podaci: $E_1 = 5$ V; $E_2 = 3$ V; $E_3 = 5$ V;
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\ \Omega$.

7.55.



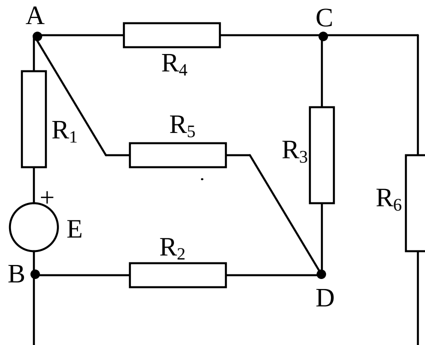
Sl.7.55

Dato je kolo prema slici 7.55. Odrediti:

a) maksimalnu snagu na promenljivom otporniku R,
b) maksimalnu struju koja prolazi kroz otpornik R

Brojni podaci:
$E_1 = 70$ V; $E_2 = 20$ V; $R_1 = 30\ \Omega$; $R_2 = 60\ \Omega$.

7.56.

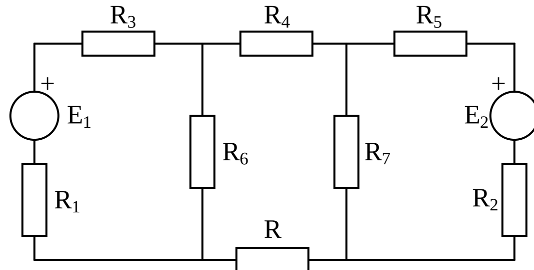


Sl.7.56.

Odrediti napon između tačaka C i D u kolu prikazanom na slici 7.56.

Brojni podaci:
$E = 10$ V; $R_1 = R_5 = R_6 = 2\ \Omega$; $R_2 = R_4 = 6\ \Omega$; $R_3 = 5\ \Omega$.
(Primeniti Tevenenovu metodu)

7.57.

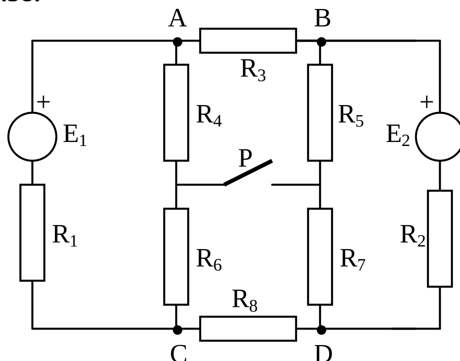


Sl.7.57.

Odrediti vrednost otpornosti R u kolu prikazanom na slici 7.57, tako da snaga koju on prima bude maksimalna. Kolika je ta snaga ?

Brojni podaci :
$E_1 = 120$ V; $E_2 = 80$ V; $R_1 = 2\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$; $R_3 = 4\ \Omega$; $R_4 = R_7 = 10\ \Omega$; $R_5 = R_6 = 6\ \Omega$.

7.58.



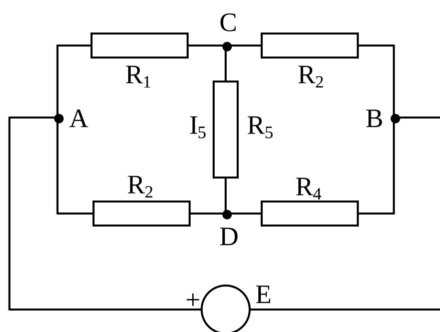
Sl.7.58.

Odrediti struju I_3 u otporniku R_3, prema slici 7.58, ako je:

a) prekidač P otvoren
b) prekidač P zatvoren.

Brojni podaci: $E_1 = 12$ V; $E_2 = 24$ V; $R_1 = R_2 = 5\ \Omega$; $R_3 = R_4 = R_5 = 15\ \Omega$; $R_6 = R_7 = 20\ \Omega$; $R_8 = 10\ \Omega$.
(Zadatak rešiti metodom Tevenena.)

7.59.

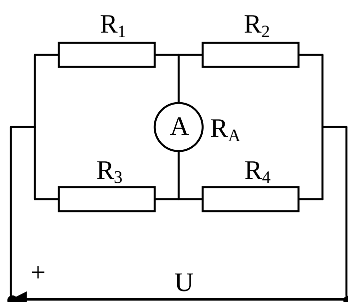


Sl.7.59.

Odrediti struju I_5 koja prolazi kroz otpornik R_5, prema slici 7.59, koristeći metodu Tevenena.

Brojni podaci:
E = 2 V (idealni naponski generator);
$R_1 = 10\ \Omega$; $R_2 = 20\ \Omega$; $R_3 = 30\ \Omega$; $R_4 = 15\ \Omega$;
$R_5 = 40\ \Omega$.

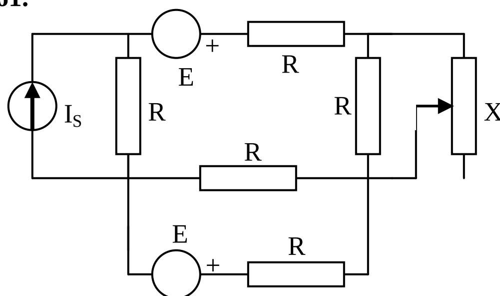
7.60.



Sl.7.60.

Odrediti pokazivanje ampermetra, prema slici 7.60, ako je poznato:
U = 50 V; $R_1 = 3\ \Omega$; $R_2 = 7\ \Omega$; $R_3 = 4\ \Omega$; $R_4 = 6\ \Omega$;
$R_A = 0{,}5\ \Omega$.
Zadatak rešiti metodom Tevenena.

7.61.



Sl.7.61

Otpornik označen sa X na sl.7.61 je promenljiv njegov opseg promene iznosi od 0 Ω do 100 Ω.

a) Nacrtati zavisnost jačine struje kroz taj otpornik [$I_X = f(X)$];
b) Snage generatora u funkcije njegove otpornosti

Zadatak rešiti kombinacijom metode Tevenena i metode pretvaranja generatora.
Brojni podaci: $I_S = 1$ A; E = 10 V; R = 50 Ω.

7.62. Zadatak 7.20 rešiti metodom Tevenena.

7.63. Odrediti parametre Nortonovog generatora (I_N i R_N) za zadatak 7.48.

7.64. Odrediti ekvivalentni Nortonov generator (I_N i R_N) za zadatak 7.49.

7.65. Za zadatak 7.50. odrediti parametre ekvivalentnog Nortonovog generatora.

7.66. Rešiti zadatak 7.59 koristeći Nortonovu metodu.

7.67. Rešiti zadatak 7.60 primenom Nortonove metode.

7.68. Zadatak 7.61 rešiti koristeći Nortonovu metodu.

7.69. Rešiti zadatak 7.56 koristeći se metodom Nortonovog generatora (strujni generator).

7.70. Zadatak 7.58 rešiti pomoću Nortonovog generatora.

8. METODA SIMETRIČNOSTI

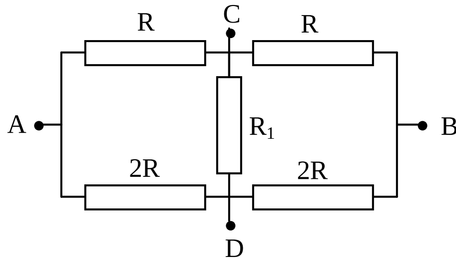
Ako su kola (složena ili prosta) simetrično opterećena (ravnomerno raspoređena), tada se pri rešavanju takvih kola traže tačke u kolu koje su na istom potencijalu. Kada smo to odredili zadatak se dalje može raditi na dva načina, i to:

1) Sve tačke na istom potencijalu kratko spojimo (otpor jednak nuli), a otpore između tih tačaka isključimo, i zadatak nastavimo da rešavamo;
2) Isto kao pod 1) sa tom razlikom što izbacimo kratku vezu (otpor beskonačan).

Kako je svejedno koliki je otpor (nula ili beskonačno) kojeg vežeme između tačaka istog potencijala, kroz tu granu neće teći nikakva struja (nema napona na krajevima otpornika), a samim time svejedno je koju ćemo varijantu odabrati. Uzima se ona koja je sa stanovišta rešavanja zadatka jednostavnija (praktičnija).

Z A D A C I :

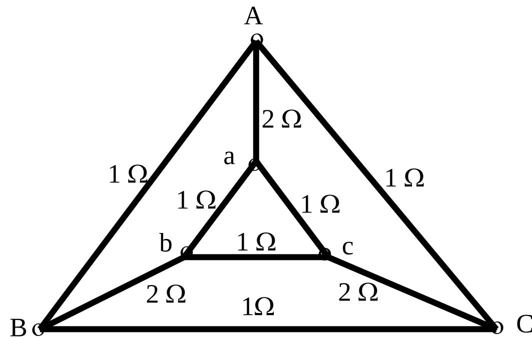
8.1.



Sl.8.1.

Ako je prema slici 8.1, R = 10 Ω a R_1 = 20 Ω, odrediti koliki je otpor između tačaka:
a) A i B b) C i D.
Koliko će iznositi otpor ako se otpor R_1 uveća za pet puta ? Rešenje prokomentarisati.

8.2.

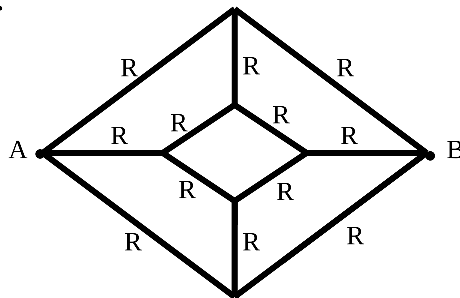


Sl.8.2.

Na slici 8.2 spojeno je 9 otpornika sa vrednostima prikazanim na slici. Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka:

a) A i C;
b) a i c;
c) A i a

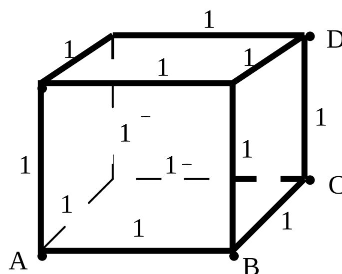
8.3.



Sl.8.3.

Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B u kolu prikazanom na slici 8.3, ako su svi otpori jednaki i iznose po 10 Ω

8.4.

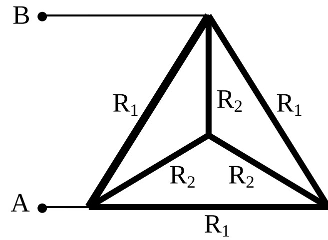


Sl.8.4.

Dvanaest otpornika od po 1 Ω čine ivice jedne kocke, prema slici 8.4.
Izračunati ekvivalentnu otpornost između sledećih tačaka:
a) A i B (dva susedna temena);
b) A i C (dva temena koja leže na kraćoj dijagonali);
c) C i D (dva temena koja leže na dužoj dijagonali).

Napomena! Primeniti metodu simetričnosti.

8.5.

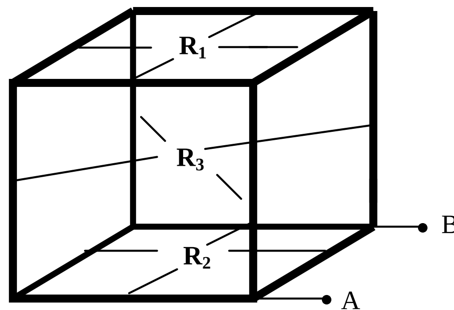


Sl.8.5.

Izračunati ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B, prema slici 8.5, ako je : R_1 = 20 kΩ; R_2 = 10 kΩ.

Koristiti metodu simetrije.

8.6.

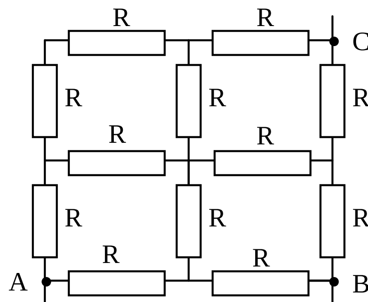


Sl.8.6.

Za kolo prema slici 8.6 (kocka—sa dvanaest otpora koji čine stranice kocke), izračunati ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B.

Brojni podaci:
R_1 = 20 kΩ; R_2 = 10 kΩ ; R_3 = 30 kΩ.

8.7



Sl.8.7.

Dvanaest otpora istih otpornosti vezano je prema slici 8.7. Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka:

a) A i B;
b) A i C.

Brojni podaci: R = 5 Ω.

9. ELEKTRIČNA KOLA SA KONDENZATORIMA I OTPORNICIMA

Ako se u električnim kolima istovremeno nalaze kondenzatori i otpornici, pri rešavanju takvih kola kondenzatori se predhodno uklone (kroz njih ne teče struja)i izračuna napon između tačaka na koje je kondenzator bio priključen. Ovako izračunat napon predstavlja napon koji će vladati na kondenzatoru kada se on ponovo vrati na svoje mesto.

Kada se kondenzatori nalaze u složenim kolima, tada neće biti struje ni u jednoj grani kola u kojoj je vezan kondenzator (kolo u prekidu). Podrazumeva se da će kondenzatori biti opterećeni određenom količinom naelektrisanja (Q = U C). Opterećenja kondenzatora tretirati slično kao i struje kod otpornika.
To znači da će kod redne veze kondenzatora opterećenja biti ista, a kod paralelne veze, ukupna količina naelektrisanja je jednaka zbiru pojedinačnih, **primeniti prvi Kirhofov zakon (ΣQ = 0).**

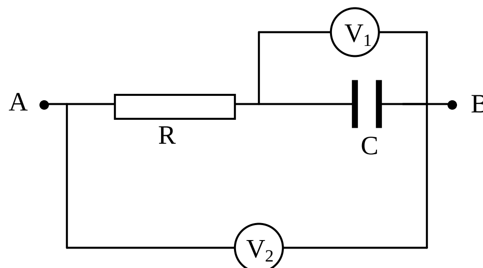
Kod redne veze kondenzatora ukupni napon je jednak zbiru pojedinačnih, tj. **primenjuje se drugi Kirhofov zakon [ΣE = Σ (Q/C)].**
Postupak rešavanja ovakvih kola je isti kao kod samih otpora, s tom razlikom što se za pad napona na kondenzatoru računa sa naponom koji iznosi:

$$U_C = \frac{Q}{C}[V]$$ ($I \Rightarrow Q$, odnosno $R \Rightarrow 1/C$).

Navedene konstatacije se odnose u onom slučaju kada je kondenzator napunjen, tj. on se nalazi u stacionarnom stanju. Kako je vreme punjenja i pražnjenja trenutno, sledi da su kondenzatori u električnim kolima uglavnom u stacionarnom stanju. Proces punjenja i pražnjenja je vrlo složen (prelazne pojave), samim tim to je predmet izučavanja na ozbiljnijem nivou (više i visoke institucije).

Z A D A C I :

9.1.



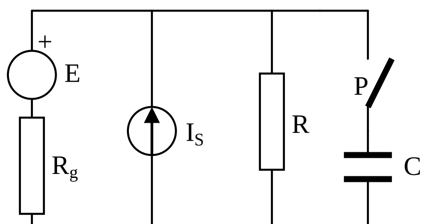
Sl.9.1.

Šta pokazuje voltmetar V_2, prema slici 9.1,ako jevoltmetar V_1 izmerio napon na krajevima kondenzatora od $U_C = 24$ V? Pretpostavimo da je R = 10 Ω, i da su voltmetri idealni.

9.2. Kondenzator kapacitivnosti C = 0,5 μF vezan je za krajeve naponskog generatora ems E = 100 V, i unutrašnjeg otpora $R_g = 1\ \Omega$. Koliki je napon na krajevima priključenog kondenzatora ?

9.3. Izračunati energiju koju sadrži kondenzator u predhodnom zadatku. O kojoj se energiji radi ?

9.4.



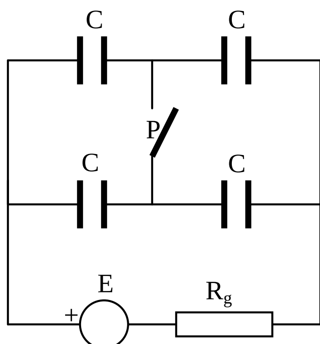
Sl.9.4.

Izračunati opterećenje i energiju kondenzatora C na slici 9.4 kada se zatvori prekidač P i uspostavi stacionarno stanje (napuni kondenzator).

Brojni podaci:

E = 1 000 V; $R_g = 8\ \Omega$; $I_S = 0{,}2$ A; R = 2 000 Ω; C = 50 μF.

9.5.



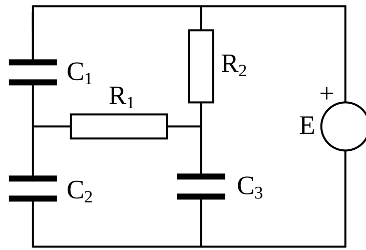
Sl.9.5.

Kolika su opterećenja svih kondenzatora, prema slici 9.5 ? Kako će se ta opterećenja promeniti kada se zatvori prekidač P ?
Rešenje obrazložiti.

Brojni podaci:

E = 100 V; $R_g = 10\ \Omega$; C = 50 μF.

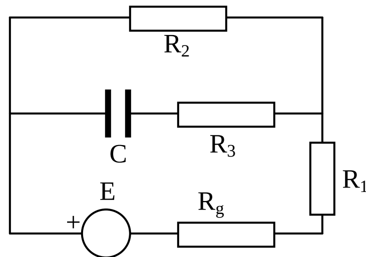
9.6.



Sl.9.6.

Odrediti prema slici 9.6 opterećenja sva tri kondenzatora.
Brojni podaci: E = 100 V; $R_1 = R_2 = 12\ \Omega$;
$C_1 = C_3 = 100$ nF; $C_2 = 25$ nF.
Rešenja obrazložiti.

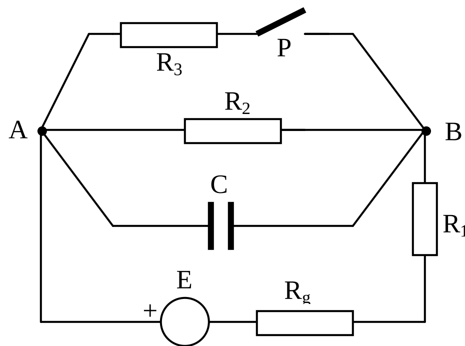
9.7.



Sl.9.7.

Koliki je napon na kondenzatoru kapacitivnosti C u kolu na slici 9.7 ? Kolika će biti količina naelektrisa na pločama kondenzatora (opterećenje) ?
Brojni podaci:
E = 3,6 V; $R_g = 1\ \Omega$; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 7\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$;
C = 2 μF

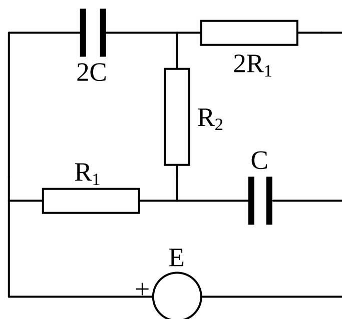
9.8.



Sl.9.8.

Dato je kolo prema slici 9.8. Ems izvora je E = 10 V, a njegov unutrašnji otpor iznosi $R_g = 2\ \Omega$. Otpori otpornika su: $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$; $R_3 = 4\ \Omega$. Kolika će količina elektriciteta proteći kroz granu sa kondenzatorom kada se uključi prekidač P ako je njegov kapacitet C = 9,9 μF ?

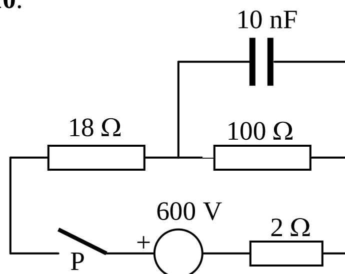
9.9.



Sl.9.9.

Kolika je ems izvora u kolu prema slici 9.9 ako je poznato da je na kondenzatoru kapaciteta 2C količina naelektrisanja jednaka 3Q, a na kondenzatoru kapaciteta C količina naelektrisanja iznosi 2Q ?

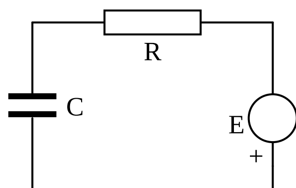
9.10.



Sl.9.10.

Na slici 9.10 je prikazano RC kolo. Odrediti jačinu struje koju daje izvor u stacionarnom stanju (napunjen kondenzator) i količinu naelektrisanja na pločama kondenzatora.
Brojni podaci su navedeni na slici.

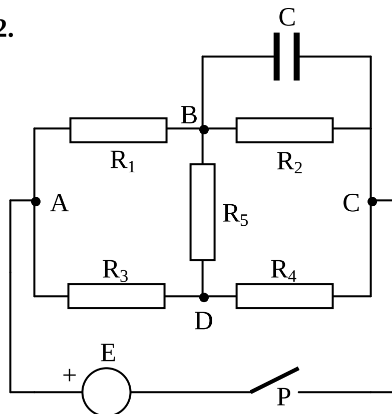
9.11.



Sl.9.11.

Električno kolo prema sl.9.11 sadrži: izvor, otpornik R = 50 Ω i pločasti kondenzator čije ploče imaju površinu S = 4 cm^2**.** Rastojanje između ploča može da se menja Ako se ploče približe do međusobnog kontakta u kolu teče struja I = 0,2 A.
Koliko će biti naelektrisanje Q na pločama ako se one razdvoje na rastojanje d = 0,2 mm ? Unutrašnji otpor izvora je R_g = 5 Ω, a dielektrična konstanta vakuuma je $\varepsilon_o = 8{,}54 \cdot 10^{-12}$ F/m.

9.12.

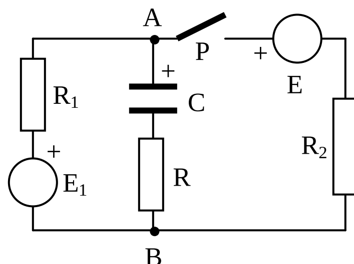


Sl.9.12.

Za kolo predstavljeno na slici 9.12, odrediti energiju kondenzatora po uspostavljenom stacionarnom stanju (završen proces punjenja).

Brojni podaci:
R_1 = 4 Ω; R_2 = 1,8 Ω; R_3 = 5 Ω; R_4 = 3,25 Ω;
R_5 = 11 Ω; E = 200 V; C = 100 μF.

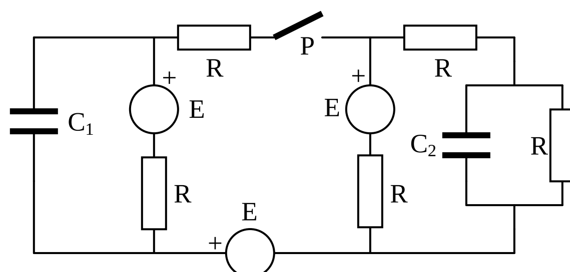
9.13.



Sl.9.13.

U kolu prema sl.9.13, prekidač P je zatvoren. Odrediti proteklu količinu elektriciteta kroz kondenzator C od trenutka otvaranja prekidača P do uspostavljanja stacionarnog stanja (količina elektriciteta u stanju mirovanja).
Brojni podaci:
E_1 = 10 V; E_2 = 5 V; R_1 = R_2 = R = 10 Ω;
C = 10 μF

9.14.



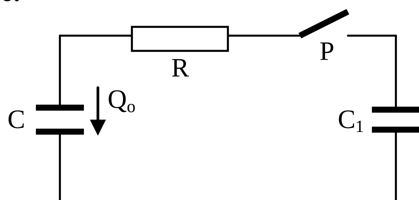
Sl.9.14.

Za kolo prema slici 9.14, odrediti protekle količine naelektrisanja kroz kondenzatore posle zatvaranja prekidača P.

Brojni podaci:
$E = 1$ KV; $C_1 = 2$ μF; $C_2 = 3$ μF;
$R = 50\ \Omega$.

9.15. Neopterećen kondenzator kapacitivnosti C priključen je na krajeve strujnog generatora jačine struje I_S i unutrašnje otpornosti R_S. Kolika je energija W_C sadržana u kondenzatoru u stacionarnom stanju ?
Brojni podaci: $I_S = 15$ A; $R_S = 100\ \Omega$; $C = 50$μF.

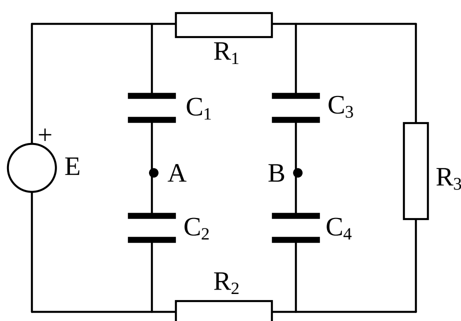
9.16.



Sl.9.16.

Kondenzator kapaciteta $C = 0{,}5$ μF vezan je prvo kratkotrajno na izvor ems $E = 200$V, pa u kolo prema sl. 9.16. Drugi kondenzator u kolu ima kapaciteta C_1=2 μF, i nije bio prvobitno opterećen. Odrediti energiju sadržanu u kolu pre i posle zatvaranja prekidača.Da li ta energija zavisi od otpornosti R? Da li nastala toplotna energija zavisi od R ? (*R fizički nije nikad jednak nuli*)

9.17.



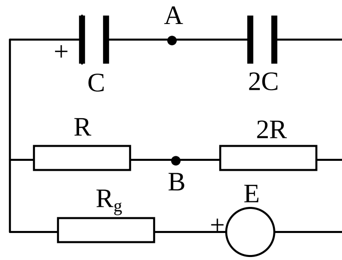
Sl.9.17.

Četiri kondenzatora vezana su kao na slici 9.17. Odrediti napone i količine naelektrisanja na kondenzatorima. Koliki je napon U_{AB} između tačaka A i B ?

Brojni podaci:
$E = 120$ V; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 8\ \Omega$; $R_3 = 36\ \Omega$;
$C_1 = 40$ μF; $C_2 = 60$ μF; $C_3 = C_4 = 50$ μF.

9.18. Rešiti predhodni zadatak, uz pretpostavku da su tačke A i B kratko spojene ($V_A = V_B$).

9.19.

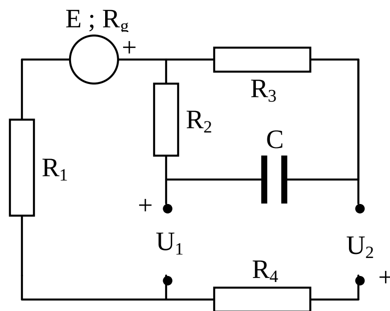


Sl.9.19..

Za kolo prikazano na slici 9.19, izračunati napon U_{AB} između tačaka A i B, kada je nastupilo stacionarno stanje.

Brojni podaci:
E = 100V; $R_g = 0\ \Omega$ (idealni nap. generator);

9.20.



Sl.9.20.

Za kolo na slici 9.20 izračunati:

a) sve struje;
b) opterećenje kondenzatora Q;
c) korisnu snagu P koju daje generator ems E.

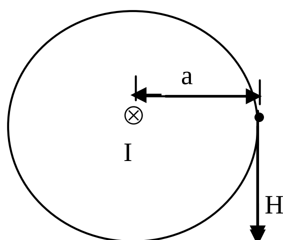
Brojni podaci:
E = 40 V; $U_1 = 80$ V; $U_2 = 120$ V; $R_1 = 8\ \Omega$;
$R_2 = 10\ \Omega$; $R_3 = 8\ \Omega$; $R_4 = 2\ \Omega$; $R_g = 2\ \Omega$; C = 5 μF.

MAGNETIZAM

1. JAČINA MAGNETNOG POLJA

1.1 R A V A N   P R O V O D N I K

a) JAČINA MAGNETNOG POLJA OKO RAVNOG PROVODNIKA (SPOLJA)



Sl. 1.

Jačina magnetnog polja kod ravnog provodnika, velike dužine (beskonačne) određuje se po Bio—Savarovom zakonu (Sl.1.)

$$\mathbf{H = \frac{I}{2a\pi}\left[A/m\right]}$$;

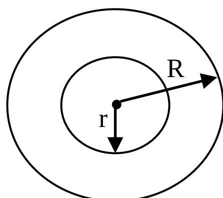
gde je :

H…..jačina magnetnog polja (A/m)
I……jačina struje (A)
2aπ...srednja dužina magnetne linije koja prolazi kroz datu tačku (m)
a……rastojanje tačke od ravnog provodnika (m)

Bio – Savarov zakon se može primeniti kod onih ravnih provodnika kod kojih je dužina mnogo veća od udaljenosti tačke u kojoj se traži jačina magnetnog polja. Lako je iz navedenog obrasca ustanoviti da je: I = 2aπH, pa je proizvod jačine magnetnog polja i dužine magnetne linije konstantan, tj.

2aπH = konst. (H·a = konst.) uz stalnu struju u ravnom provodniku.

b) JAČINA MAGNETNOG POLJA U UNUTRAŠNJOSTI PROVODNIKA



Sl.2.

Ako u površini pravolinijskog provodnika $R^2\pi$ zamislimo deo površine $r^2\pi$ (Sl. 2.), tada će, pod uslovom iste gustine struje, biti :

$$\mathbf{J = \frac{I}{R^2\pi} = \frac{I'}{r^2\pi}}$$

gde je: I′..deo ukupne struje obuhvaćen površinom $r^2\pi$
J …. Gustina struje (A/m^2)

Iz navedenih relacija sledi: $\frac{I'}{I} = \frac{r^2}{R^2}$; odnosno $I' = \frac{r^2}{R^2} I = 2\pi r H$

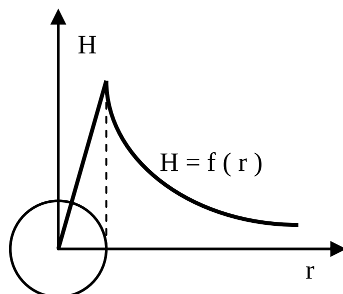
sledi konačan obrazac za dređivanje jačine magnetnog polja u unutrašnjosti provodnika :

$$\mathbf{H = \frac{Ir}{2R^2\pi}\left[A/m\right]}$$; gde je:

r….. udaljenost bilo koje tačke od centra provodnika u unutrašnjosti provodnika.
R…..poluprečnik provodnika

(r)

r



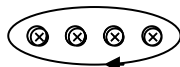
Sl.3.

Analizom navedenog izraza može se zaključiti da je jačina magnetnog polja u samom centru provodnika jednaka nuli, i da idući ka samoj površini jačina magnetnog polja linearno raste (Sl. 3.). Dakle, polje je najače na samoj površini provodnika, dok sa udaljavanjem od same površine ka vani polje opada prema nuli po hiperboli.

1.2. JAČINA MAGNETNOG POLJA NAVOJA

a) Prstenast navoj (TORUS)

Ako u neposrednoj blizini imamo nekoliko ravnih provodnika kroz koje protiče električna struja, svaki od tih provodnika stvara svoje magnetno polje. Ako su magnetne linije svih provodnika istovremeno obuhvatile sve provodnike, tada će rezultantno polje biti jednako njihovom pojedinačnom zbiru (za iste smerove struja). Sila koja stvara magnetno polje naziva se MAGNETO-MOTORNA sila (magnetopobudna sila ili magnetni napon). Ova sila je analogna elektromotornoj sili (naponu) u električnim kolima.



Sl. 4.

Kako magnetne linije kod ravnog provodnika stvara isključivo električna struja, tada se za magnetomotornu silu (magnetopobudnu) uzima struja tog provodnika, pa je:

M= I, a samim tim jedinica je amper (A).

Ako je to polje rezultat više pravolinijskih provodnika (Sl.4) tada je magnetomotorna sila jednaka :

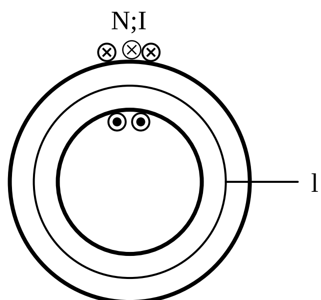
$\mathbf{M = \Sigma I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n}$ (isti smerovi struja) .

Za zatvorene magnetne linije koje obuhvataju istu struju više puta , kao što je slučaj kod navoja, Vredi izraz za magnetomotornu (mms) silu:

$$\mathbf{M = U_\mu = I\,N\ [A/m\,]}$$

gde je N broj navojaka

Karakterističan primer zatvorene magnetne linije koja obuhvata istu struju više puta je prstenast navoj (torus), (prikazan na Sl. 5.)



Sl.5.

Jačinu magnetnog polja navoja (samim tim i torusa) možemo porediti sa jačinom električnog polja kod kondezatora (E = U / d), te sledi:

$$H = \frac{M}{l}\left[A/m\right]$$

gde je : H…. jačina magnetnog polja torusa (A/m)

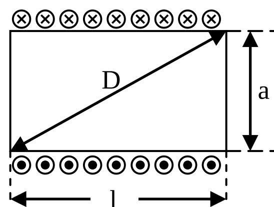
M = I N….magnetomotorna sila (magnetni napon)

l…..srednja dužina magnetnih linija (m)

Konačan obrazac za jačinu magnetnog polja torusa je:

$$\mathbf{H = \frac{IN}{l}\left[A/m\right]}$$

b) Cevast navoj (SOLENOID)



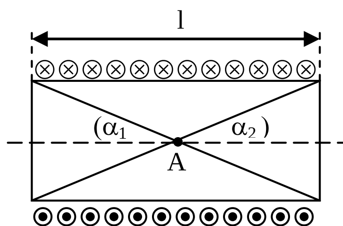
Sl.6.

Ako cevast navoj zamislimo kao deo prstenastog navoja veoma velikog prečnika (beskonačan) tada, će taj deo navoja stvarati proporcionalnu jačinu magnetnog polja u odnosu na ceo torus, tj.

$$\mathbf{H = \frac{IN}{l}\left[A/m\right]}$$

gde je: l…srednja dužina magnetnih linija, a ona je ujedno jednaka dužini solenoida ako nema magnetnih rasipanja i ako je ta dužina mnogo veća od prečnika navoja (a). U protivnom ako dužina navoja nije mnogo veća od prečnika (D<10a), tada se za srednju dužinu magnetnih linija uzima dijagonala solenoida, pa je u tom slučaju jačina magnetnog polja solenoida jednaka :

$$\mathbf{H = \frac{IN}{D} = \frac{IN}{\sqrt{a^2 + l^2}}}\ \text{[A/m]}$$



Sl. 7.

Kod tačnijih proračuna jačina magnetnog polja za bilo koju tačku u solenoidu (Sl. 7.), npr. za tačku A iznosi:

$$H_A = \frac{IN}{l}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right)$$

gde je: - H_A…. jačina magnetnog polja u tački A solenoida
- α_1 i α_2 …uglovi kojeg čine krajnji navojci i središnja osa navojka u tački A

Navedeni izraz (Sl. 7.) može se matematički dokazati (viša matematika). Ako se traži jačina magnetnog polja u samom centru solenoida, tada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, pa je:.

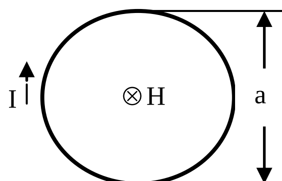
$$\mathbf{H = \frac{IN}{l}\cos\alpha}$$

Za solenoid kod kojeg je dužina l mnogo veća od prečnika a (a zanemarljivo u odnosu na l) ugao $\alpha \cong 0^\circ$, pa predhodni izraz prelazi u oblik :

$$\mathbf{H = \frac{IN}{l}}$$

, što potvrduje tačnost predhodnog izraza.

c) Navojak



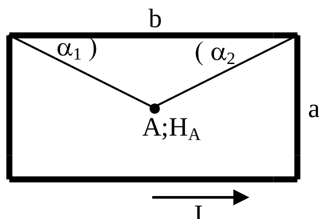
Sl. 8.

Ako solenoidu skidamo navojak po navojak, na kraju ćemo doći do jednog navojka , Sl. 8, kod kojeg se za srednju dužinu navojka uzima njegova dijagonala pa je :

$$\mathbf{H = \frac{I}{a}\left[{}^{A}/_{m}\right]}$$

, jer je **N = 1** a **l = a**.

Za navojak pravougaonog oblika (četiri ravna provodnika), dužine stranica navojka nisu veoma velike u odnosu na udaljenost centra provodnika od stranica (a i b). Kod ovakvog navojka, a samim tim i kod ravnih provodnika manjih dužina. jačina magnetnog polja u tačci A (Sl.9.) za stranicu b iznosi :



Sl.9.

$$H_A = \frac{I}{2a\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right) \text{ , za } \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow$$

$$H_A = \frac{I}{2a\pi}\cos\alpha$$

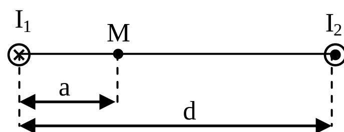
gde je: α……. ugao između provodnika i pravca koji spaja datu tačku (A).

Ako je provodnik veoma dug, tada ugao $\alpha \approx 0^\circ$, a samim tim dati izraz je jednak : $H_A = I / 2a\pi$, što potvrđuje tačnost predhodnog izraza (Bio Savarov zakon). To dalje znači, da kod pravougaonog navojka jačinu magnetnog polja izračunamo za četiri ravna provodnika manjih dužina i to saberemo
Ako je to kvadrat jednostavno izračunamo jačinu polja za jednu stranicu i množimo sa 4. Kod pravougaonika se izračuna jačina polja za stranicu a i b pa to saberemo. Taj zbir, na kraju, množimo sa 2

ZADACI:

1.1 Izračunati jačinu magnetnog polja na rastojanjima a = 1 , 2 i 5 cm od dugog pravolinijsko provodnika kojim teče struja jačine I = 10 A.

1.2.



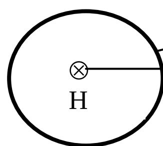
Sl.1.2.

Odrediti intenzitet i smer magnetnog polja u tački M koja se nalazi između dva paralelna vrlo duga pravolinijska provodnika (Sl. 1.2.) kroz koje protiču struje I_1 i I_2. Rastojanje između provodnika je d, a udaljenost tačke M od prvog provodnika je a.

Brojni podaci: I_1 = 10 A, I_2 = 20 A, d = 50 cm i a = 5 cm.

⊗….. simbol za ulaz (u pravcu pogleda)
⦿…… simbol izlaza (prema nama).

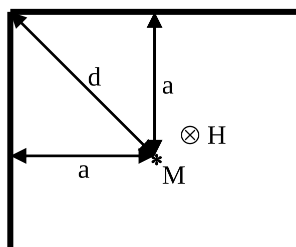
1.3.



Sl. 1.3.

Kolika jačina struje protiče kroz kružni provodnik, ako je jačina polja u centru kruga poluprečnika a = 10 cm, H = 20 A/m. Odrediti smer struje, ako je pravac polja, kao na slici 1.3,usmeren u pravcu pogleda.

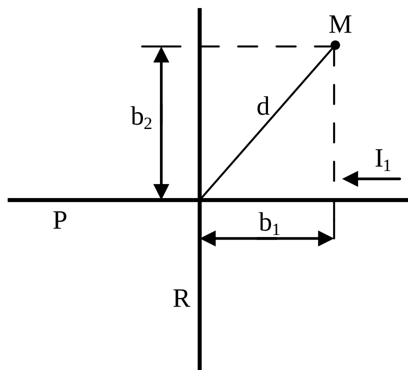
1.4.



Sl.1.4.

Dat je vrlo dug provodnik sa strujom I, savijen pod pravim uglom. Jačina magnetnog polja u tački M, čiji je položaj u odnosu na provodnik dat na Sl. 1.4, iznosi H = 600 A/m. Smer polja je dat na slici. Ako je d = 14,1 cm, naći jačinu i smer struje u provodniku.

1.5.



Sl.1.5..

Dva izolovana provodnika su ukrštena pod pravim uglom (Sl. 1.5.). Rezultantno polje u tački M iznosi H = 200 A/m. Jačina struje u provodniku P je: I_1 = 50 A, a tačka M je udaljena od provodnika R b_1 =6 cm, a od provodnika P b_2 = 8 cm (d = 10 cm). Izračunati struju I_2 koja protiče kroz provodnik R, i odrediti njen smer ako je :

a) H_1 i H_2 u tački M istog smera
b) H_1 i H_2 u tački M suprotnog smera.

1.6. Izračunati broj navojaka solenoida dužine l = 15 cm, koji stvara polje jačine H = 3 000 A/m pri struji jačine I = 0,5 A.

1.7. Kolika treba da bude jačina struje u kalemu dužine l = 1 m, sa N = 40 navojaka, da bi u njemu jačina magnetnog polja iznosila H = 2 A/m ?

1.8. Koliko navojaka treba da ima navoj da bi sa strujom od I = 3 A stvarao magnetomotornu silu od M = 6000 A ?

1.9. Kolika je jačina magnetnog polja H u vazdušnom međuprostoru nekog magneta, ako je dužina magnetnih linija koje prolaze kroz vazduh l = 8 mm, i ako između polova vlada magnetni napon U_μ = 400 A?

1.10. Kolika je magnetomotorna sila potrebna da se u homogenom polju dužine 15 cm ima jačina magnetnog polja od H = 2000 A/m?

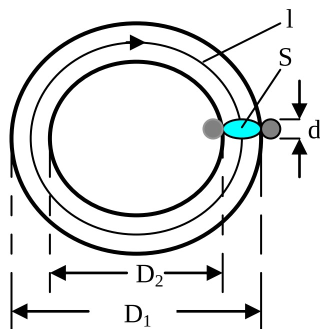
1.11. Kolika je dužina homogenog magnetnog polja ako magnetomotorna od M = 800 A stvara u njemu jačinu magnetnog polja od H = 2500 A/m?

1.12. Magnetomotorna sila od M = 235 A stvara jačinu magnetnog polja H = 500 A/m u prstenaston navoju. Koliki je srednji prečnik prstena?

1.13. U sredini cevastog navoja sa N = 100 navojaka, dugog l = 12 cm, treba da postoji jačina magnetnog polja H = 5000 A/m. Kolika je potrebna struja?

1.14. Solenoid prečnika d = 20 mm i dužine l = 12 cm, ima gust navoj (jedan do drugog) od bakarne žice prečnika d_1 = 0,4 mm (sa izolacijom 0,6 mm). Kolika je jačina magnetnog polja u sredini solenoida kada se navoj priključi na napon od U = 5.4 V?

1.15.

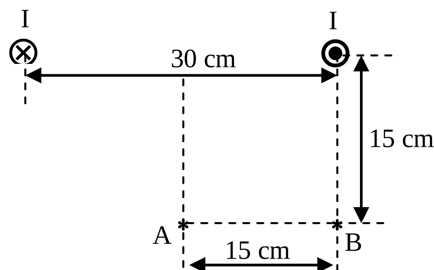


Sl.1.15

Prstenasti navoj sa jezgrom od kartona Sl. 1.15, čije su dimenzije D_1 = 60 mm i D_2 = 50 mm ima gusto namotan navoj (jedan uz drugi) sa N = 300 navojaka od žice prečnika d = 0,8 mm (sa izolacijom) kroz koji protiče struja od I = 1,5 A.
Izračunati jačinu magnetnog polja, i obeležiti smer struje I.

1.16. ∗ Izračunati jačinu magnetnog polja H kojeg stvara veoma dug pravolinijski provodnik, kružnog preseka prečnika 35 mm, kroz koji protiče struja od 350 A,u tačkama: A, B, C i D koje su udaljene od središta provodnika: r_A = 5 mm, r_B = 17,5 mm, r_C = 30 mm i r_D = 70 mm. Na osnovu dobijenih podataka nacrtati dijagram zavisnosti H od r i dati određeni komentar.

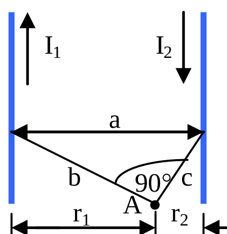
1.17.



Sl.1.17.

Naći rezultantno magnetno polje analitički (računski) i grafički (razmera 1 cm = 1 A/m) u tačkama A i B, prema Sl. 1.17, ako kroz provodnike protiče struja od 15 A u suprotnim smerovima.

1.18.

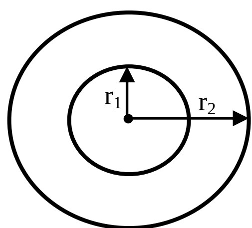


Sl.1.18.

Kroz dva međusobno paralelna pravolinijska provodnika beskonacnih duzina, proticu struje I_1 = 2 A i I_2 = 3 A u suprotnim smerovima (Sl.1.18.). Ako je rastojanje između provodnika a = 5 cm, odrediti jacinu magnetnog polja u tački A koja je udaljena od prvog provodnika b = 4 cm, a od drugog c = 3 cm.
Napomena: duzine a, b i c čine jedan pravougli trougao.

1.19. Ako kroz pravolinijski provodnik velike dužine prečnika R = 10 cm protiče struja od I = 10 A, odrediti u kojim će tačkama jačina magnetnog polja biti najjača a u kojim najslabija i kojeg je intenziteta?

1.20.∗

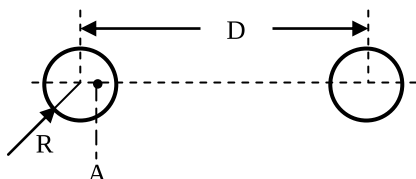


Sl.1.20

Koaksijalnim provodnikom čiji je presek dat na Sl.1.20. teče struja jačine I.Kolika je jačina magnetnog polj na vanjskoj a kolika na unutrašnjoj površini provodnika, ako je provodnik pravolinijski i veoma velike dužine?

Brojni podaci: I = 25 A, r_1 = 7,5 cm a r_2 = 10 cm.

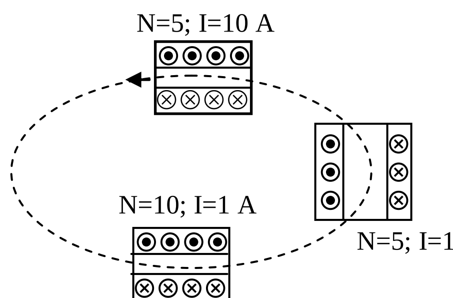
1.21.∗



Sl.1.21

Dva duga ravna provodnika poluprečnika R = 4 cm su paralelna i kroz njih protiču iste struje I = 200 A u istom smeru. Odrediti jačinu magnetnog polja u tački A (r_A =2 cm) ako je rastojanje između središta provodnika D = 10 cm (Sl.1.21.).

1.22.



Sl.1.22.

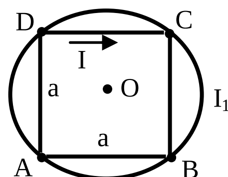
Odrediti veličinu magnetomotorne sile po konturi. Broj navojaka smer i jačina struje, kao i pozitivni smer obilaska konture (magnetne linije) naznačen je na Sl. 1.22.

1.23 ∗ a) Kolika je jačina magnetnog polja u središtu navojka kružnog oblika načinjenog od provodnika, ako u njemu postoji stalna električna struja intenziteta I = 5 A i ako je prečnik navojka d = 5 cm?

b) Kolika je jačina magnetnog polja u tački koja leži na srednjoj normali na odstojanjua = 2,5 cm i ako u njemu postoji struja stalnog intenziteta I = 5 A? Provodnik je u stvari ispruženi navojak (pod tačkom a).

c) Koliki je odnos jačina magnetnih polja u predhodnim slučajevima (pod a i pod b), i izvesti na osnovu toga određeni zaključak.

1.24 ∗



Sl.1.24

Oko kvadratnog zatvorenog kola sa strujom I = 3,14 A obavijeno je kružno zatvoreno kolo sa strujom I_1 (Sl.1.24). Smer struje u kvadratnom kolu naznačen je na slici. Kolika je struja I_1 i u kome smeru ona teče da bi magnetna indukcija u središtu kruga O bila jednaka nuli?

1.25. Dva paralelna pravolinijska provodnika velikih dužina nalaze se na međusobnom rastojanju od 25 cm. Ako kroz provodnike protiču struje I_1 = 10 A i I_2 =15 A, u istom smeru, odrediti tačku u kojem će jačina magnetnog polja biti jednaka nuli.

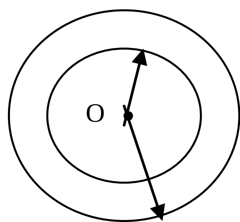
1.26..Rešiti predhodni zadatak uz pretpostavku da su smerovi struja u provodnicima suprotni.

.

1.27. Na kojem se rastojanju nalaze dva pravolinijska paralelna provodnika velikih dužina ako njihove struje, I_1 = 10 A i I_2 = 25 A, stvaraju u tački A istu jačinu magnetnog polja i istog smera $H_1 = H_2$ = 100 A/m

1,28. Ponoviti predhodni zadatak uz pretpostavku da su jačine magnetnih polja H_1 i H_2 suprotnih smerova.

1.29.∗

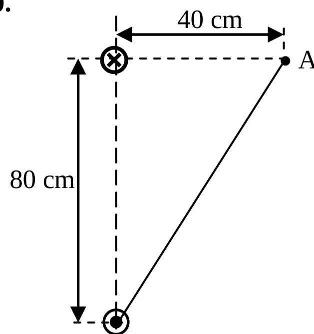


Sl.1.29.

Cilindričnim provodnikom teče struja od 20 A. Ako je poluprečnik šupljine 5 cm, a spoljašnji 10 cm, odrediti jačine magnetnih polja u tačkama 0,A,B,C i D. Tačka 0 je u stvari središte (centar) provodnika, a tačke A,B,C, i D su od centra udaljene po navedenom redu 5, 10, 20 i 50 cm.

Na osnovu dobijenih rezultata nacrtati grafik H = f (r), koji predstavlja zavisnost jačine magnetnog polja od rastojanja te tačke u odnosu na centar. Dati komentar koji je zasnovan na grafikonu. Presek provodnika dat je na Sl.1.29.

1.30.



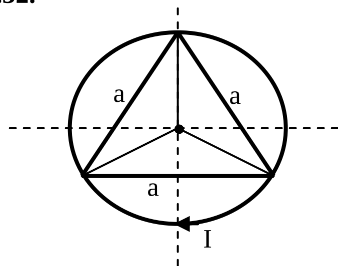
Sl.1.30.

Dva paralelna beskonačno duga provodnika (Sl.1.30.), kroz koje protiče ista struja jačine I = 200 A, ali sa suprotnim smerovima, postavljeni su na međusobnom rastojanju od 80 cm.
Naći jačinu, pravac i smer magnetnog polja u tački A.

1.31. ∗ Odrediti intenzitet, pravac i smer jačine magnetnog polja u središtu ravnostranog šestougaonog kola, kada je u kolu uspostavljena stuja I, smera kazaljke na satu. Stranica šestougaonika je a, a kolo se nalazi u vazduhu.

Brojni podaci: I = 50 A; a = 10 cm

1.32. ∗



Sl.1.32.

Kolo oblika kao na slici1.32, predstavlja jednakostranični trougao oko koga je opisana kružnica. U kolu kružnog oblika uspostavljena je struja I naznačenog smera. Odrediti intenzitet i smer struje I_1 u kolu truoglastog oblika, da bi rezultantno magnetno polje u centru bilo jednako nuli. Oba kola se nalaze u vazduhu.

Brojni podaci: I = 50 A;

1.33.∗ Struja jačine I = 20 A protiče kroz vrlo dugačak pravolinijski provodnik savijen pod pravim uglom, koji se nalazi u vazduhu. Izračunati jačinu magnetnog polja u tački A koja se nalazi na simetrali pravog ugla, udaljena od temena ugla 10 cm.

2. MAGNETNA INDUKCIJA

Pored intenziteta polja H (vektora H), koja predstavlja osnovnu karakteristiku magnetnog polja u nekoj tački tog polja, uvedena je i veličina koja se naziva **MAGNETNA INDUKCIJA**. Ona se označava slovom B i predstavlja vektorsku veličinu. To znači da se za svaku tačku u magnetnom polju pored jačine polja H za tu tačku može odrediti i njena magnetna indukcija B. Magnetno polje se može predstaviti H linijama, kao i B linijama. U vazduhu, izvan magneta, ovi su vektori kolinearni. U samom magnetu B linije nastavljaju svoju neprekidnu putanju, dok H linije u samom magnetu imaju novi početak (prekidne su). Kako je za praktične potrebe bitno polje van magneta, sledi da B linije određuju H linije i obrnuto . To znači, da je jačina magnetnog polja i magnetna indukcija u određenoj vezi.

2.1. ODNOS IZMEĐU B I H

2.1.1. Nemagnetni materijali

Kod nemagnetnih materijala je ovaj odnos u svakoj tački magnetnog polja konstantan i on iznosi:

$$\mu_o = \frac{B}{H_o} \left[H/m \right]$$

gde je: B…..magnetna indukcija (gustina magnetnih linija) [T]
H_0…..jačina magnetnog polja nemagnetnog materijala (vakuuma) [A/m]
μ_0…..magnetna propustljivost, permeabilnost (permeabilitet) [H/m]

2.1.2 Magnetni materijali (feromagneti)

Kod magnetnih materijala odnos između B i H zavisi kako od vrste magneta (jezgre) tako i od stepena njenog opterećenja (zasićenja). Taj odnos, koji nije stalan, iznosi:

$$\mu = \frac{B}{H} \left[H/m \right]$$

gde je:

μ …..magnetna permeabilnost (permeabilitet) feromagnetnog materijala (H/m).
H….jačina magnetnog polja feromagnetnog materijala (A/m)

Iz predhodnih relacija se može doći do sledećeg izraza::

$$\frac{\mu}{\mu_o} = \frac{H_o}{H} = \mu_r$$

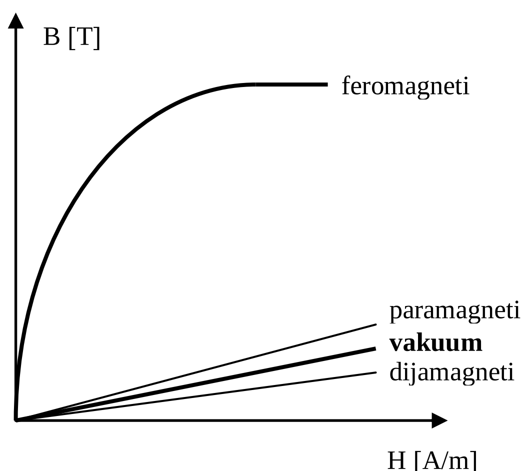
gde je**:** μ_r….. relativna magnetna permeabilnost, koja govori za koliko je jačina magnetnog polja neke sredine smanjena u odnosu na vakuum.
Prema relativnoj magnetnoj permeabilnosti dele se materijali na:
a) dijamagneti ($\mu_r < 1$) / srebro, cink, bizmut…/
b) paramagneti ($\mu_r >$) /aluminijum, platina…./
c) feromagneti ($\mu_r >> 1$) /gvožđe, nikal, kobalt, njihove specijalne legure /

$$\mu = \mu_0 \, \mu_r \ \ (H/m)$$

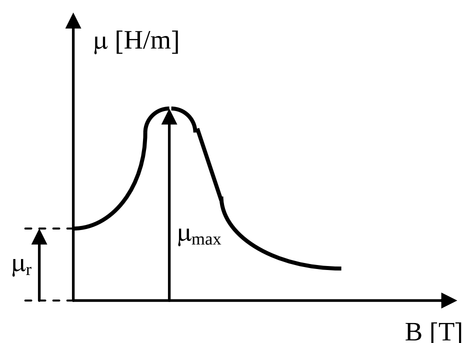
Jedinica apsolutne magnetne permeabilnosti (μ) i permeabilnosti vakuuma (μ_0) je (H/m), dok relativna magnetna permeabilnost (μ_r) nema jedinicu, tj. ona je data relativnim brojem koji može da se izrazi i u procentima (množeći relativni broj sa 100).

Magnetna indukcija koju stvara električna struja koja protiče kroz: ravan provodnik, solenoid, torus ili navojak se određuje na isti način kao i jačina magnetnog polja. Dakle, množeći jačinu magnetnog polja sa magnetnom permeabilnosću (μ) dobije se magnetna indukcija.

2.2 KARAKTERISTIKE MAGNETIZIRANJA B = f (H)



Sl.10.

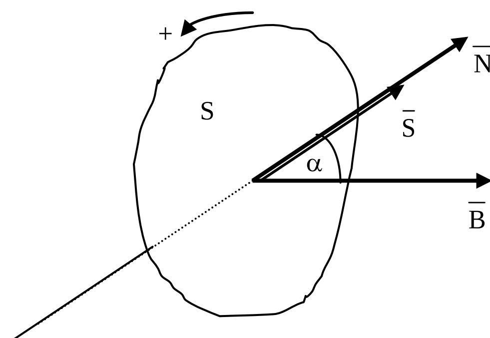


Sl.11.

Prema Sl.10. vidimo da je karakteristika magnetiziranja za nemagnetne materijale linearna, što znači da je magnetna permeabilnost konstantna. Kako su ti pravci približni vakuumu za karakteristiku svih nemagnetnih materijala uzima se karakteristika vakuuma. Kod magnetnih materijala ta je karakteristika nelinearna. U početku je skoro linearna sa velikim porastom B (velika strmina), da bi došlo na kraju do magnetnog zasićenja. Iz karakteristike magnetiziranja feromagnetnih materijala može se doći do zavisnosti magnetne permeabilnosti u odnosu na magnetnu indukciju: $\mu = f(B)$.
Ova karakteristika je data na Sl. 11. Iz nje se vidi da magnetna permeabilnost raste sve dok naglo raste B, a to znači do kolena karakteristike. Nakon toga, kada postepeno dolazi do magnetnog zasićenja, magnetna permeabilnost postepeno opada.

U specijalizovanim laboratorijama se snime karakteristike magnetiziranja, koje se nakon toga mogu koristiti u proračunima pri rešavanju zadataka (razni proračuni).Takve karakteristike su date u prilogu zbirke (na kraju).

3. MAGNETNI FLUKS



Sl.12.

Magnetni fluks Φ je jednak skalarnom proizvodu vektora magnetne indukcije B i vektora S.

$$\overline{\Phi} = \overline{B} \cdot \overline{S}$$

Vektor $\overline{S}$ je brojčano (po intenzitetu) jednak površini S koja obuhvata magnetne linije (fluks), a njegov smer odgovara smeru normale na površinu S , tj. vektoru $\overline{N}$ (vidi sliku 12). Za pozitivan smer obilaska se uzima smer desnog zavrtnja (Amperovo pravilo desne ruke). Kako je α ugao između vektora B i S, tada predhodni obrazac se može napisati i u sledećemobliku:

$$\boldsymbol{\Phi = B\ S\ \cos\alpha}$$

Za B ⊥ S, sledi:

$$\boldsymbol{\Phi = B\ S\ [\ Wb\ ]}$$

odnosno:

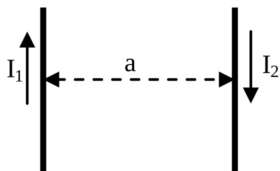
$$\boldsymbol{B = \frac{\Phi}{S}[T]}$$

gde je:

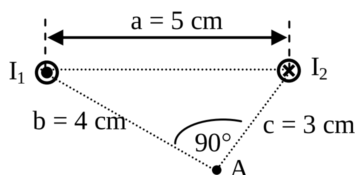
Φ….magnetni fluks (broj magnetnih linija) (jedinica je veber [Wb])
B….gustina magnetnih linija (magnetna indukcija) (jedinica je tesla [T]).

ZADACI:

2.1. Kroz dva vrlo duga pravolinijska provodnika protiču struje $I_1 = 2$ A i $I_2 = 3$ A. Naći magnetnu indukciju za tačku A. Položaj i rastojanje tačke u odnosu na provodnike date su na slici.2.1 (a i b). Provodnici se nalaze u vazduhu.



Sl.2.1. a)

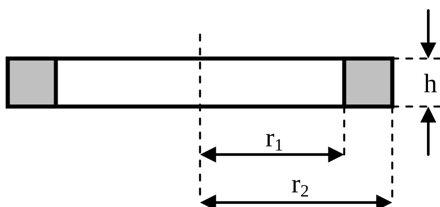


Sl.2.1. b)

2.2. Na torusu srednje dužine $l = 2\pi$ cm ravnomerno je namotano N = 1000 navojaka sa strujom I = 1 A. Izračunati magnetnu indukciju B u torusu, ako je:

a) torus izrađen od materijala čije je $\mu_r = 100$
b) torus izrađen od kartona
c) torus izrađen od livenog gvožđa

2.3.



Sl.2.3.

Odrediti magnetnu indukciju B u torusu pravougaonog preseka, ako je na torus ravnomerno namotano N navojaka kroz koje protiče struja I. Dimenzije torusa date su na Sl. 2.3, a torus je načinjen od materijala čija je relativna magnetna permeabilnost $\mu_r = 100$.

Brojni podaci:
N = 600: I = 10 A: $r_1 = 20$ cm: $r_2 = 24$ cm: h = 5 cm.

2.4. U unutrašnjosti navoja ima se jačina magnetnog polja H = 500 A/m. Kolika je magnetna indukcija u vazduhu, a kolika kada se u navoj stavi magnetno jezgro relativne permeabilnosti $\mu_r = 2400$?

2.5. Prema karakteristici magnetiziranja za liveni čelik za magnetnu indukciju B = 1 T potrebna je jačina magnetnog polja od H = 600 A/m. Kolika je u tim slučaju relativna magnetna permeabilnost μ_r ?

2.6. Cevasti navoj dužine l = 25 cm, sa N = 500 navojaka, ima jezgro od livenog gvožđa. Kolika treba da je struja I da bi se u jezgru imala magnetna indukcija od B = 1,2 T ?

2.7. Izračunaj jačinu magnetnog polja i magnetnu indukciju vrlo dugog pravolinijskog provodnika kroz koji protiče struja I = 3,5 A na udaljenosti: a) 5 cm, b) 10 cm i c) 18 cm od središta provodnika.

2.8. Kolika je jačina magnetnog polja koja u dinamo limu proizvede sledeću magnetnu indukciju:
a) 1,5 T; b) 1,2 T; c) 0,6 T; d) 0,2 T; e) 0,85 T i f) 1,22 T ?

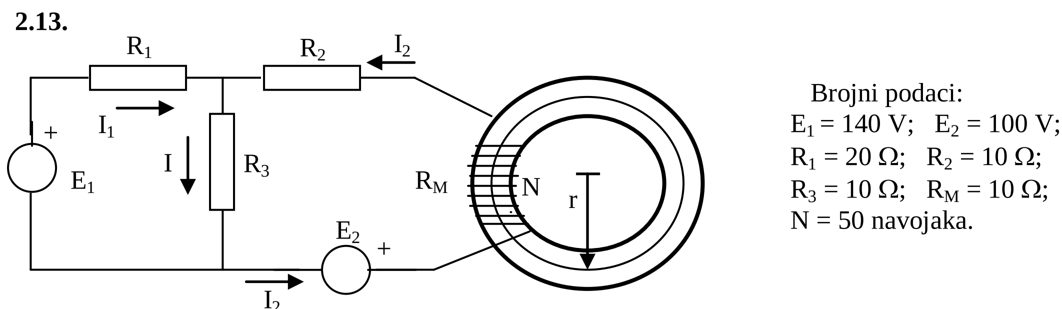
2.9. Koliku magnetnu indukciju proizvede u livenom gvožđu magnetno polje sledećih jačina:
a) 143 A/cm, b) 183 A/cm i c) 975 A/m ?

2.10. Koliku jačinu magnetnog polja i koliku relativnu magnetnu permeabilnost ima dinamo lim kod sledećih magnetnih indukcija: a) 0,4 T; b) 0,8 T; c) 1,55 T; d) 1,8 T; i e) 2,3 T ?

2.11. Kolika je relativna magnetna permeabilnost livenog gvožđa za sledeće jačine magnetnog polja: a) 600 A/m; b) 1250 A/m; c) 1650 A/m; i d) 18000 A/m ?

2.12.∗ U provodniku, savijenom u navojak oblika ravnog kvadrata, čija je stranica 30 cm, postoji struja stalne jačine od $I = 250$ A. Kolika je magnetna indukcija u središtu navojka ? Sredina je vazduh.

2.13.



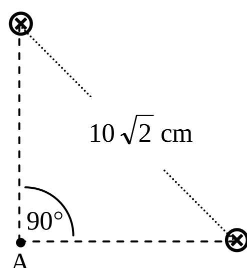
Brojni podaci:
$E_1 = 140$ V; $E_2 = 100$ V;
$R_1 = 20\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$;
$R_3 = 10\ \Omega$; $R_M = 10\ \Omega$;
$N = 50$ navojaka.

Sl.2.13.

U torusu poluprečnika $r = 5$ cm koji se napaja preko električnog kola na slici. 2.13, odrediti:

a) magnetomotornu silu M
b) jačinu magnetnog polja H
c) magnetnu indukciju B kada je $\mu_r = 2000$.

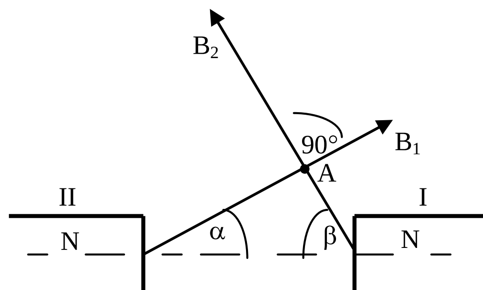
2.14.



Dva beskonacno duga pravolinijska provodnika sa strujama $I_1 = 10$ A i $I_2 = 15$ A, nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju od $10\sqrt{2}$ cm (Sl. 2.14.). Odrediti vektor magnetne indukcije za tacku A koja je podjednako udaljena od oba provodnika. Smer struja u provodnicima je isti (ulaze).

Sl.2.14.

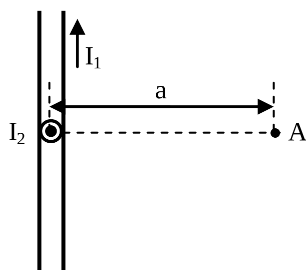
2.15.



Dva stalna magneta stvaraju u tački A, prema Sl. 2.15, magnetno polje nepoznate indukcije B. Prvi magnet stvara u tački A polje indukcije B_1, a drugi B_2. Magneti se nalaze u vazduhu. Odrediti intenzitet i smer magnetne indukcije B.
Brojni podaci:
$B_1 = 0{,}1$ T, $B_2 = 0{,}2$ T, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

Sl.2.15.

2.16.

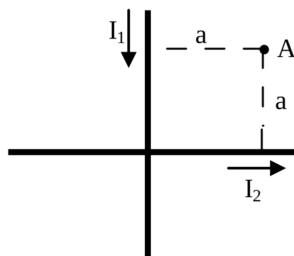


Sl.2.16.

Dva beskonačno duga pravolinijska provodnika sa strujama I_1 i I_2 u naznačenim smerovoma , prema slici 2.16, ukrštaju se pod pravim uglom. Odrediti rezultantnu magnetnu indukciju B u tački A na rastojanju a od tačke ukrštanja provodnika. Provodnici se nalaze u vazduhu.

Brojni podaci:
I_1 = 100 A, I_2 = 50 A, a = 20 cm.

2.17.



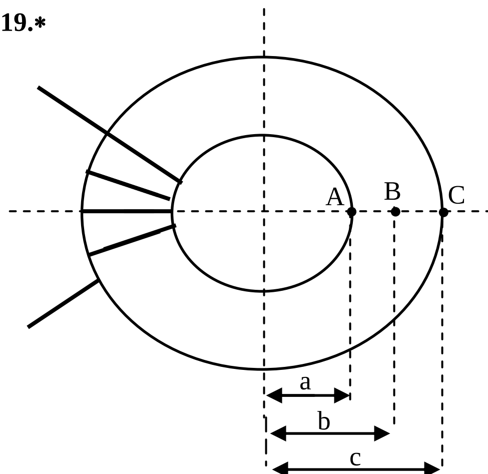
Sl. 2.17.

Dva beskonačno duga pravolinijska provodnika sa strujama I_1 i I_2 u naznačenim smerovima ukrštaju se pod pravim uglom (Sl. 2.17.). Ako se provodnici nalaze u vazduhu odrediti rezultantnu magnetnu indukciju u tački A koja se nalazi na rastojanju a od oba provodnika.

Brojni podaci:
I_1 = 100 A, I_2 = 200 A, a = 10 cm.

2.18. Na torusu je gusto i ravnomerno namotano N navojaka kroz koje protiče struja I. Jezgro torusa je od feromagnetnog materijala magnetne permeabilnosti μ_r. Odrediti intenzitet magnetne indukcije B na srednjem krugu torusa ako je poluprečnik tog kruga a.
Brojni podaci:
μ_r = 1000, N = 100, I = 10 A, a = 10 cm.

2.19.∗

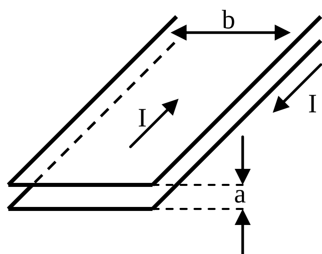


Sl.2.19.

Kroz torusni namotaj, prikazan na slici 2.19, postoji struja jačine I = 0,5 A. Izračunati intenzitet vektora magnetne indukcije u tačkama A, B, i C .

Brojni podaci:
N = 2 500; a = 5 cm; b = 7,5 cm, c = 10 cm;
a torus je kvadratnog preseka S (S = a h), gde je h = 5 cm.

2.20.∗



Sl.2.20.

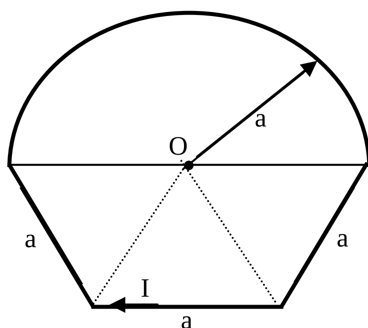
Dokazati da je intenzitet vektora magnetne indukcije između provodnika trakastog voda prikazanog na slici 2.20 približno jednak
$B = \mu_o I / b$.
Skicirati linije vektora B u poprečnom preseku voda. (Napomena: b >> a)

2.21.∗ Na tanko torusno jezgro srednjeg poluprečnika 10 cm ravnomerno je namotano N = 1000 zavojaka žice. Jezgro je načinjeno od silicijum čelika za koji je karakteristika (kriva) magnetiziranja data u Dodatku na kraju knjige. Ako kroz namotaj postoji struja jačine I = 0,3 A, izračunati jačinu magnetnog polja, intenzitet vektora magnetne indukcije. Koji deo magnetne indukcije B u jezgru protiče od Amperovih struja, a koji od struje kroz kalem? Koji deo jačine magnetnog polja H potiče od struje u namotaju, a koji od Amperovih struja u jezgru ?

2.22.∗ Izračunati jačinu magnetnog polja između dve trake (trakasti vod), prema Sl. 33., ako kroz trake protiče struja I. Kako je b >> a magnetno polje izvan traka se može zanemariti.Izračunati vektor magnetne indukcije između traka (sredini koja se nalazi između traka), ako je relativna magnetna permeabilnost sredine zmeđu traka $\mu_r = 100$.
Brojni podaci: I = 50 A , a = 0,5 cm i b = 50 cm.

2.23.∗ Poznata je indukcija B_1 na rastojanju a_1 od ose (središta) beskonačno dugog pravolinijskog provodnika. Naći indukciju B_2, na rastojanju a_2 od ose.
Brojni podaci:
$B_1 = 1$ mT; $a_1 = 1$ m; $a_2 = 1$ km.

2.24∗.

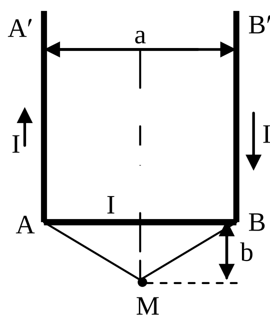


Sl.2.24.

Odrediti intenzitet, pravac i smer magnetne indukcije koju u tački 0 stvara kolo prikazano na slici 2.24. Kolo je sastavljeno od polukruga poluprečnika a i polovine šestougaonika stranice a i nalazi se u vazduhu. U kolu je ;postavljena struja I u označenom smeru.

rojni podaci : I = 50 A; a = 10 cm.

2.25 *.

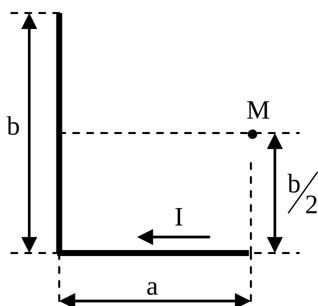


Sl.2.25.

Dva provodnika neograničene dužine postavljena su paralelno na međusobnom rastojanju a. Provodnici su sa jedne strane međusobno spojeni pravolinijskim provodnikom, prema slici 2.25. Ako je u kolu uspostavljena struja I u označenom smeru, odrediti intenzitet, pravac i smer magnetne indukcije u tacki M, koja leži u ravni kola, na rastojanju b od provodnika AB.

Brojni podaci: $a = 10$ cm; $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $I = 50$ A.

2.26 *.



Sl.2.26.

Provodnik ograničene dužine savijen je pod pravim uglom, tako da je dužina jednog kraka a, a drugog b, prema slici. Provodnik se nalazi u vazduhu, a u njemu je uspostavljena struja I u naznačenom smeru. Odrediti intenzitet, pravac i smer magnetne indukcije koju ovaj provodnik stvara u tacki M, čija je pozicija prikazana na slici 2.26.

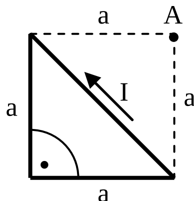
Brojni podaci: $I = 25$ A; $a = 4$ cm; $b = 6$ cm.

2.27. Dva kružna provodnika istih poluprečnika $R = 2$ cm postavljena su u dve uzajamno normalne ravni tako da im se centri međusobno poklapaju. Odrediti magnetnu indukciju u njihovim centrima ako kroz provodnike protiče struja jačine $I_1 = I_2 = 5$ A.

2.28. U kvadratnoj konturi, dužine stranice **a** , koja se nalazi u vakuumu, postopji stalna jačina struje **I**. Odrediti izraz za intezitet vektora magnetske indukcije **B** u centeru konture.

2.29. U pravougaonoj konturi, dužine stranica **a** i **b**, postoji stalna jačina struje **I**. Kontura se nalazi u vakuumu. Odrediti izraz za intezitet vektora magnetske indukcije **B** i njen smer u tački O koja se nalazi u samom centru konture (tačka O i pravougaona kontura se nalaze u istoj ravni).

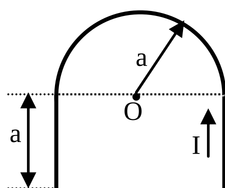
2.30.



Sl.2.30.

Provodna kontura, prema datoj slici 2.30, ima oblik jednakokrakog pravouglog trougla, dužine kateta **a**. Kontura se nalazi u vakuumu, a u njoj postoji stalna struja jačine **I**. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije **B** u tački A (tačka A se nalazi u istoj ravni sa crtežom).

2.31.



Sl.2.31.

Provodna kontura, prikazana na slici 2.31, sastoji se od jednog polukružnog dela, poluprečnika **a**, i tri pravolinijska dela, dužina **a**, **2a** i **a**. U konturi postoji stalna jačina struje **I**, a sredina je vakuum. Odrediti izraz za intezitet vektora magnetske indukcije **B** u tački O, koja je centar polukruga.

3.1. Na torus od gvožđa preseka $S = 1{,}5\ cm^2$ i srednje dužine $l = 40$ cm namotano je $N = 400$ navojaka. Izmerena je jačina struje u navojima od $I = 40$ mA, a magnetni fluks u torusu je $\Phi = 3\ \mu Wb$. Izračunati:

a) magnetnu indukciju B
b) jačinu magnetnog polja H
c) magnetni permeabilitet jezgra μ
d) relativnu magnetnu permeabilnost μ_r jezgra

3.2. Dat je torus od livenog gvožđa, dužine srednje linije $l = 0{,}6$ m i poprečnog preseka $S = 20\ cm^2$, sa fluksom kroz torus $\Phi = 1{,}6$ mWb. Na torusu je namotano $N = 1000$ navojaka. Izračunati:

a) magnetnu indukciju B
b) jačinu struje u navoju I
c) relativni magnetni permeabilitet gvožđa μ_r

3.3. Magnetno kolo ima površinu poprečnog preseka $S = 16\ cm^2$, $l = 48$ cm, kroz N navojaka teče struja $I = 0{,}5$ A i stvara magnetni fluks $\Phi = 1{,}6$ mWb. Ako je magnetna permeabilnost datog kola $\mu = 3\cdot 10^{-3}$ H/m, izračunati:

a) magnetnu indukciju
b) magnetomotornu silu
c) broj navojaka

3.4. Dat je torus površine poprečnog preseka $S = 25\ cm^2$. Spoljašnji prečnik torusa je $d_1 = 30$ cm, unutrašnji $d_2 = 25$ cm. Na torusu je namotano $N = 1000$ navojaka kroz koje teče struja jačine $I = 3{,}14$ A. Koliki je fluks u torusu?

3.5. Navoj u vakuumu, čije su dimenzije $l = 25{,}12$ cm, $S = 4\ cm^2$, ima magnetomotornu silu $M = 2000$ A. Koliki je magnetni fluks navoja?

3.6. Prstenasti navoj u vazduhu ima poprečni presek $S = 2{,}8\ cm^2$ i srednju dužinu $l = 44$ cm. Kolika je magnetomotorna sila potrebna da bi se imao magnetni fluks od $\Phi = 8\cdot 10^{-7}$ Wb?

3.7. Prstenasti navoj u vazduhu sa $N = 280$ navojaka ima površinu poprečnog preseka $S = 4\ cm^2$, a srednju dužinu magnetnih linija l=40cm.Kolika je jačina struje potrebna da da bi se imao magnetni fluks od $\Phi = 5\cdot 10^{-7}$ Wb ?

3.8. Kroz navoj u vakuumu, dužine $l = 15$ cm i poprečnog preseka $S = 3\ cm^2$ protiče struja od $I = 3$ A. Koliki treba da je broj navojaka N da bi se u navoju imao magnetni fluks od $\Phi = 2\cdot 10^{-7}$ Wb?

3.9. Cilindrični navoj dužine $l = 20$ cm i srednjeg prečnika $d' = 2{,}5$ cm gusto je namotan (jedan uz drugi) sa $N = 150$ navojaka i nalazi se u vazduhu. Ako kroz navoj protiče struja $I = 2$ A, kolika je jačina magnetnog polja i magnetni fluks u navoju ?

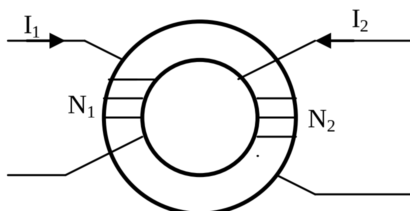
3.10. Prstenasti navoj sa jezgrom od nemagnetnog materijala ima gusto namotani navoj od žice prečnika $d = 1{,}6$ mm (sa izolacijom), pri čemu navojci sa unutrašnje strane prstena naležu jadan uz drugi. Dimenzije prstena su: $D_1 = 120$ mm; $D_2 = 85$ mm. Sračunati jačinu magnetnog polja i magnetni fluks ako je struja kroz navoj $I = 2{,}2$ A.

3.11. Na prstenu od livenog gvožđa, čiji je srednji prečnik $D' = 25$ cm, a presek okrugao i prečnika d= 2 cm, namotano je ravnomerno 800 navojaka. Ogledom je izmerena struja od $I = 1$ A, a magnetni fluks $\Phi = 1$ mWb. Sračunati magnetnu indukciju (gustinu fluksa) B i relativni magnetni permeabilitet μ_r.

3.12. Prsten kružnog preseka od silicijum čelika, čije su dimenzije $D' = 22$ cm (srednji prečnik); $d = 2$ cm, namotan je ravnomerno sa $N = 600$ navojaka. Ako je struja $I = 4$ A, sračunati magnetni fluks Φ.

3.13. Za prsten od silicijum čelikovih limova, čije su dimenzije kao u predhodnom zadatku, kolika treba da bude jačina struje I da bi magnetni fluks bio $\Phi = 440\ \mu Wb$?

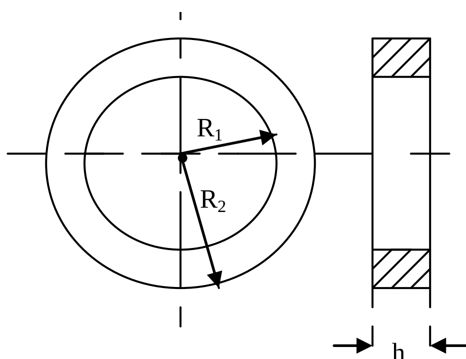
3.14.



Sl.3.14.

Na prstenastu jezgru (torus) namotana su dva kalema sa sledećim podacima: N_1 = 50; N_2 = 80, a struje I_1 = 8 A, I_2 = 2 A, odrediti smer magnetnog polja u jezgri,ako su smerovi struje kao na Sl. 3.14.

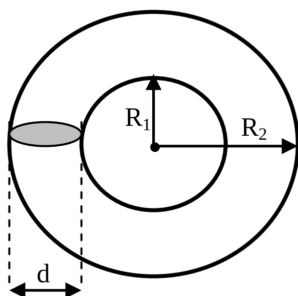
3.15.



Sl.3.15.

Kalem sa N = 1000 navojaka jednoliko je namotan na feromagnetnu jezgru cije su dimenzije: R_1 = 8 cm; R_2 = 12 cm; h = 15 cm (Sl. 3.15.).
Magnetni fluks u jezgri iznosi Φ = 0, 025 Wb, a relativna magnetna permeabilnost μ_r 2040.
Kolika je struja u kalemu?

3.16.



Sl.3.16.

Na torusnu jezgru kružnog preseka , prema slici 3.16, ravnomerno je namotan kalem sa N = 2 000 navojaka. Kroz kalem teče struja I = 0,1 A. Ako su poluprečnici jezgre R_1 = 10 cm, R_2 = 12 cm a magnetna permeabilnost μ_r = 2000, izračunati koliki je magnetni fluks u jezgri?

3.17. Koliki je magnetni fluks u zadatku 1.15 ?

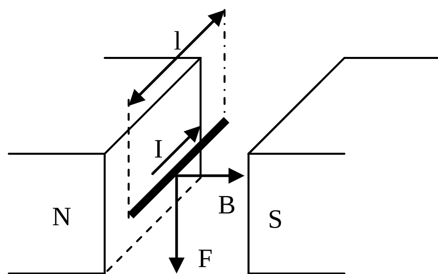
3.18. Jednoslojni kalem prečnika 1,8 cm ima 12 navojaka po cm dužine. Koliki prečnik mora imati jedan drugi kalem koji bi kod iste struje i sa 8 navojaka po cm dužine ostvario isti magnetni fluks kao i prvi kalem ?

3.19. Kalem ima prečnik 2,5 cm. Koliki prečnik treba da ima jedan drugi kalem iste dužine ako ovaj treba da kod istog broja navojaka i dva puta manje struje, proizvede 20% jači magnetni fluks ?

3.20. Cilindrična prigušnica prečnika d = 20 mm i dužine l_p = 0,5 m načinjena je od bakarnog provodnika dužine l = 15,7 m i preseka S = 1 mm^2. Prigušnica je priključena na izvor jednosmerne struje čija je ems E = 12 V, a unutrašnja otpornost 0,525 Ω. Koliki je magnetni fluks date prigušnice? Napomena: specifična električna otpornost bakra je 0,0175 $\Omega mm^2/m$. Sredina je vazduh.

3.21. Na tankom torusu, dužine $l = 50$ cm i poprečnog preseka $S = 3\ cm^2$, namotano je ravnomerno 1500 navojaka žice. Kroz namotaj protiče struja jačine $I = 600$

4.ELEKTROMAGNETNA SILA



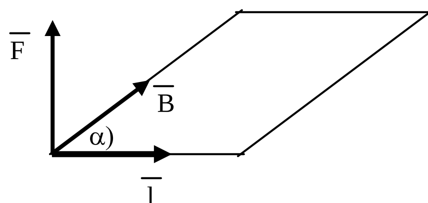
Sl.13.

Na provodnik kroz koji teče struja kada se on nalazi u magnetnom polju, kao prema slici 13, deluje elektromagnetna sila, koja je vektorska veličina. Ona je jednaka:

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{I} \cdot \left(\overline{\mathbf{B}} \times \overline{\mathbf{l}}\right)$$

Ovaj vektorski proizvod nam daje vektor F, koji je jednoznačno određen, tj.određenog pravca, smera i intenziteta.

Kako je vektorski proizvod dva vektora (B i l) opet jedan vektor, čiji je intenzitet jednak površini tog palalelograma kojeg oni čine a smer i pravac odgovara desnoj zavojnici, kao što je predstavljeno na slici 14, (pravilo leve ruke ili pravilo tri prsta desne ruke), a samim tim i predhodni izraz je jednak:



Sl.14.

$$\mathbf{F = I\,B\,l\,sin\,\alpha}$$

gde je: F… elektromagnetna sila (N)
I…..jačina struje (A)
B….magnetna indukcija (T)
l…..aktivna dužina provodnika (m)
α….ugao između B i l (°)

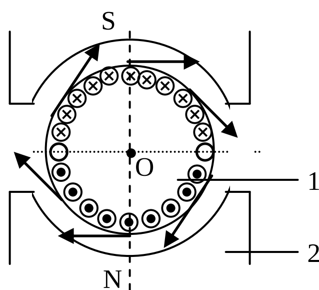
(Napomena: $B \times l = B\,l \sin\alpha$) (Sl. 14.)

Za $B \perp l \Rightarrow$

$$\mathbf{F = B\,I\,l\,[\,N\,]}$$

Smer se može odrediti pravilom leve ruke (Sl.13.), koje glasi:
U dlan ulaze magnetne linije **B** , *ispruženi prsti pokazuju smer struje* **I** , *dok će palac pokazivati smer sile* **F** .

Elektromagnetna sila se koristi kod elektromotora i kod mernih instrumenata.



Sl.16.

Elektromotori (kao i generatori) se sastoje od rotora (1) i statora (2), što je prikazano na slici 16. Stator motora stvara magnetno polje, u kojem se nalazi rotor. U žlebovima rotora smešteni su navojci, kroz koje protiče struja (dovedena preko četkica, ili se indukuje u namotajima rotora). Prolaskom struje kroz aktivni deo namotaja rotora, na taj deo namotaja (aktivni deo) će delovati elektromagnetna sila $\mathbf{F_1}$. Primenom pravila leve ruke (ili neko drugo pravilo « tri prsta desne ruke «) dolazimo do zaključka da će sve pojedinačne sile na pojedinačne aktivne delove navojaka delovati tako da će se one radijalno sabirati (istog smera). Usled toga ukupna sila **F** iznosi:

$$\mathbf{F = N \cdot F_1}$$

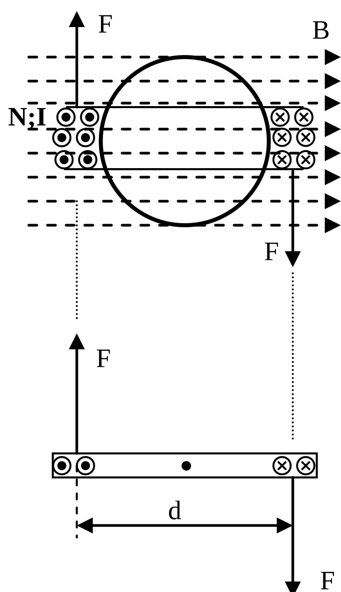
gde je **N** ukupan broj aktivnih delova navojaka (ravnih provodnika).

Na rotor, koji se nalazi u magnetnom polju statora, deluje spreg sila, koji će ostvariti zakretanje motora. Ovaj spreg sila stvara **zakretni moment M**, koji je srazmeran ukupnoj elektromagnetnoj sili **F** i kraku (poluprečniku rotora) **r.**

Dakle, zakretni momenat**,** kod elektromotora iznosi:

$$\mathbf{M = F \cdot r}$$

Na ovom principu, rade elektromotori (asinhroni, kolektorski, indukcioni).



Sl.17.

Ako se u magnetnom polju nađe kalem pravougaonog oblika, kao na slici 17, na njega će delovati elektromagnetna sila:

$$\mathbf{F = NBIl\sin\alpha}$$

gde je **N** broj aktivnih delova navojaka (ravnih provodnika).

Na taj kalem deluje zakretni moment (strujni moment) **M** koji kalem rotira u jednu stranu (pravilo leve ruke) i on iznosi:

$$\mathbf{M = F\ d\ [Nm]}$$

gde je: d prečnik kalema (krak), slika 17.

Ukupni zakretni moment je jednak:

$$M = M_1 + M_2 = F_1 d/2 + F_2 d/2 = 2Fd/2 = Fd\ (Nm).$$

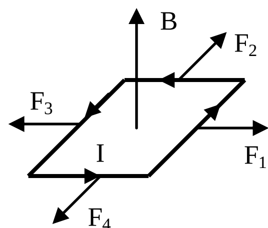
Kako je kod instrumenata sa kretnim kalemom magnetno polje homogeno radijalno, pa sledi da je:

$$\mathbf{M = NBIld\sin\alpha = k\ I}$$

jer je: NBld=k, a $\alpha = 90°$.

Dakle,prema slici 17, zakretni momenat je srazmeran sa jačinom struje. Na ovom principu rade elektormagnetni instrumenti (ampermetar, voltmetar, ommetar) što nam i omogućuje merenje struje, napona i otpora.

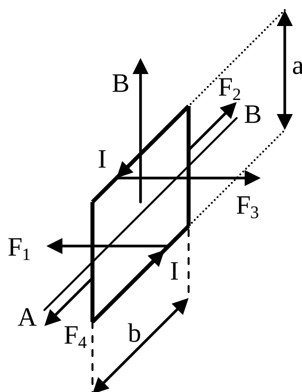
RAVNA STRUJNA KONTURA U MAGNETNOM POLJU



Sl.18.

Ako se u magnetnom polju nađe ravna strujna kontura, čija je površina narmalna na magnetno polje, kao prema slici 18, tada će na stranice te konture delovati elektromagnetna sila, ako konturom protiče struja. Koristeći pravilo leve ruke (šake) odredomo pojedinačne sile (F_1, F_2, F_3 i F_4). Rezaltantna sila će biti jednaka vektorskom zbiru pojedinačnih sila, odnosno ona će biti jednaka nuli ($\overline{F}_1 = -\overline{F}_3 : \overline{F}_2 = -\overline{F}_4$), jer je:

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 = 0$$



Sl.19.

Ako strujnu konturu sa slike 18 zarotiramo za naki ugao, tada površina strujne konture nije normalna na magnetnu indukciju B. U tom slučaju će dve elektromagnetne sile da se ponište, dok će druge dve da dovedu do rotiranja strujne konture, tj. ostvariti će zakretni moment. Prema slici 19, sile F_2 i F_4 se poništavaju (kao i na slici 18), dok će sile F_1 i F_3 svojim smerom zarotirati konturu oko osovinice A B.

Na stranice b deluju elektromagnetne sile čiji je intenzitet jednak: F = BIb. Istovremeno deluje i zakretni moment (moment sprega) koji iznosi:

$$M = F_1 \cdot a/2 \cdot \sin\alpha + F_3 \cdot a/2 \cdot \sin\alpha = Fa\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\mathbf{M = Fd = Fa\sin\alpha}$$

gde je α ugao između vektora B i normale na konturu.

Kako je $M = F \cdot d = F \cdot a \cdot \sin\alpha = B \cdot I \cdot b \cdot a \cdot \sin\alpha$, a $S = a \cdot b \Rightarrow M = B \cdot I \cdot S \cdot \sin\alpha$

Za $\alpha = 90°$ moment je maksimalan, tj.

$$\mathbf{M_{max} = BIS}$$

Proizvod struje I i površine njene konture S se naziva **magnetni moment strujne konture m** i on iznosi :

$$\mathbf{m = IS \; (Am^2)}$$

Na osnovu ovog izraza i moment sprega se može pisati u obliku:

$$\mathbf{M = mB\sin\alpha}$$

ili u vektorskom obliku:

$$\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{m}} \times \overline{\mathbf{B}}$$

UTICAJ MAGNETNOG POLJA NA ELEMENTARNA NAELEKTRISANJA

Zapremina provodnika (V) jednaka je: V = l S , gde je l dužina provodnika a S poprečni presek.
Gustina struje u provodniku je:

$J = \frac{I}{S} \Rightarrow I = J \cdot S$, te sledi: $\overline{F} = \overline{I} \cdot (\overline{l} \times \overline{B}) = \overline{J} \cdot S \cdot (\overline{l} \times \overline{B}) = Sl \cdot (\overline{J} \times \overline{B}) = (\overline{J} \times \overline{B}) \cdot V$

Vektor I i vektor J su kolinearni pa je strelica sa I preneta na J.
Prostorna (zapreminska) gustina naelektrisanja iznosi: $\rho = dQ / dV$, pa za provodnik konstantnog preseka sledi: $\rho = \frac{Q}{Sl}\left[\frac{C}{m^3}\right] \Rightarrow Q = \rho Sl \Rightarrow It = \rho Sl \Rightarrow I = \frac{\rho Sl}{t} = \rho Sv$, gde je **v = l/t** brzina proticanja naelektrisanja.
Množeći navedeni izraz sa dužinom l, sledi: $Il = \rho Svl = Qv \Rightarrow F = BIl = BQv \sin\alpha$.
Ako ukupno naelektrisanje Q zamenimo elementarnim naelektrisanjem q (elektron ili proton), sledi:

$$\mathbf{F = q\, v\, B \sin\alpha}$$

ili vektorski :

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}}$$

Na elementarno naelektrisanje pored magnetnog polja deluje i električno polje svojom silo $F' = q\ E$
Sledi da na elementarno naelektrisanje istovremeno deluju dve sile : magnetna F i električna F′.
Ukupna sila jednaka je zbiru ove dve, pa sledi:

$$\overline{\mathbf{F}}\mathbf{r} = \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{F}}' = \mathbf{q} \cdot \overline{\mathbf{E}} + \mathbf{q} \cdot \overline{\mathbf{v}} \times \overline{\mathbf{B}}$$

Navedeni izraz predstavlja LORENCOVU SILU, jer je do njega prvi došao Lorenc.
Ako posmatramo dejstvo magnetne i električne sile na jedan elektron, tada se umesto elementarnog naelektrisanja stavlja naelektrisanje elektrona (q = – e), te sledi:

$$\overline{\mathbf{F}}\mathbf{r} = -\mathbf{e} \cdot \overline{\mathbf{E}} - \mathbf{e} \cdot \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$$

Z A D A C I :

4.1. Izračunati elektromagnetnu silu koja deluje na provodnik dužine l = 1 m koji se nalazi u magnetnom polju indukcije B = 0,8 T, ako je jačina struje kroz provodnik I = 20 A. Provodnik i linije magnetnog polja zaklapaju ugao α = 30°.

4.2. U magnetnom polju indukcije B nalazi se provodnik dužine l = 0,25 m, kroz koji teče struja I = 5 A. Na provodnik, koji sa linijama magnetnog polja zaklapa ugao od 90°, deluje sila F = 1 N.
Kolika je magnetna indukcija B ?

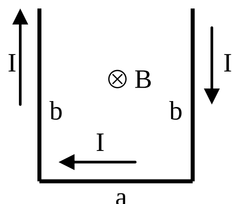
4.3. Kolika je dužina provodnika sa strujom I = 1,3 A koji se nalazi u magnetnom polju indukcije B = 0,5 T, ako na njega deluje sila F = 1,5 N. Provodnik je normalan na linije magnetnog polja.

4.4. Kolika je jačina struje u provodniku dužine l = 0,4 m, koji se pod uglom od 60° nalazi u magnetnom polju indukcije B = 1,2 T, i na koji deluje sila F = 0,5 N ?

4.5. Odrediti dužinu provodnika kroz koji teče struja I = 0,8 A, koji sa linijama magnetne indukcije B = 0,8 T zaklapa ugao od α = 45°, ako na njega deluje sila F = 2 N.

4.6. Pod kojim uglom je postavljen provodnik u odnosu na linije magnetnog polja indukcije B = 1 T, ako kroz njega protiče struja I = 5 A i ako na provodnik deluje sila F = 1,5 N. Dužina provodnika iznosi 60 cm.

4.7.



Sl.4.7.

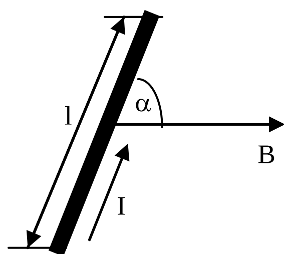
Provodnik, savijen kao na slici 4.7, nalazi se u homogenom magnetnom polju magnetne indukcije B = 1,2 T. Odrediti intenzitet, pravac i smer elektromagnetne sile koja deluje na dati provodnik, ako je jacina struje u provodniku I = 50 A datog smera, a dimenzije provodnika: a =1,5 cm, b= 20 cm.

4.8. Navoj sa 200 navojaka nalazi se u homogenom magnetnom polju magnetne indukcije B = 0,05 T. Dužina aktivnog dela navoja iznosi l = 6 cm, a njegova širina a = 4,25 cm. Ako struja u navoju iznosi I = 50 mA, sračunati momenat sprega sila (zakretni momenat) koji deluje na navoj kada se ovaj nalazi u pravcu ose polova i kada se nalazi pod uglom od 45° prema ovoj osi.

4.9. U radijalnom magnetnom polju gustine (magnetne indukcije) B = 0,4 T nalazi se navoj koji se sastoji od 200 navojaka i ima dimenzije 30×20 mm . Koliki je momenat sprega kada je struja u navoju I = 5 mA ?

4.10. Po obimu indukta (rotora) prečnika d = 20 cm nalazi se 500 provodnika ravnomerno raspoređenih po žlebovima. U svakom trenutku nalazi se 80% svih provodnika ispod polova magneta u homogenom radijalnom magnetnom polju indukcije B = 1 T. Sračunati momenat sprega svih elektromagnetnih sila ako je dužina jednog provodnika l = 20 cm, a struja u provodnicima iznosi I = 20 A.

4.11.



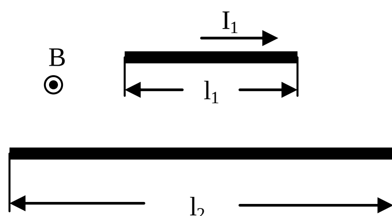
Sl.4.11.

Prav provodnik duzine l, kroz koji protiče struja jačine I, leži u homogenom magnetnom polju indukcije B (Sl. 4.11.). Pravac vektora B i pravac provodnika zaklapaju međusobno ugao α. Odrediti intenzitet, pravac i smer elektromagnetne sile F koja deluje na provodnik, i to :

a) $\alpha = 30°$, $l = 0{,}5$ m, $I = 20$ A, $B = 0{,}5$ T;
b) $\alpha = 90°$, $l = 0{,}5$ m, $I = 20$ A, $B = 0{,}5$ T

Šta se dešava kada struja u provodniku promeni svoj smer ?

4.12.



Sl.4.12.

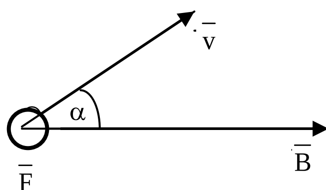
Dva paralelna provodnika duzina l_1 i l_2, kroz koje protiču struje I_1 i I_2, nalaze se u homogenom magnetnom polju indukcije B (Sl. 4.12.). Intenzitet i smer struje I_2 u provodniku duzine l_2 nisu poznati, ali je poznato da se provodnici međusobno privlače jednakim privlačnim silama. Odrediti:

a) intenzitet, pravac i smer elektromagnetnih sila koje deluju na provodnike (zanemariti međusobni uticaj magn. polja provodnika) ;
b) intenzitet i smer struje I_2.

Brojni podaci:

l_1 =50 cm, $l_2 = 1$ m, $I_1 = 20$ A, $B = 1$ T (izlaznog smera, ka posmatraču).

4.13.*

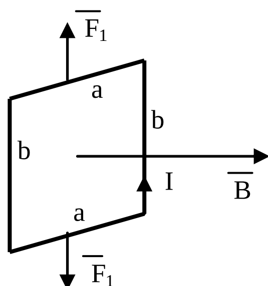


Sl. 4.13.

Mlaz naelektrisanih čestica kreće se kroz homogeno magnetno polje indukcije B brzinom v, pod uglom α u odnosu na pravac vektora B. Odrediti intenzitet, pravac i smer elektromagnetne sile (Lorencove sile) koja deluje na jednu česticu ako je njeno naelektrisanje q (Sl. 4.13.).

Brojni podaci:
$v = 2 \cdot 10^7$ m/s, $B = 0{,}2$ T, $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C, $\alpha = 30°$

4.14.



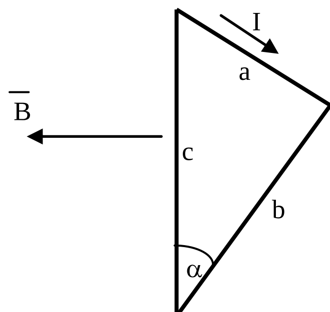
Sl. 4.14.

Strujna kontura pravougaonog oblika stranica a i b nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije B (Sl. 4.14.). Ako je jačina struje u konturi I, odrediti:

a) intenzitet, pravac i smer elektromagnetnih sila koje deluju na sve četiri stranice konture;
b) intenzitet, pravac i smer magnetnog momenta konture;
c) intenzitet momenta sprega.

Brojni podaci: $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $B = 1$ T, $I = 10$ A, $\alpha = 30°$.

4.15.



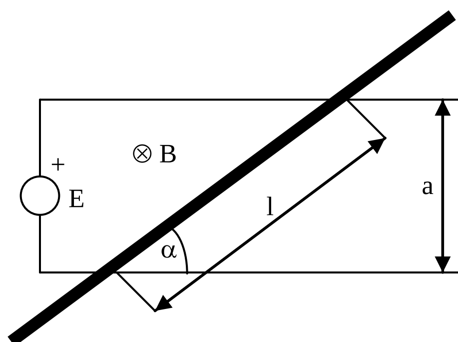
Sl. 4.15.

Strujna kontura oblika pravouglog trougla nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije B (Sl. 4.15.). Kroz kolo protiče struja jačine I. Hipotenuza truogla je normalna na pravac vektora B. Odrediti:

a) intenzitet, pravac i smer elektromagnetnih sila koje deluju na stranice konture;
b) dati komentar dejstva sila na konturu.

Brojni podaci:
c = 10 cm; B = 1 T; I = 50 A; α = 30°

4.16.

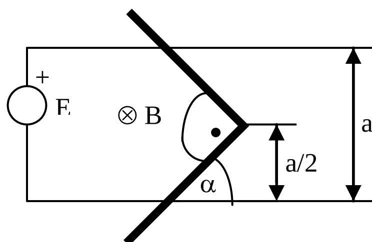


Sl. 4.16.

Dve paralelne šine zanemarljive otpornosti na međusobnom rastojanju **a** nalaze se u homogenom magnetnom polju indukcije **B** (Sl. 51.). Na jedan kraj šina vezan je generator jednosmerne ems **E** i unutrašnje otpornosti **R**. Preko šina postavljen je provodnik pod uglom **α** prema šinama tako da ceo sistem čini zatvoreno strujno kolo. Otpornost provodnika na dužini **l** između šina iznosi $\mathbf{R_p}$. Odrediti intenzitet, pravac i smer elektromagnetne sile koja deluje na provodnik.

Brojni podaci:
a = 20 cm; B = 0,6 T; α = 30°; E = 2 V; R = 2 Ω;
R_p = 0,6 Ω.

4.17.

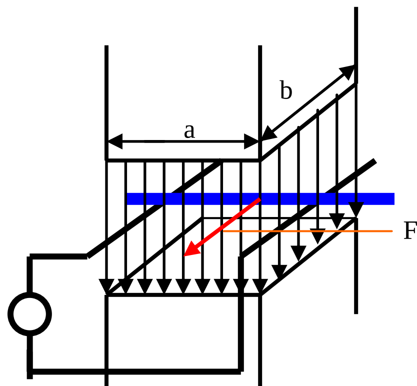


Sl. 4.17.

Dve paralelne šine zanemarljive otpornosti na međusobnom rastojanju a nalaze se u homogenom magnetnom polju indukcije B (Sl. 4.17.). Na jedan kraj šina vezan je jednosmerni generator ems E i unutrašnje otpornosti R. Preko šina postavljen je savijen provodnik otpornosti R_p, ciji kraci zaklapaju međusobni ugao od 90°. Ugao između krakova provodnika i šina je α. Odrediti intenzitet, pravac i smer elektromagnetnih sila koje deluju na krakove provodnika.

Brojni podaci:
a = 30 cm; E = 2 V; R = 0,4 Ω; R_p = 0,6 Ω; α = 45°;
B = 0,8 T.

4.18.

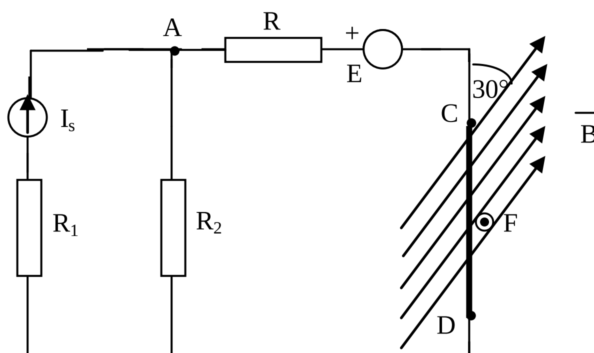


Sl. 4.18..

U procepu između polova magneta (Sl. 4.18.) postoji magnetni fluks intenziteta $\Phi = 480\ \mu Wb$. Dimenzije površine polova su a= 6 cm; b = 8 cm. U magnetnom polju nalazi se provodnik, kroz koji protiče struja, na koji deluje sila intenziteta F = 24 mN. Smer delovanja sile prikazan je na slici. Izračunati jačinu i smer struje u provodniku.

4.19. Dva beskonačno duga pravolinijska provodnika nalaze se na međusobnom rastojanju od 14.1 cm. Ako kroz provodnike protiču struje $I_1 = 10$ A i $I_2 = 15$ A u istom smeru (ka posmatraču) odrediti rezultantni vektor elektromagnetne sile F koja deluje na treći provodnik, dužine od 1 m sa strujom $I_3 = 10$ A, smeštenog u tački A koja je podjednako udaljena od oba provodnika (I_1 i I_2). Smer struje I_3 je suprotan strujama I_1 i I_2. (Provodnici se u stvari nalaze u temenima pravouglog trougla istih krakova, vidi Sl.29.).

4.20.



Sl.4.20.

Pravolinijski provodnik je dužinom l = CD = 8 cm u homogenom magnetnom polju indukcije B = 1 T. Na provodnik deluje elektromagnetna sila $F = 10\ \mu N$, normalno na ravan crtanja, smer ka posmatracu, Sl.4.20. Provodnik je sastavni deo kola za koje je poznato: E = 10 V; $R_1 = R = 30\ K\Omega$ $R_2 = 10\ K\Omega$. Naci:

a) jačinu i smer struje u grani sa naponskim generatorom E,
b) struju strujnog generatora I_s

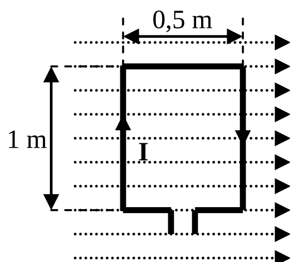
4.21. Provodnik kroz koji protiče struja I = 6 A nalazi se pod uglom α u homogenom magnetnom polju širine 3,5 cm, magnetne indukcije inteziteta 0,54 T. Kolika je sila kojom magnetno polje deluje na provodnik u njegovom poprečnom smeru (normalan na polje) ?

4.22. Rotor prečnika 44 cm kod jednosmerne mašine ima momenat zakretanja 147,15 Nm. Po njegovom obimu smešteno je ispod polova 200 provodnika dužine od po 20 cm. Kolika struja protiče kroz provodnike ako magnetna indukcija iznosi 0,72 T ?

4.23. Rotor električnog motora ima prečnik 28 cm i 51 žleb od kojih svaki sadrži po 40 provodnika dužine 17 cm. Polovina svih provodnika nalazi se u svakom momentu u magnetnom polju indukcije 0,7 T. Izračunati:

a) silu na rotor (po njegovom obimu),
b) zakretni momenat koji deluje na rotor .

4.24.



Sl.4.24.

Pravougaoni navojak (Sl. 4.24) leži u homogenom magnetnom polju indukcije B = 1 T. Ravan navojka je paralelna sa linijama polja a duža strana je normalna na linije polja. Naći momenat koji deluje na navojak ako kroz njega teče struja I = 10 A. Koliki je momenat ako se navojak postavi tako da njegove stranice zaklapaju ugao od 45° sa linijama polja.

4.25. U provodniku koji stoji normalno na pravac magnetnog polja postoji električna struja intenziteta 800 A. Magnetna indukcija iznosi 0,5 T. Odrediti elektromagnetnu silu po jednom metru dužine provodnika.

4.26. Na provodnik postavljen normalno na magnetne linije sila sa strujom od 20 A, a čija dužina iznosi 0,5 m, dejstvuje homogeno magnetno polje indukcije 1 T. Odrediti silu dejstva homogenog magnetnog polja.

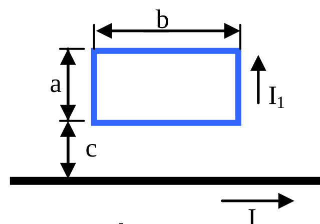
4.27. U kojim granicama će se menjati sila koja dejstvuje na provodnik dužine l = 0,3 m koji se nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije B = 1,5 T u raznim položajima prema linijama koje pokazuju magnetnu indukciju, a pri jačini električne struje I = 20 A u provodniku ?

4.28. Provodnik dužine l = 20 cm nalazi se u homogenom magnetnom polju i položen je normalno na pravac linija koje pokazuju magnetnu indukciju. Ako u provodniku postoji električna struja od I = 10 A na njega dejstvuje sila od F = 1 N:

a) odrediti magnetnu indukciju B
b) pri kojoj aktivnoj dužini bi na provodnik delovala sila od F = 2 N ?
c) pri kojoj jačini struje, a pri prvobitnoj dužini provodnika, sila opadne do F = 0,75 N ?

4.29.* Ram magnetno električnog galvanometra ima 30 navojaka i nalazi se u radijalnom magnetnom polju indukcije B = 0,3 T. Odrediti kompenzacioni specifični momenat opruge (protumomenat), ako je visina rama h = 4 cm, a širina b = 2 cm. Pri struji od 1 mA ram je načinio zaokret od 90°.

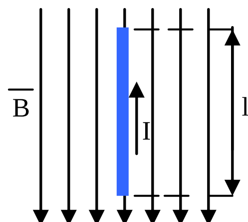
4.30.*



Sl.4.30.

Četvorougaono zatvoreno kolo postavljeno je iznad neograničeno dugog pravolinijskog provodnika koji leži horizontalno i kroz njega protiče struja I. Dve strane kola paralelne su provodniku. Bliža strana nalazi se na rastojanju c od provodnika. Strane kola su a i b. Kolo se ne može deformisati. Težina kola je G. Koji smer i koji intenzitet treba da ima struja I_1 u četvorougaonom kolu (Sl. 4.30.) da bi ono slobodno lebdelo na mestu gde je postavljeno. Kolo i provodnik su u istoj ravni. Sredina je vazduh.
Brojni podaci: I = 100 A; a = 9 cm; b = 40 cm; c = 1 cm; G = 0,3 N.

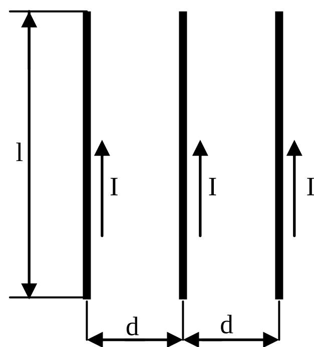
4.31.



Sl.4.31.

Odrediti silu koja deluje na provodnik koji je smešten u magnetnom polju indukcije B = 0,05 T (Sl. 4.31.). Kroz provodnik protiče struja od I = 10 A, a njegova dužina u magnetnom polju iznosi l = 20 cm.

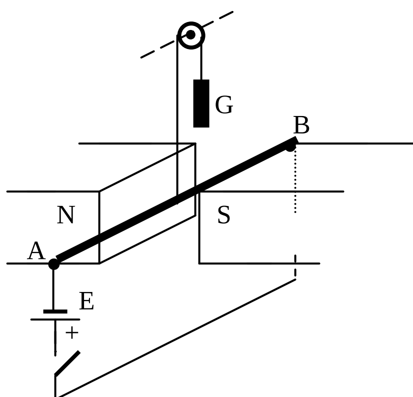
4.32.



Sl.4.32

Tri provodnika (Sl. 4.32.) smeštena su u istoj ravni i kroz njh protiče ista struja I = 100 A. Kojom elektromagnetnom silom će delovati krajnja dva provodnika na srednji, ako je rastojanje između provodnika d = 10 cm, a aktivna dužina provodnika l = 1 m ?

4.33.

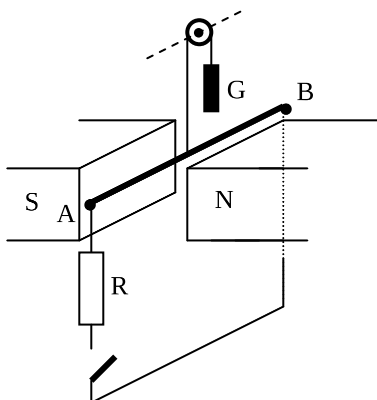


Sl.4.33

U magnetnom polju permanentnog (stalnog) magneta obešen je bakarni štap AB, uravnotežen tegom G , slika 4.33. Na koju stranu će se pomeriti štap ako zatvorimo sklopku (prekidač)?
Rešenje prokomentarisati.

4.34. Kuda se pomera bakarni štap AB iz predhodnog zadatka pod uslovom da su magnetni polovi zamenili svoje mesto, kao i polovi izvora (+ sa –)

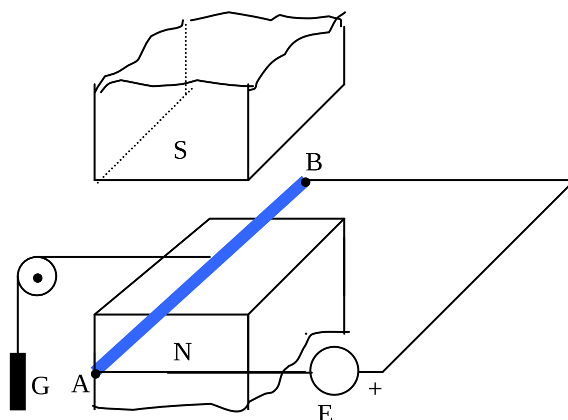
4.35.



Sl.4.35.

U polju permanentnog magneta obešen je metalni štap AB, uravnotežen tegom G (Sl. 4.35.).
Na koju stranu se pomera štap ako se zatvori sklopka?

4.36.

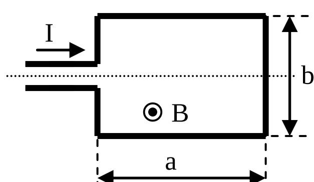


Sl. 4.36.

Provodnik AB, čija je aktivna dužina 0,2 m, nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije 0,1 T. Na provodnik je priključena ems E = 120 V. Ukupan otpor cele konture (kola) iznosi 2Ω. Kolika je masa tega G potrebna da bi se ostvario stabilan položaj provodnika , vidi sliku 4.36.

4.37. Rešiti predhodni zadatak, uz pretpostavku da promenimo polaritet ems E (zameniti + sa –).

4.38.

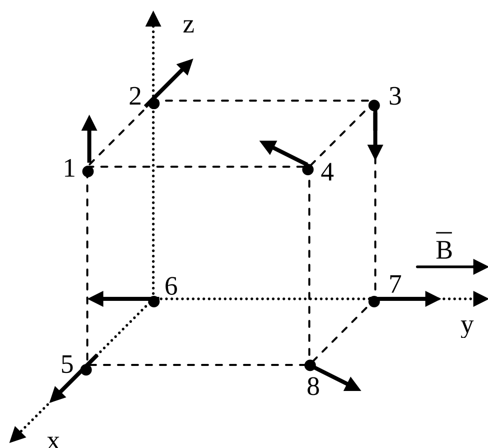


Sl.4.38

Odrediti obrtni (zakretni) momenat koji deluje na petlju prema Sl. 4.38, ako se ona nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije B = 1 T. Smer vektora B je ka posmatracu. Jačina struje u petlji iznosi I = 10 A, a dimenzije petlje iznose a = 20 cm, b = 18 cm

4.39. Koliki je obrtni momenat koji deluje na pravougaonu konturu (Sl. 62.) čije su dumenzije a = 20 cm, b = 10 cm, kroz koju protiče struja jačine I = 25 A, ako se ona nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije B = 1 T ? Vektor B je paralelan sa stranicom b.

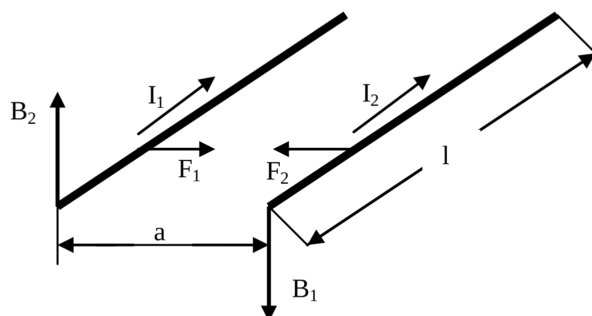
4.40.



Sl.4.40.

Odrediti pravac, smer i intenzitet elektromagnetne sile **F** koja deluje na sve čestice prikazane na slici 4.40. (koje se nalaze u temenima kvadrata). Čestice se kreću brzinama istog intenziteta **v** u naznačenim pravcima i smerovima u homogenom magnetnom polju čije su linije paralelne osi y i u smeru su te ose. Naelektrisanje svih čestica je isto i iznosi **Q**.

5. ELEKTRODINAMIČKA SILA



$$B_1 = \mu \cdot H_1 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \frac{I_1}{a}$$

$$B_2 = \mu \cdot H_2 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \frac{I_2}{a}.$$

Sl. 20.

Sila kojom drugi provodnik svojim magnetnim poljem B_2 deluje na prvi provodnik kroz koji teče struja I_1 iznosi (Sl. 20.):

$$F_1 = B_2 I_1 l = 2 \cdot 10^{-7} \mu_r \frac{I_2}{a} I_1 l \ ,$$

Odnosno, prvi provodnik svojim magnetnim poljem B_1 deluje na drugi kroz koji teče struja I_2 silom:

$$F_2 = B_1 I_2 l = 2 \cdot 10^{-7} \mu_r \frac{I_1}{a} I_2 l.$$

Može se iz navedenih relacija zaključiti da je $F_1 = F_2$, pa sledi:

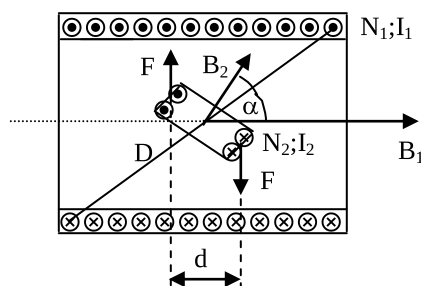
$$\mathbf{F = 2 \times 10^{-7} \mu_r \frac{l}{a} I_1 I_2 [N]}$$

gde je:
- F…..elektrodinamička sila između dva provodnika kroz koje teče struja (N)
- l…...aktivna dužina provodnika (m)
- a……rastojanje između provodnika (m)
- μ_r…..relativna magnetna permeabilnost (propustljivost)
- I_1 i I_2…struje koje protiču kroz provodnike 1 i 2 (A)

Iz navedenog obrasca daje se definicija jačine struje od 1 A

Kada je smer struja u provodnicima isti oni se privlače, i obrnuto, što se može zaključiti istim pravilima kao i kod elektromagnetne sile (pravilo leve ruke).

Ako se u nepokretnom kalemu N_1 kroz koji protiče struja I_1 nađe kalem N_2 kroz koji protiče struja I_2 između njih će delovati elektrodinamička sila $F = 2 \cdot 10^{-7} N_1 N_2 \mu_r I_1 I_2 l / a$



Sl.21.

Prema slici 21 navoj N_2 je postavljen tako da se može zaokrenuti oko svoje ose (osovinice). Na taj navoj delovati spreg sila koji navoj zakreće u određenom smeru.
Zakretni momenat iznoci:

$$\mathbf{M = F\, d}\ [\text{Nm}].$$

gde je: $d = a \sin \alpha$, odnosno - a ... prečnik navoja N_2.
Najveći je momenat za $\alpha = 90° \Rightarrow d = a$, a najmanja za $\alpha = 0° \Rightarrow d = 0$.
Na ovom principu rade elektrodinamički instrumenti.

Z A D A C I :

5.1. Dva paralelna vrlo duga provodnika na međusobnom rastojanju d = 1 m nalaze se u vazduhu. Struje u njima iznose $I_1 = I_2 = 1$ A. Kolika je jačina elektrodinamičke sile i koji joj je smer ako su smerovi struja u provodnicima : a) isti, b) suprotni ?

5.2. Na kom međusobnom rastojanju u vazduhu se nalaze dva vrlo duga provodnika kroz koje teku struje $I_1 = I_2 = 7$ A, ako se na dužinu provodnika l = 1,5 m odbijaju silom $F = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ N ?

5.3. Dva paralelna provodnika sa strujama od 1000 A nalaze se na rastojanju od a = 50 cm u vazduhu. Kojom silom deluju provodnici jedan na drugi na dužini od 1 m ?

5.4. Na kom se rastojanju nalaze dva paralelna provodnika u vazduhu kroz koje protiče struja od I = 500 A, ako je elektrodinamička sila između njih F = 0,1 N/m ?

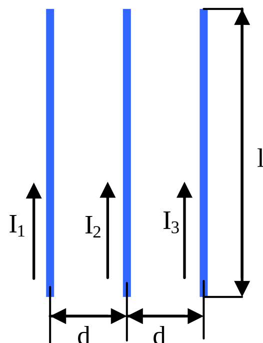
5.5. Sabirnice dužine l = 10 m postavljene su na rastojanju a = 15 cm. Pri kratkom spoju struja u njima iznosi I = 25 kA. Kojom se silom odbijaju sabirnice ?

5.6. Kroz dva paralelna provodnika u vazduhu, na rastojanju od 20 cm, prolaze struje $I_1 = 2000$ A i $I_2 = 1000$ A u istom smeru. Kolikom se silom po metru dužine provodnici privlače ?

5.7. Dva provodnika nalaze se na rastojanju od 5 cm i odbijaju se silom od F = 0,576 N/m. Kolika je struja koja prolazi kroz provodnike ako je ona: a) ista ($I_1 = I_2$), b) $I_1 = 3\,I_2$?

5.8. Kroz nepokretni navoj sa $N_1 = 200$ navojaka čije su dimenzije $l_1 = 10$ cm i $d_1 = 5$ cm protiče struja od 10 A. U njegovoj sredini nalazi se okvirni navoj sa $N_2 = 100$ navojaka čije su dimenzije $l_2 = 4$ cm i a = 4 cm, u kojem je struja takođe 10 A. Koliki je momenat sprega elektrodinamičkih sila (zakretni momenat) ako pokretni navoj svojom površinom stoji u pravcu ose nepokretnog navoja (fluksevi zatvaraju ugao od 90°) ?

5.9.

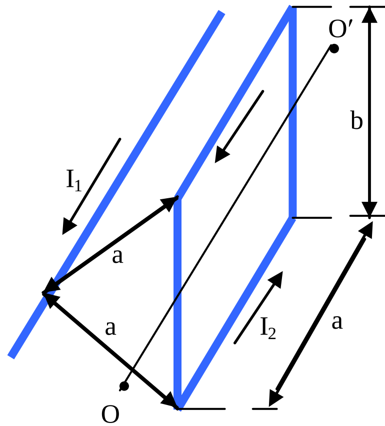


Sl.5.9.

Tri provodnika nalaze se na rastojanju od d = 10 cm i smeštena su u istoj ravni , sl. 5.9. Ako kroz provodnike protiče ista struja I = 100 A odrediti elektrodinamičku silu na svaki od provodnika, ako je aktivna dužina l = 1 m.

5.10. Tri provodnika veoma duga i međusobno paralelna nalaze se u vazduhu i u istoj ravni (SL. 61.) Ako su struje u provodnicima $I_2 = I_3 = 5000$ A, a $I_1 = 10\,000$ A i suprotnog smera od naznačenog, izračunati elektrodinamičku silu na svaki od provodnika. Rastojanja između njih je d = 125 mm, a aktivna dužina 1m.

5.11.

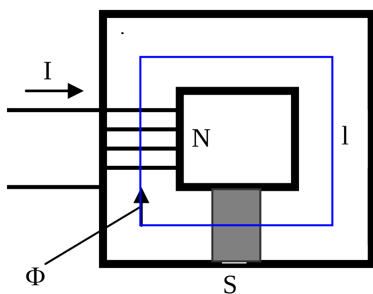


Sl.5.11.

U magnetnom polju neograničenog pravolinijskog provodnika sa strujom I_1 nalazi se pravougaona kontura sa strujom I_2, paralelna provodniku, sl. 5.11. Pravougaona kontura se može slobodno okretati oko svoje ose O O′. Koliki je obrtni momenat i kojeg je smera koji deluje na pravougaonu konturu čije su dimenzije $a \times b$.
Brojni podaci:
$I_1 = 100$ A, $I_2 = 10$ A, $a = 10$ cm, $b = 8$ cm.

6. MAGNETNA KOLA

Magnetno kolo je kolo kroz koje protiče magnetni fluks. Magnetna kola su analogna električnim pa se zbog boljeg i jednostavnijeg razumevanja ona porede sa električnim kolima. Što je el. struja u el. kolima to je magnetni fluks u magnetnim kolima.



Sl. 22.

Magnetno kolo (Sl. 22.) čine :

1. magnetomotorna sila M (izvor) ⇔ analogija sa ems E u el. kolu:
2. sredina (jezgra) kroz koju se zatvara magnetni fluks, koja ima svoju provodnost odnosno otpornost ⇔ analogija sa el provodnošću odnosno otpornošću u el. kolu.

Poredeći magnetno kolo sa električnim kolom dolazi se do važnih zakona (Omov, kirhofovi….)

6.1. KAP HOPKINSONOV ZAKON (OMOV ZAKON ZA MAGNETIZAM)

Kako (analogno sa električnim kolom) : I ⇔ Φ ; E (U) ⇔ M (U_μ) ; R ⇔ R_μ , sledi :

$$\mathbf{\Phi = \frac{M}{R_\mu}}$$

gde je: Φ ….magnetni fluks (Wb)
M…..magnetomotorna sila (magnetni napon) (A)
R_μ ….magnetni otpor (A/Wb)

Navedeni izraz predstavlja Kap Hopkinsonov zakon ili Omov zakon za magnetizam. Njega još možemo pisati i u sledećim relacijama:

$$\mathbf{R_\mu = M / \Phi} \ \ [\mathrm{A/Wb}] \ \ \mathbf{i} \ \ \mathbf{M = \Phi R_\mu} \ [\mathrm{A}]$$

6.2. MAGNETNI OTPOR I MAGNETNA PROVODNOST

Magnetni otpor, slično električnom, iznosi:

$$R_\mu = \rho_\mu \frac{l}{S} \left[A/Wb \right]$$

a magnetna provodnost ($\Lambda = 1 / R_\mu$) :

$$\lambda = \mu \frac{S}{l} \left[Wb/A \right]$$

gde je: R_μ…. magnetni otpor, a Λ…magnetna provodnosr (A/Wb, odnosno Wb/A)
ρ_μ …spec. magnetna otpornost, a μ .. spec. magnetna provodnost (permeabilnost)
l……srednja dužina magnetnih linija
S…..poprečna površina, koja obuhvata magnetni fluks.

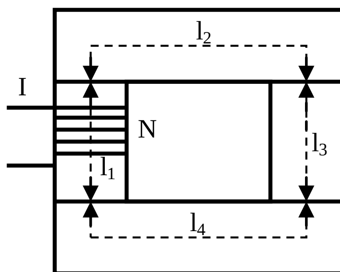
Magnetna provodnost se mnogo više upotrebljava od magn. otpornosti, što nije bio slučaj kod el. kola. Samim tim Kap Hopkinsonov zakon možemo pisati i u sledećem obliku:

$\Phi = M\,\Lambda$, odnosno: $M = \dfrac{\Phi}{\lambda} = \dfrac{BS}{\mu S / l} = Hl$; Kako je M (U_μ) magnetni napon $\Rightarrow$

Magnetni napon(magnetni pad napona), tj magnetomotorna sila iznosi :

$$U_\mu = H\,l \;\; [\,A\,]$$

6.3. REDNA VEZA MAGNETNIH KOLA (Drugo kirhofovo pravilo)



Sl.23.

Prema Sl. 23. magnetomotornu silu M stvara proizvod struje I i broj navojaka N (M = I N). Kao i kod električnog kola, tako i kod magnetnog, pri rednoj vezi otpora ukupn napon (elektromotorna sila) jednak je zbiru svih padova napona. To je ujedno drugi Kirhofov zakon, koji se u ovom slučaju naziva DRUGI KIRHOFOV ZAKON za magnetizam.

Prema drugon Kirhofovom zakonu sledi, za kolo na slici 23:

$$M = \Phi R_{\mu 1} + \Phi R_{\mu 2} + \Phi R_{\mu 3} + \Phi R_{\mu 4} = U_{\mu 1} + U_{\mu 2} + U_{\mu 3} + U_{\mu 4}$$

ili:

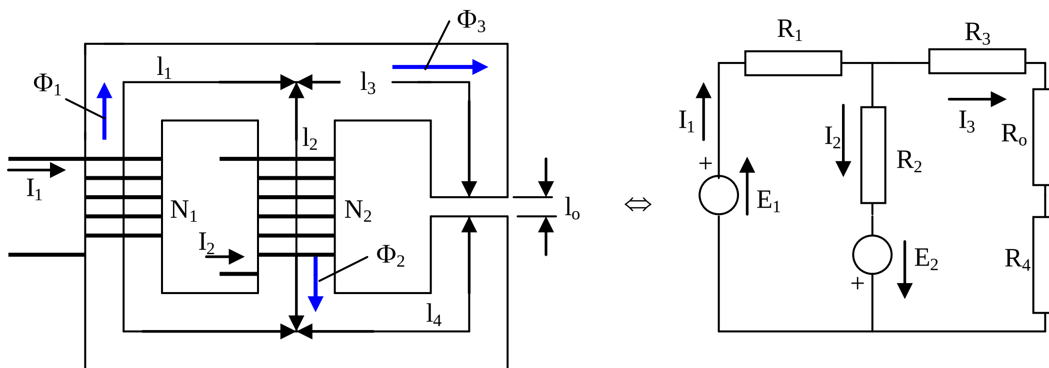
$$M = Hl_1 + Hl_2 + Hl_3 + Hl_4$$

Opšta relacija (II kirhofovog zakona) kod redne veze magnetnih otpora je:

$$M = \Phi R_{\mu 1} + \Phi R_{\mu 2} + \cdots + \Phi R_{\mu n} = Hl_1 + Hl_2 + \cdots + Hl_n$$

U praksi se često nalazi vazdušni procep u kojem je magnetni pad napona veoma velik (velik magnetni otpor), i on iznosi: $U_{\mu 0} = \Phi R_{\mu 0} = H_0 l_o = B_0 l_0/\mu_0 \cong 800\,000\, B_0 l_0$. Naravno, kod redne veze fluks je isti za sve delove kola (otpore), kao i struja kod električnih kola.

6.4. PARALELNA VEZA (RAZGRANATA) MAGNETNIH KOLA
(Primena prvog i drugog kirhofovog pravila)



Sl.24. a)

Sl.24.b.

Na Sl. 24.a. je predstavljeno jedno magnetno kolo, dok Sl.24.b. predstavlja ekvivalentno električno kolo. Način kako je rešavano električno kolo u elektrokinetici samo se prenese na magnetno kolo.
Sledi:

$\mathbf{\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3}$ …………….. ⇔ $I_1 = I_2 + I_3$ …… I Kirhofovo pravilo

$\mathbf{M_1 + M_2 = \Phi_1 R_{\mu 1} + \Phi_2 R_{\mu 2}}$ … ⇔ $E_1 + E_2 = I_1R_1 + I_2R_2$….II Kirh. pravilo

$\mathbf{M_1 = \Phi_1 R_{\mu 1} + \Phi_3 (R_{\mu 3} + R_{\mu 0} + R_{\mu 4})}$ …⇔ $E_1 = I_1R_1 + I_3 (R_3 + R_0 + R_4)$….II Kirh. pravilo

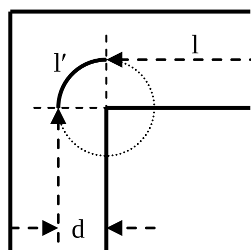
---

ili: $\mathbf{\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3}$

$\mathbf{M_1 + M_2 = H_1 l_l + H_2 l_2}$

$\mathbf{M_1 = H_1 l_1 + H_3 l_3 + H_0 l_0 + H_4 l_4}$

Jačina magnetnog polja H_1, H_2..se redovito određuje iz karakteristike magnetiziranja ($B = \mu H$).



Sl.25.

Kod najpreciznijih proračuna za srednju dužinu magnetne linije treba imati u vidu da magnetne linije u samim uglovima imaju lučno zatvaranje (¼ kruga), vidi sliku 25.U tom slučaju taj deo dužine iznosi :

$$\mathbf{l' = 2d\pi / 4} \quad \text{(vidi sliku 25) .}$$

Ovaj uticaj lučnog magnetnog fluksa je samim tim veći što je dužina l′ procentualno veća u odnosu na ukupnu dužinu l.

Z A D A C I :

6.1. Homogeno magnetno kolo ima magnetnu otpornost od $5\cdot10^{6}$ A/Wb i magnetni fluks u kolu $40\cdot10^{-6}$ Wb. Koliki broj navojaka treba da ima namotaj, ako kroz navojke teče struja jačine 200 mA ?

6.2. Homogeno magnetno kolo ima poprečni presek jezgra $S = 1$ cm^2 i $N = 300$ navojaka kroz koje teče struja jačine $I = 400$ mA. Ako je magnetna indukcija $B = 0{,}8$ T, kolika je magnetna provodnost kola ?

6.3. Kalem je načinjen od $N = 300$ navojaka u vazduhu, dužine $l = 20$ cm i površine poprečnog preseka $S = 2$ cm^2. Kolika jačina struje treba da teče kroz navojke da bi se imao magnetni fluks od $\Phi = 3\cdot 10^{-6}$ Wb ?

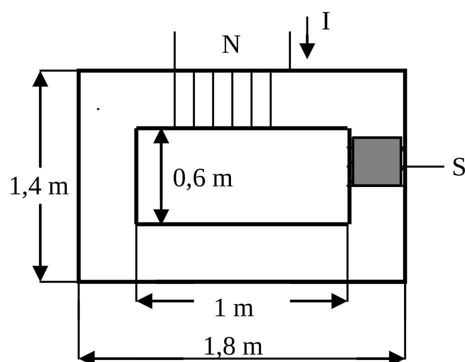
6.4. Fluks magnetne indukcije kroz torus poprečnog preseka površine $S = 4$ cm^2 je $\Phi = 4\cdot10^{-4}$ Wb. Srednja dužina torusa je $l = 40$ cm. Na torusu je namotano $N = 250$ navojaka. Torus je od magnetnog materijala čiji je magnetni permeabilitet $\mu = 0{,}65\cdot10^{-2}$ H/m. Izračunati jačinu struje koja teče kroz kalem. Koliki će biti magnetni fluks pri izračunatoj jačini struje, ako se na jezgri napravi vazdušni procep od $l_0 = 1$ mm? Za koliko bi trebalo povaćati struju da bi fluks ostao nepromenjen ?

6.5. Dužina srednje linije torusa od livenog gvožđa je $l = 50$ cm. Na torusu je ravnomerno namotano $N = 80$ navojaka. Izračunati potrebnu jačinu struje magnetiziranja I, da bi jačina magnetnog polja u torusu bila $H = 1400$ A/m (u livenom F_e) , ako je :

a) jezgro bez proreza,

b) jezgro sa prorezom širine $l_0 = 4$ mm i jačinom polja u procepu $H_0 = 30\,000$ A/m.

6.6.



Sl. 6.6.

Dato je kolo dimenzija kao na sl. 6.6. Kolo je od transformatorskih limova, čija je magnetna permeabilnost $\mu = 3\cdot10^{-3}$ H/m, a na njemu je namotano N navojaka sa strujom $I = 0{,}5$ A, koja treba da ostvari magnetni fluks od $\Phi = 1{,}6\cdot10^{-3}$ Wb. Odrediti potreban broj navojaka. (Površina $S = 40 \times 40$ cm)

6.7. Prsten od livenog gvožđa srednjeg prečnika $D = 200$ mm okruglog preseka $d = 15$ mm (prečnik), rasečen je na jednom mestu i ima vazdušni međuprostor debljine 2 mm. Zanemarujući magnetno rasipanje, sračunati potrebnu magnetomotornu silu da bi u kolu bio magnetni fluks od 0,1765 mWb.

6.8.

Za kolo, prikazano na slici 6.8, sračunati potrebnu magnetomotornu silu da bi magnetni fluks bio $\Phi = 0{,}0001$ Wb. Magnetno rasipanje zanemarljivo. Kolika bi bila potrebna magnetomotorna sila ako se na jezgru napravi vazdušni procep od 1 mm? Srednja dužina magnetnih linija za sva četiri matetijala je ista.Precnik torusa iznosi D = 20 cm..

Sl.6.8.

6.9.

Prosto kolo od livenog čelika, prema slici 6.9, treba da ima magnetnu indukciju u međugvožđu (vazdušnom prostoru) od $B_o = 1{,}2$ T. Kolika je potrebna struja ako je magnetno rasipanje 10 % ? Ukupan broj navojaka iznosi 222.
(dimenzije su date u mm)

Sl. 6.9.

6.10.

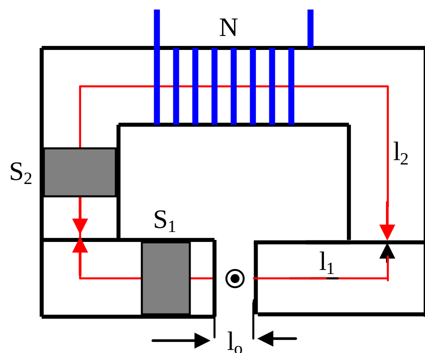
Pravolinijski provodnik dužine l_p=5cm sa strujom $I_p = 1$ mA nalazi se u vazdušnom procepu magnetnog kola, prema sl. 6.10. Dimenzije magnetnog kola su:
a = 10 cm, b = 8 cm, c = 1 cm, $l_0 = 0{,}5$ cm, relativni magnetni permeabilitet jezgra je 300, broj navojaka 2000, a struja u njemu je I = 1 A.
Odrediti:

a) magnetni fluks i indukciju u procepu zanemarujući magnetno rasipanje i jačinu električnog polje provodnika;
b) intenzitet, pravac i smer elektro- magnetne sile koja deluje na provodnik, i
c) jačinu magnetnog polja u jezgru i vazdušnom procepu.

Sl.6.10.

6.11. Navoj jednoliko namotan na feromagnetnu jezgri čije su dimenzije R_1 = 8 cm, R_2 = 12 cm, h = 15 cm (R_1, R_2….poluprečnici, a h…širina jezgre- torusa), ima magnetni fluks u jezgri Φ = 0,025 Wb, kojeg u kolu stvarau magnetni naponjezgri (magnetomotorna sila) M = 1000 A. Kolika je relativna magnetna permeabilnost jezgre ?

6.12.



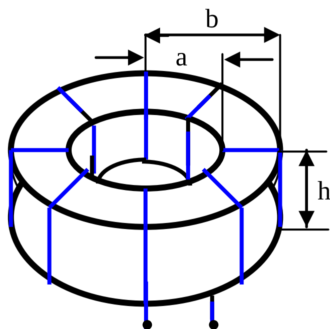
Sl. 6.12.

Naći struju kroz namotaj elektromagneta tako da sila na provodnik u procepu, kroz koji teče struja I = 1 A, iznosi $F = 18 \cdot 10^{-3}$ N. (sl. 6.12.). Dužina procepa iznosi l_0 = 1 mm, a gvozdenih delova l_1 = 10 cm i l_2 = 30 cm. Preseci jezgra su kvadratni i iznose $S_1 = 2 \times 2$ cm^2 i $S_2 = 3 \times 2$ cm^2. Broj navojaka iznosi N = 2000, a jezgra je od livenog čelika čija je kriva magnećenja data na kraju zbirke.
Odrediti smer struje u namotaju ako elektromagnetna sila pomera provodnik prema gore, a smer struje u ravnom provodniku je ka posmatraču.

6.13. Tanko magnetno kolo načinjeno je u vidu torusnog jezgra srednjeg poluprečnika R = 10 cm i površine poprečnog preseka S = 1 cm^2, a na jezgro je gusto namotano N = 500 navojaka žice. Jezgro je od transformatorskog lima, za kojeg je kriva magnetisanja (karakteristika magnetiziranja) data u dotatku zbirke. Izračunati magnetni fluks kroz magnetno kolo pri sledećim jačinama struja:
I = 0,25 A; 0,5 A; 0,75 A; i 1 A

6.14. Ponoviti predhodni zadatak predpostavljajući da je torusno jezgro od:
a) dinamo lima;
b) čeličnog lima

6.15.*∗*



Sl.6.15.

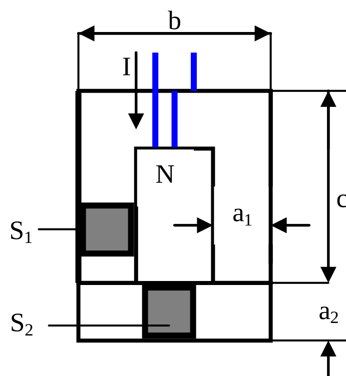
Magnetno kolo je u obliku debelog torusa prikazonog na sl. 6.15. načinjeno je od transformatorskog lima (kar. u dodatku). Dimenzije jezgra su a= 3 cm, b = 6 cm i h = 3 cm, a oko jezgra je namotaj od N = 200 zavojaka. Izračunati magnetni fluks kroz presek jezgra pri jačini struje I = 0,2 A i I = 1 A. Fluks izračunati na dva načina:

1) deleći jezgro na 5 slojeva i uzimajući srednju vrednost magnetnog polja za svaki sloj
2) računajući sa magnetnim poljem i indukcijom koji odgovara srednjoj liniji torusa.

6.16.∗ Ponoviti predhodni zadatak uz predpostavku da je torusno jezgro od:

a) dinamo-lima
b) čeličnog lima

6.17.

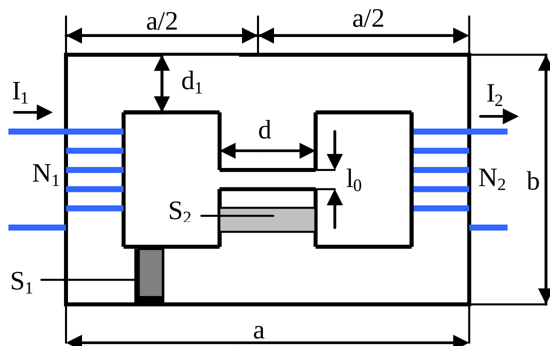


Sl.6.17.

Odrediti jačinu struje kroz namotaj kola prikazanog, na slici 6.17, tako da magnetni fluks kroz kolo bude $\Phi = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ Wb. Deo kola u obliku Π načinjen je od livenog čelika, a ravan deo od livenog gvožđa (kar. magn. na kraju knjige).

Brojni podaci:
$S_1 = 3\ cm^2$; $S_2 = 4\ cm^2$; $a_1 = 1{,}5$ cm; $a_2 = 2$ cm; b = 6 cm ; c = 6 cm i N = 100.

6.18.



Sl. 6.18.

Odrediti broj zavojaka $N_1=N_2=N$ jednog i drugog namotaja prikazanog na Sl.6.18. tako da indukcija u vazdušnom procepu bude B_0=0,1T (magnetno rasipanje od 10%), pri jačini struje kroz namotaje,koja iznosi: $I_1=I_2=I$=1A. Jezgro je načinjeno od transformatorskog lima (karakteristika magn. na kraju knjige).Zadatak rešiti na dva načina:
1.vodeći računa o magnetnom otporu jezgra
2.zanemarujući reluktansu (magnetni otpor)

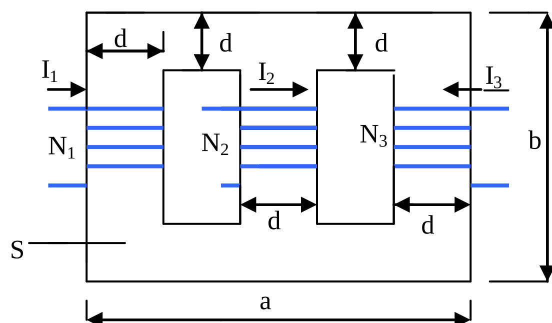
Brojni podaci: a=10 cm; b=6 cm; $d_1=d_2$=2 cm; $S_1=S_2=S=4\ cm^2$ i l_0=1 mm.

6.19. Koliko će iznositi magnetna indukcija u predhodnom zadatku ako se zanemari magnetni otpor jezgra, i ako je N = 300 a I = 2 A (magnetno rasipanje u procepu je 10 %).

6.20. Feromagnetno jezgro površine poprečnog preseka $S = 2\ cm^2$ i dužine srednje linije l = 50 cm načinjeno je od dinamo-lima čija je kar. magnetiziranja data na kraju knjige. Na jezgro je namotano N = 200 zavojaka, kroz koji protiče struja jačine I. Kolo ima vazdušni procep dužine l_0 = 1 mm, u kojem je intezitet vektora magnetne indukcije B_o = 0,43 T Izračunati jacinu struje I koja protice kroz kalem, i to:

a) zanemarujući magnetno rasipanje u procepu ($S = S_0$),
b) ako je magnetno rasipanje u procepu 20%

6.21.

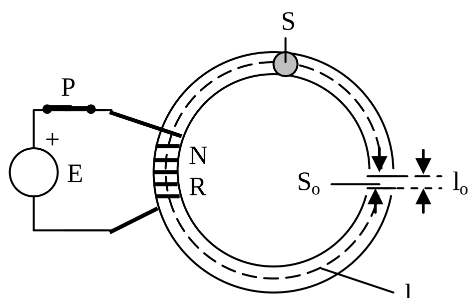


Sl. 6.21.

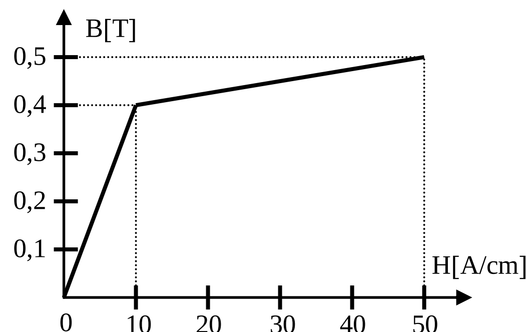
Magnetno kolo, prikazano na slici.6.21, načinjeno je od dinamo-lima (kar. magn. na kraju knjige). Dimenzije kola su: a = 6 cm; b = 4 cm; d = 1 cm; $S_1 = S_2 = S_3 = 1\ cm^2$; $N_1 = 50$; $N_2 = 80$; $N_3 = 40$. Predpostavljajući da je $I_2 = I_3 = 0$ A, izračunati jačinu struje I_1 koja u grani 3 prouzrokuje magnetni fluks od 50 μWb.

6.22. Ako je u kolu iz predhodnog zadatka $I_1 = I_2 = I_3 = 1$ A, izračunati fluks kroz sve grane kola.

6.23.



Sl.6.23. a)

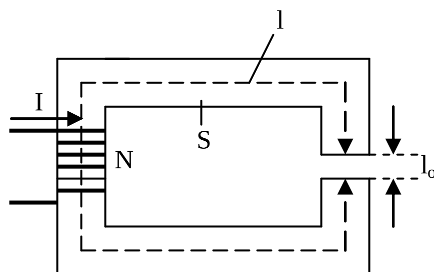


Sl.6.23. b)

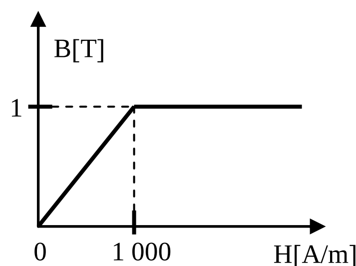
Na tankom jezgru od feromagnetskog materijala, u magnetskom kolu, prema slici 6.23. a), ravnomerno i gusto je namotano $N = 1\,000$ navojaka tanke žice, ukupne otpornosti $R = 50\ \Omega$. Poznato je: $l = 1$ m, $l_o = 3{,}14$ mm, $S = S_o = 1\ cm^2$ i $E = 150$ V. Karakteristika prvog magnetiziranja (uprošćena) je data na slici 6.23. b). Magnetsko rasipanje se može zanemariti.

Odrediti jačinu magnetskog polja u jezgru H i u vazdušnom procepu H_o.

6.24.



Sl.6.24. a)



Sl.6.24. b)

Dimenzije magnetskog kola, prikazanog na slici 6.24. a), su: $S = 5\ cm^2$, $l = 250$ mm i $l_o = 1$ mm. Namotaj na jezgru ima $N = 500$ zavojaka, a u tom namotaju postoji stalna struja jačine $I = 5$ A. Karakteristika magnetisanja materijala od kojeg je načinjeno jezgro aproksimiranjem se svelo na dva pravolinijska dela, što je dato na slici 6.24. b). Rasipni magnetski fluks se može zanemariti.

Izračunati jačinu magnetskog polja u jezgru i vazdušnom procepu.

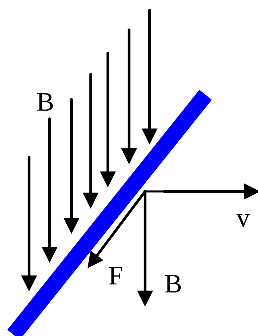
7. ELEKTROMAGNETNA INDUKCIJA

Faradej je 1831 ustanovio da se u provodniku koji se kreće u magnetnom polju indukuje elektromotorna sila. Ova pojava je i dobila naziv ELEKTROMAGNETNA INDUKCIJA, a elektromotorna sila koja se indukuje u provodniku naziva se INDUKOVANA ELEKTROMOTORNA SILA.Ova indukovana elektromotorna sila (ems) nastaje na dva načina:

1) Pomeranjem provodnika u magnetnom polju, ili obrnuto (provodnik miruje a polje se kreće),
2) Promenom magnetnog polja u vremenu (miruje i provodnik i magnetno polje).

Prva varijanta se naziva DINAMIČKA ELEKTROMAGNETNA INDUKCIJA, dok druga STATIČKA ELEKTROMAGNETNA INDUKCIJA.

7.1 DINAMIČKA ELEKTROMAGNETNA INDUKCIJA



Sl.26.

Provodnik (metal) je nosilac slobodnih naelektrisanja, samim tim i elementarnih. Na elementarna naelektrisanja koja se kreću u magnetnom polju (zajedno sa provodnikom), sl.26, deluje sila :

$$\mathbf{F = B \cdot Q \cdot v \cdot \sin \alpha,}$$

što u stvari predstavlja tzv. **Lorencovu silu**. Ova sila prouzrokuje pomeranje elektrona na jedan kraj provodnika, a protona na drugi kraj. Na taj način između krajeva provodnika javlja se potencijalna razlika (napon), koja indukuje električno polje u provodniku E_i

Kako je: $F = E_iQ$, a $E_i = U_i/d$, sledi:

$$U_i = E_i l = \frac{F}{Q} l = \frac{BQv\sin\alpha}{Q} l = Blv\sin\alpha$$

Dakle,

$$e = Blv\sin\alpha \ [\ V\ ]$$

gde je: – e… indukovana ems u provodniku (V)
– B….magnetna indukcija (T)
– l….aktivna dužina provodnika (m)
– v….brzina kretanja provodnika (m/s)
– α…ugao između B i l ; B i v ; l i v.

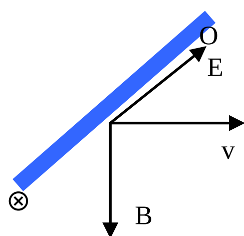
odnosno,

$$e = B\ l\ v \sin(\angle Bl) \sin(\angle Bv) \sin(\angle lv),$$

za $B \perp l \perp v \Rightarrow e = E_m = E = B\ l\ v$ (v)

$$E = B\ l\ v\ \ (\ V\ )$$

Navedeni izraz predstavlja prvi oblik elektromagnetne indukcije (zakon prostorne promene magnetnog fluksa).



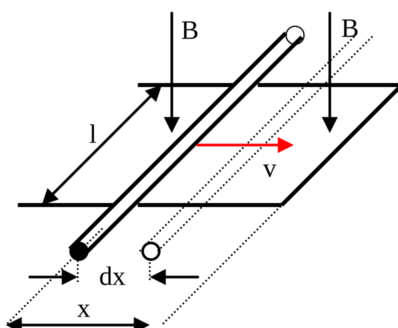
Sl.27.

Smer indukovane ems se najčešće određuje :

a) **PRAVILO DESNE RUKE**: dlan-B, palac-v, ostali-E
b) **TRI PRSTA LEVE RUKE**; palac-B, kažiprst-v, srednji-E.

Da se primetiti da je smer indukovane ems E (sl.27.) suprotnog smera od smera sile F (sl.26.), a to samo potvrđuje Lencov zakon, koji kaže da je smer indukovane struje (ems) uvek takav da se svojim magnetnim poljem suprostavlja uzroku svog nastanka.

7.2. OPŠTI IZRAZ ZA ODREĐIVANJE INDUKOVANE ELEKTROMOTORNE SILE



Sl.28

Ako na jedan pravougaoni navojak postavimo ravan provodnik (neizolovani), koji može da klizi po navojku, i to sve skupa postavimo normalno na linije magnetnog polja (sl.28.), pri pomeranju ravnog provodnika brzinom v na putu dx, provodnik će preseći magnetni fluks dΦ. Dakle, došlo je do promene fluksa:

$$d\Phi = B \cdot l \cdot dx$$

Ako izraz podelimo sa dt, sledi: $d\Phi/dt = B\, l\, dx / dt$.
Kako je $dx/dt = v \Rightarrow$

$$\frac{d\Phi}{dt} = Blv = e$$

gde je: e….trenutna vrednost indukovane ems (V)
$d\Phi/dt$…brzina promene fluksa (Wb/s)
$d\Phi = (\Phi_1 - \Phi_2)$..promena fluksa (Wb)
$dt = (t_2 - t_1)$…vreme trajanja promene fluksa (s)

Iz navedenog se može izvući zaključak da će se u ravnom provodniku koji se pomera u magnetnom polju indukovati ems, koja je srazmerna brzini promene fluksa, biti jednaka :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}\,[V]$$

Ovaj izraz ujedno predstavlja zakon elektromagnetne indukcije—zakon vremenske promene (drugi oblik)
Ako petlja u sebi sadrži više (N) navojaka, tada će u svim navojcima da se indukuje ista ems sila, pa će ukupna indukovana ems sila za navoj sa N navojaka iznositi:

$$e = -N\frac{d\Phi}{dt}\,[V]$$

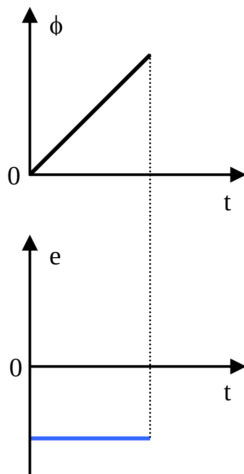
Izraz $e = -N\frac{d\Phi}{dt}$ se može pisati i u sledećem obliku:

$$e = N\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{t_2 - t_1} = -N\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

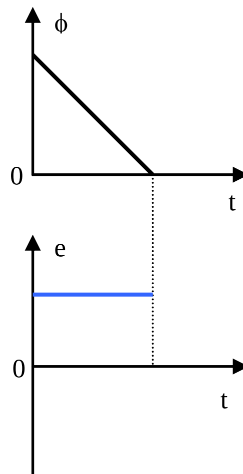
Analizirajući izraz **e = – N dΦ / dt**, može se doći do zaključka, da pri porastu magnetnog fluksa ($\Phi_2 > \Phi_1$), indukovana ems će imati suprotan smer (suprostavlja se tom porastu), što je grafički predstavljeno na slici 29. Za linearnu promenu fluksa (funkcija je pravac), tada je indukovana ems konstantna (ista promena fluksa).

Ako fluks opada ($\Phi_2 < \Phi_1$), tada je indukovana ems istog smera kao i fluks (sprečava opadanje). Pri ravnomernom kretanju provodnika, fluks se linearno (ravnomerno) menja sa porastom vremena, dok je indukovana ems konstantna, što je grafički prikazano na slici 30.

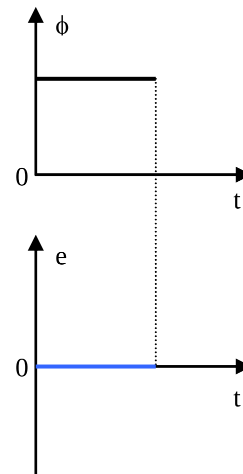
Za konstantan fluks ($\Phi_1 = \Phi_2$) tada je indukovana ems jednaka nuli, što je grafički predstavljeno na slici 31.



Sl.29.



Sl.30.



Sl.31.

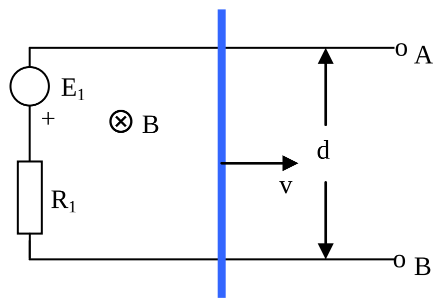
Z A D A C I :

7.1 Magnetna indukcija u kalemu od $N = 150$ navojaka povećala se sa 0,4 T na 0,6 T za 0,2 s. Naći indukovanu ems, ako je površina navojka 10 cm^2.

7.2. Provodnik se kreće u magnetnom polju indukcije $B = 0{,}5$ T brzinom $v = 20$ cm/s pod pravim uglom u odnosu na linije magnetnog polja i u njemu se indukuje ems od 40 mV. Naći aktivnu dužinu provodnika i površinu koju je provodnik prešao (“ prebrisao “) tokom kretanja u vremenu od 1 s.

7.3. Kalem od $N = 1000$ navojaka nalazi se u homogenom magnetnom polju čiji magnetni fluks u navojku iznosi $\Phi = 4\cdot10^{-4}$ Wb. Izračunati indukovanu ems u kalemu ako fluks padne na nulu za vreme $t = 0{,}02$ s.

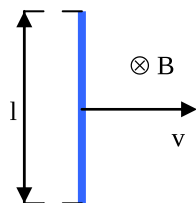
7.4.



Sl.7.4.

Dato je kolo na sl.7.4. Odrediti indukovanu ems E u provodniku otpornosti $R = 0{,}1\ \Omega$ koji se konstantnom brzinom $v = 20$ cm/s kreće duž šina čija je otpornost zanemarljiva. Rastojanje između šina iznosi $d = 20$ cm, a magnetna indukcija $B = 1{,}2$ T, smera delovanja kao na slici (u pravcu pogleda). Izračunati struju koja teče kroz kolo i napon između tacaka A i B, ako je:
$E_1 = 2$ V, $R_1 = 0{,}2\ \Omega$.

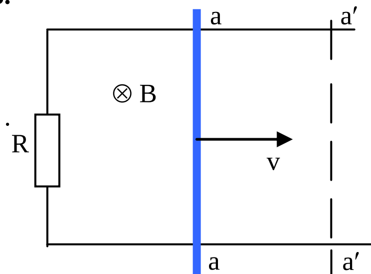
7.5.



Sl.7.5.

Pravolinijski provodnik duzine $l = 40$ cm (sl.7.5.) kreće se brzinom $v = 20$ m/s u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 0{,}8$ T. Pravac kretanja je normalan na provodnik, a smer delovanja indukcije B dat je na slici. Izračunati indukovanu ems E i odrediti smer njenog delovanja.

7.6.



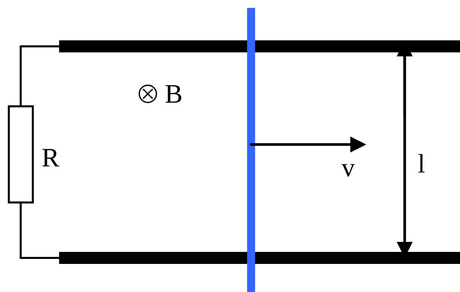
Sl.7.6.

Provodnik a-a klizi po šinama koje su na rastojanju $l = 1{,}2$ m; zanemarljive otpornosti, a koje su na jednom kraju zatvorene otpornikom otpornoscu $R = 1\ \Omega$ u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 1$ T (Sl.7.6.) Brzina kojom se provodnik kreće je konstantna i iznosi 0,2 m/s, smer je dat na slici.
Otpornost provodnika koji klizi iznosi $R_1 = 0{,}4\ \Omega$.
Odrediti:

a) indukovanu ems u kolu,
b) jačinu i smer struje u kolu,
c) snagu koja se razvija u kolu.

7.7. Provodnik aktivne dužine $l = 1{,}8$ m kreće se u magnetnom polju, normalno na linije polja, brzinom $v = 6$ m/s i u njemu se indukuje ems $E = 1.44$ V.
Kolika je magnetna indukcija B ?

7.8.



Sl.7.8.

Dve nepokretne šine međusobno paralelne, nalaze se na rastojanju l = 1 m. Šine su na jednom kraju zatvorene otpornikom otpornošću R = 0,1 Ω, otpor šina zanemarljiv.Šine se nalaze u magnetnom polju indukcije B = 1,2 T, smera delovanja kao na sl.7.8. Šipka klizi duž šina konstantnom brzinom v = 20 m/s.

Izračunati mehaničku silu F_m koja omogućuje konstantnu brzinu kretana v. i odrediti njen smer. Rešenje analizirati

7.9. Provodnik dužine 80 cm kreće se brzinom 75 m/s normalno na linije magnetnog polja, usled čega se u provodniku indukuje ems od 36 V. Kolika je magnetna indukcija polja B ?

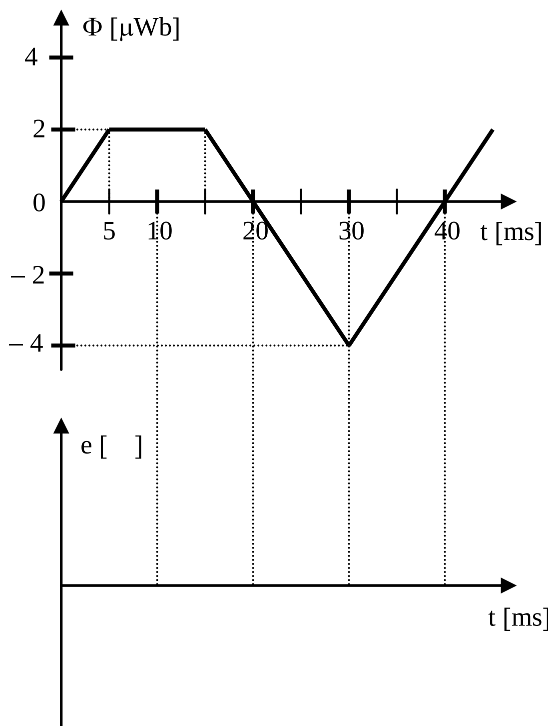
7.10. Kojom se brzinom kreće provodnik dužine 100 cm normalno na magnetne linije polja magnetne indukcije 0,8 T; ako se u njemu indukuje ems od 80 V ?

7.11. Okvirni navoj sa N= 20 navojaka okreće se stalnom ugaonom brzinom. Ako promena magnetnog fluksa kroz navoj iznosi dΦ = 0,01 Wb za kratko vreme dt = 0,05 s; kolika je indukovana ems u navoju?

7.12. Pri okretanju navoja u magnetnom polju promena magnetnog fluksa kroz navoj iznosi dΦ = 0,005 Wb za kratko vreme dt = 0,1 s i pri tom se u njemu indukuje ems od e = 2 V. Koliko navojaka ima navoj?

7.13. Kolika je brzina promene magnetnog fluksa u navoju sa N = 200 navojaka ako se u njemu indukuje elektromotorna sila od e = 0,5 V?

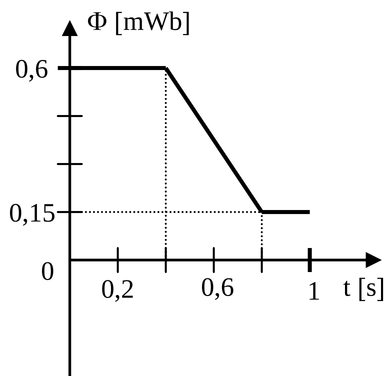
7.14.



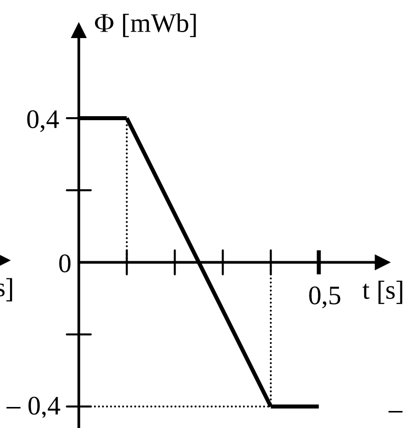
Sl.7.14.

Na vremenskom dijagramu (sl.7.14) prikazana je promena fluksa u konturi (u zavisnosti sa vremenom t). Izračunati i nacrtati vremensku promenu indukovane elektromotorne sile e u konturi, vodeći računa o prikazanim vremenskim intervalima.

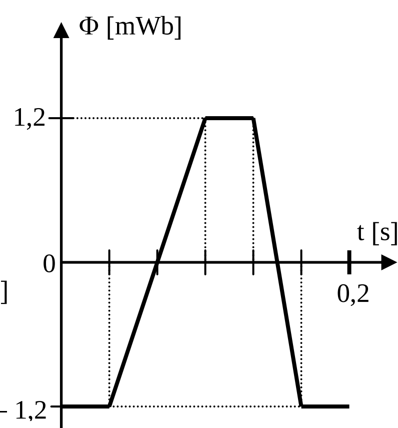
7.15. Zavisnost magnetnog fluksa od vremena, koji prolazi kroz jedan navojak prikazan je na sl.7.15 (a, b, c, d, e). Nacrtati indukovanu ems u navojku u zavisnosti od vremena i izračunaj njenu maksimalnu vrednost.



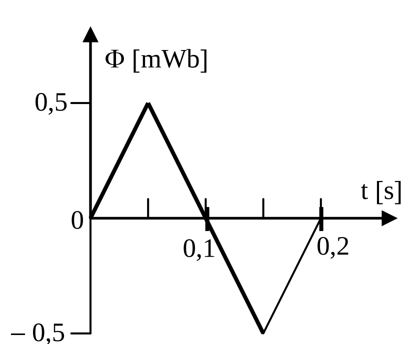
Sl.7.15. a)



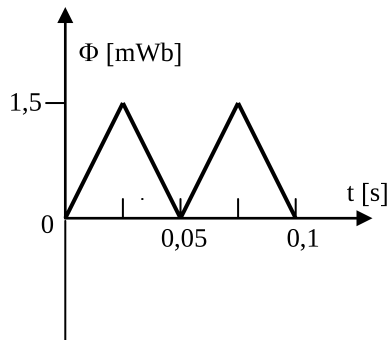
Sl.7.15. b)



Sl.7.15. c)

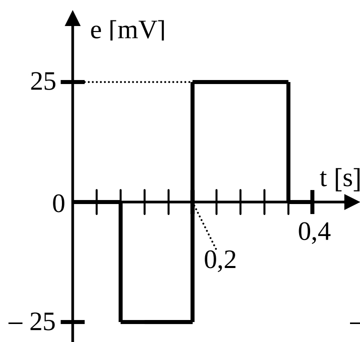


Sl.7.15. d)

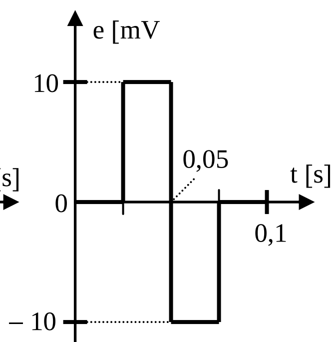


Sl.7.15. e)

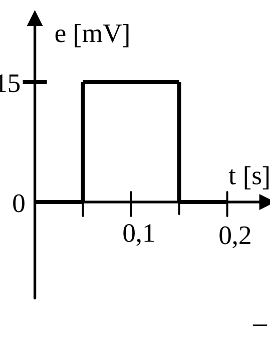
7.16. Grafički prikaz ems indukovane u strujnoj petlji u zavisnosti od vremena dat je na sl.7.16. (a,b,c,d): Prikazati grafički promenu magnetnog fluksa koji prolazi kroz strujnu petlju u zavisnosti od vremena i izračunaj njegovu vrednost ako početni magnetni fluks iznosi: 1) 0 Wb; 2) 0.01 Wb; 3) 0,004 Wb.



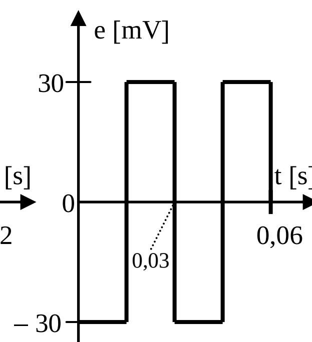
Sl.7.16. a)



Sl.7.16. b)

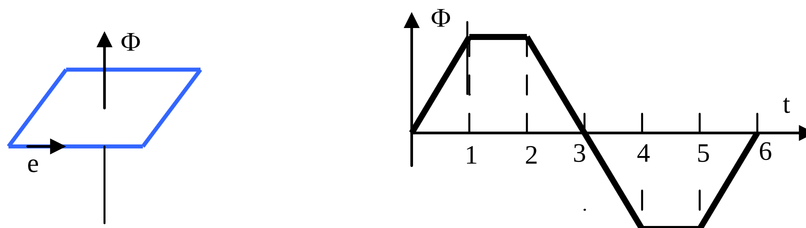


Sl.7.16. c)



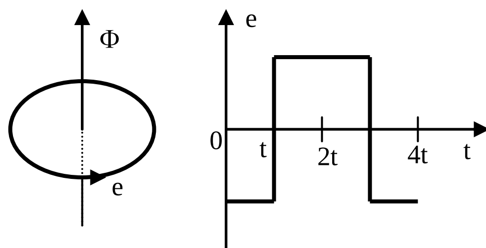
Sl.7.16. d)

7.17. Kroz petlju prema sl.7.17. prolazi magnetni fluks koji se menja, kako je prikazano na drugoj slici, u zavisnosti sa vremenom. Prikazati grafički dijagram promene indukovane ems e u odnosu na vreme t.



Sl.7.17.

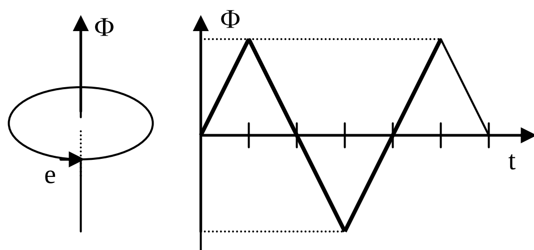
7.18.



Sl.7.18.

Prikazati grafički promenu magnetnog fluksa u zavisnosti od vremena t, ako je promena indukovane ems kao na Sl.7.18. (druga slika).

7.19.



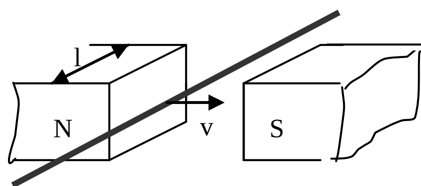
Sl.7.19

Kroz petlju , prema sl.7.19. prolazi promenljivi magnetni fluks, koji je grafički predstavljen u zavisnosti od vremena. Uz dati pozitivni smer indukovane ems e nacrtati njenu vremensku promenu (grafički dijagram).

7.20. Magnetni fluks koji prolazi kroz jedan navojak u trenutku t=0 iznosi 0,005 Wb. Koliki će biti fluks nakon jedne sekunde, ako se u navojku indukovala ems e = E = 20 mV konstantne vrednosti, a magnetni fluks se povećavao?

7.21. U vremenu od 3 sekunde magnetni fluks u navojku je porastao od 0,15 Wb na 0,24 Wb. Koliko će iznositi indukovana ems e u navojku ako se fluks povećavao linearno (ravnomerno)?

7.22.



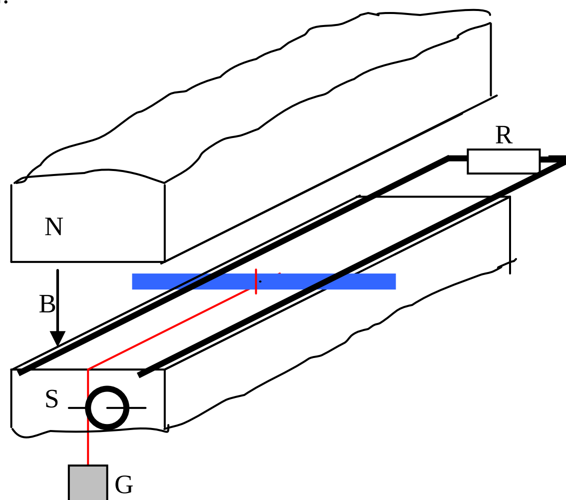
Sl.7.22.

Odrediti indukovanu ems e u provodniku koji se kreće brzinom v = 20 m/s u prikazanom smeru, sl.7.22. Magnetna indukcija je B = 0.2 T, a dužina l = 10 cm.

7.23. Pravougaoni kalem sa stranicama a i b i sa N navojaka, preseca ravnomerno brzinom v ($v \perp B$) homogeno magnetno polje indukcije B. Normala površine kalema obrazuje ugao δ sa pravcem linija magnetnog polja. Odrediti indukovanu ems i dužinu trajanja njenog dejstva.

Brojni podaci: v = 2 m/s; B = 1,2 T; N = 200; a = 10 cm; b = 25 cm; $\delta = 60°$.

7.24.



Sl.7.24.

U homogenom magnetnom polju između polova N i S prikazanih na sl.7.24, indukcije B = 1 T, kreće se provodnik po paralelnim šinama smeštenim na južnom polu. Provodnik se kreće jednolikom brzinom v = 2 m/s. Kolo je opterećeno otporom otpornosti R = 0,15 Ω.

Odrediti:

a) ems koja se indukuje u aktivnom provodniku čija je otpornost R_p = 0,01 Ω i dužina l = 40 cm;
b) struju u kolu i snagu koja se u njemu razvija kao i silu koja pokreće provodnik;
c) struju, snagu i silu u slučaju kratke veze;

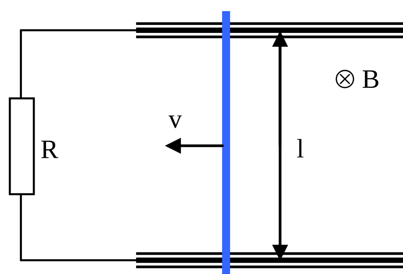
Otpornost šina je zanemarljiva.

7.25. Kolika je jačina magnetnog polja ako galvanometar (ampermetar) unutrašnje otpornosti 10 Ω, priključen na krajeve provodnika koji se kreće brzinom od 4 cm/s, kroz polje širine 3 cm, pokazuje struju od 0,1 mA?

7.26. Kalem u obliku kvadrata sa stranicama od 5 cm i 50 navojaka okreće se brzinom 250 obrtaja/minuti u unutrašnjosti dugog cilindričnog kalema koji ima 8 navojaka na 1 cm dužine i kroz koji protiče struja od 6 A.Odrediti:

a) maksimalnu vrednost indukovane ems nakon svake ½ (polovine) obrtaja;
b) koliki treba da je broj obrtaja kalema da bi maksimalna vrednost indukovane ems iznosila 10 mV?

7.27.

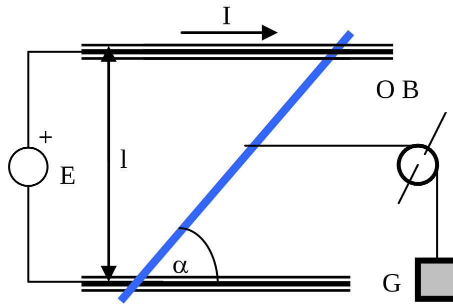


Sl.7.27..

Po šinama, čije je međusobno rastojanje l, kreće se provodnik brzinom v (sl.7.27.). Šine leže upravo (normalno) na magnetno polje indukcije B, a zatvorene su otpornikom R. Naći struju I kroz kolo kao i mehaničku silu, po intenzitetu i pravcu, da bi se savladala sila reakcije.

Brojni podaci:
l = 0,5 m; v = 20 m/s; B = 1,2 T; R = 5 Ω.

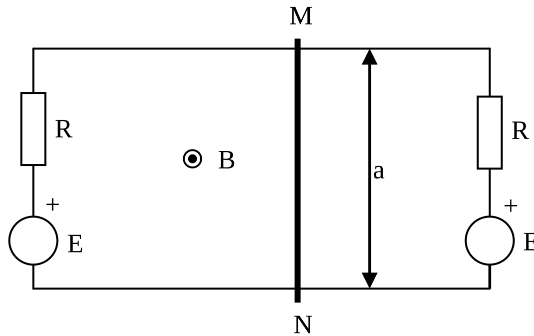
7.28.



Sl.7.28.

Provodnik, koji vuče teg nepoznate težine, klizi konstantnom brzinom po šinama u homogenom magnetnom polju magnetne indukcije B = 1 T, čije su linije normalne na ravan crteža (sl.7.28.). Struja u provodniku iznosi I = 5 A a rastojanje između šina je l = 0,5 m. Provodnik zaklapa sa šinama ugao $\alpha = 60°$.
Odrediti težinu tega kao i smer magnetnog polja B.

7.29*.



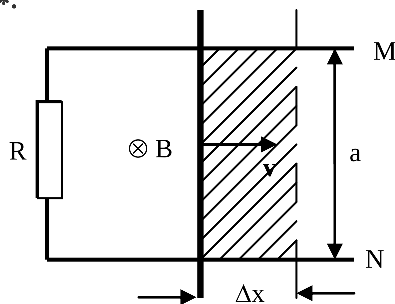
Sl.7.29.

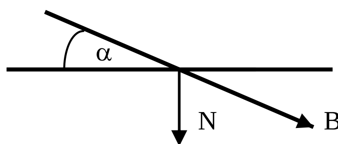
Dve paralelne šine M i N, prema slici 7.29, zanemarljive otpornosti, koje su na međusobnom rastojanju a, postavljene su u homogeno magnetno polje indukcije B, koja je normalna na ravan koju obrazuju šine i ima smer od cretža ka posmatraču. Na oba kraja ovih šina priključen je po jedan generator ems E i unutrašnje otpornosti R. Pravolinijski provodnik podužne otpornosti r, leži preko šina i sa njima zaklapa prav ugao. Otpornost kontakta između šina i provodnika je zanemarljiv.

Odrediti:
a) elektromagnetnu silu F, koja deluje na provodnik i električno polje E_p u njemu, ako je provodnik ukočen;
b) elektromagnetnu silu F′ koja deluje na provodnik, ako se on usled dejstva spoljnih sila kreće brzinom v, s leva na desno i intenzitet električnog polja E_p u tom slucaju.

Brojni podaci: a = 20 cm; E = 12 V; R = 4 Ω; r = 5 Ω/m; v = 10 m/s; B = 1,5 T.

7.30*.





Sl.7.30.

Dve paralelne šine M i N, zanemarljive otpornosti i na međusobnom rastojanju a, nalaze se u homogenom magnetnom polju indukcije B. Na jedan kraj šina priključen je otpornik R, a drugi kraj je slobodan. Provodnik, podužne otpornosti r, zaklapa prav ugao sa šinama i klizi po njima brzinom v, s levu na desnu stranu, prema sl.7.30. Vektor B zaklapa ugao α sa ravni šina i ima smer od posmatrača ka crtežu. Odrediti snagu koju prima otpornik R.

Brojni podaci: a = 1,2 m; r = 0,5 Ω/m; B = 0,1 T; R = 1,2 Ω; α = 30 °; v = 30 m/s.

7.31. Provodnik u obliku kvadrata, čija je stranica 20 cm, postavljen je normalno na linije sila homogenog magnetnog polja magnetne indukcije 0,1 T. Kolika će biti indukovana ems u provodniku ako jačina magnetnog polja opadne ravnomerno za 50 % u toku vremena dt_1 = 10 ms, a u toku narednih dt_2 = 5 ms za 100 % ? Nacrtati odgovarajući grafik zavisnosti magnetne indukcije i indukovane ems od vremena.

7.32. U nekom kolu se indukuje stalna ems od 15 V usled promene magnetnog fluksa.
a) Da li je ova promena magnetnog fluksa ravnomerna ? Odgovor obrazložiti.
b) Kolika je brzina promena magnetnog fluksa ?

7.33. Antena na automobilu dugačka je 1 m. Ako se on kreće brzinom 100 km/h u smeru istok – zapad, odrediti indukovani napon na krajevima antene. Vertikalna komponenta magnetnog polja Zemlje je 16 A/m.

7.34. U homogenom magnetnom polju nalazi se navojak površine 50 cm^2. Normala na površinu navojka gradi ugao od 60° sa vektorom magnetne indukcije. Kolika se ems indukuje u navojku pri isključenju polja ako je početna magnetna indukcija 0,2 T i ona opadne do nule po linearnom zakonu za vreme od 0,02 s ?

7.35. Zavojnica prečnika 4 cm nalazi se u homogenom magnetnom polju koje je paralelno sa osom zavojnice. Brzina promene magnetne indukcije je 10^{-2} T/s. Zavojnica ima 1000 navojaka (jednoslojno namotanih). Krajevi zavojnice spojeni su kondenzatorom od 10 μF. Koliko je naelektrisanje na pločama kondenzatora ?

7.36. Kvadrat stranice **a** nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije **B**, pri čemu su linije sila normalne na kvadrat. Odrediti indukovanu ems u kvadratu:
a) ako se on kreće brzinom **v** u pravcu normalnom na vektor indukcije **B**;
b) ako se kvadrat obrne oko jedne svoje stranice za 90° za vreme **t**.

7.37. U homogenom magnetnom polju nalazi se kalem poluprečnika **r** sa **N** navojaka. Pravac linija sila je paralelan sa osom kalema. Krajevi kalema su spojeni. Kolika će količina naelektrisanja proteći kroz kalem ako se on okrene za 180° ? Površina poprečnog preseka žice od kojeg je kalem je **S**, specifični električni otpor **ρ**, a magnetna indukcija **B**.

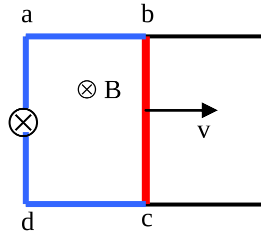
7.38. Kalem od 100 navojaka nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije 1 mT. Prečnik jednog navojka je 10 cm. Pravac magnetne indukcije je paralelan sa osom kalema. Magnetna indukcija ravnomerno opadne na nulu za 1 ms. Kolika struja pri tome protiče kroz kalem ako je površina poprečnog preseka žice 1mm^2. a provodnik je od bakra (ρ_{Cu} = 0,0178 $\Omega mm^2/m$) ?

7.39. Krajevi kalema sastavljenog od N = 1000 navojaka kratko su spojeni. Kalem je smešten u magnetno polje pri čemu su linije sila polja paralelne sa osom kalema. Površina poprečnog preseka kalema je S = 40 cm^2, a njegov otpor R = 160 Ω. Odrediti snagu Džulovih gubitaka (pretvaranje električne energije u toplotnu) ako se magnetna indukcija ravnomerno menja brzinom od dB/dt = 1 mT/s.

7.40. Kalem od 1000 navojaka nalazi se u homogenom polju koje ima pravac duž ose kalema. Površina poprečnog preseka kalema je 4 cm^2, a njegov otpor je 160 Ω. Kolika se snaga utroši na zagrevanje kalema ako se magnetno polje ravnomerno menja brzinom od 8 A/ms ?

7.41. Provodnik u obliku pravougaonog rama nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije **B**. Pravac vektora indukcije zaklapa sa ravni rama ugao od 60°. Kraća stranica pravougaonika ima dužinu **l**. Preko rama klizi, paralelno stranici l, provodnik otpora **R** brzinom **v**. Izračunati struju koja protiče kroz pokretni provodnik. Otpor pravougaonog rama zanemariti.

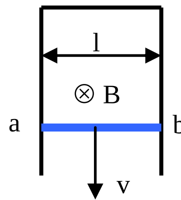
7.42.



Sl.7.42.

U homogenom magnetnom polju nalazi se provodni pravougaoni ram **abcd** pri čemu su linije sila tog polja normalne na površinu rama, prema sl.7.42. Stranica bc dužine l = 1 cm pomera se duž stranica ab i cd (pri čemu se ne prekida kontakt među provodnicima) brzinom v = 10 cm/s. Između tačaka a i d uključena je sijalica otpora R_S = 5 Ω. Kolikom silom treba delovati na stranicu bc da njena brzina ostane kao pre uključenja sijalice? Indukcija magnetnog polja je B = 1 mT, a otpor ostalih delova rama zanemariti.

7.43.



Sl.7.43.

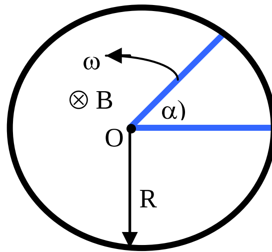
U homogenom magnetnom polju indukcije B = 10^{-2} T u vertikalnoj ravni su postavljena dva provodna štapa na rastojanju l = 50 cm. Štapovi su na vrhu spojeni (sl.7.43.). Pravac vektora magnetne indukcije je normalan na ravan koju obrazuju štapovi. Niz štapove klizi bez trenja (ali u stalnom električnom kontaktu sa štapovima) ravan provodnik ab, stalnom brzinom v = 1 m/s. Masa provodnika je m = 1 g. Odrediti otpor pokretnog provodnika ako je otpor ostalih provodnika zanemarljiv (g ≅ 10 m/s^2).

7.44. U homogenom magnetnom polju indukcije 2 T ravnomerno rotira metalna žica dužine 20 cm, oko normalne ose koja prolazi kroz jedan njen kraj. Pravac ose je paralelan pravcu vektora magnetne indukcije. Kolika će se indukovati ems na krajevima žice ako ona napravi 4 obrtaja u sekundi ?

7.45. U homogenom magnetnom polju jačine 800 A/m rotira metalni štap dužine 30 cm stalnom ugaonom brzinom od 50 rad/s. Štap rotira oko ose koja je paralelna sa linijama sila magnetnog polja i prolazi kroz jedan kraj štapa. Odrediti indukovani napon na krajevima štapa.

7.46. U homogenom magnetnom polju indukcije 2 T rotira u horizontalnoj ravni metalni štap dužine 20 cm. Osa rotacije je normalna na horizontalnu ravan, a pravac joj je paralelan sa linijama magnetnog polja i prolazi kroz jedan kraj štapa. Koliki je intezitet brzine drugog kraja štapa ako se na njegovim krajevima indukuje razlika potencijala od 0,5 V pri njegovom ravnomernom rotiranju ?

7.47*.



Sl.7.47.

Od bakarne žice poprečnog preseka 4 mm^2 napravljena je kružna kontura poluprečnika 0,2 m. Pravac homogenog magnetnog polja indukcije 0,1 T normalan je na ravan kružne konture (sl.7.47.). Centar ove konture spojen je pomoću dva pravolinijska provodnika od iste žice kao i kružna kontura sa periferijom konture. Jedna žica je nepokretna, dok se druga obrće stalnom ugaonom brzinom (5/12)π rad/s. Ako se magnetno polje indukovane struje zanemari u odnosu na spoljašnje polje, odrediti intezitet struje kroz nepokretnu žicu u trenutku 2 s posle pokretanja pokretne žice. U početnom trenutku ugao između nepokretne i pokretne žice je iznosio π/6. Za specifični električni otpor bakra uzeti vrednost ρ = 0,0172 $\Omega mm^2/m$.

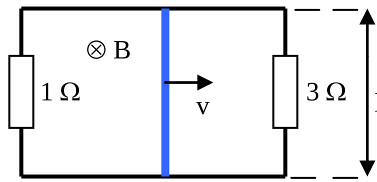
7.48*. a) Kolikom ugaonom brzinom treba da rotira žica iz predhodnog zadatka ako je jačina indukovane struje 1 A (uz isti pređeni ugao , tj. 150°) ?

b) Za koje vreme će se ostvariti struja pod a) ?

c) Kolika će struja biti u pokretnom provodniku nakon 2 s ?

d) Koji će ugao obuhvatati pokretna i nepokretna žica ako je u njima struja maksimalna a koji ako je struja minimalna ? Odgovor obrazložiti.

7.49.



Sl.7.49.

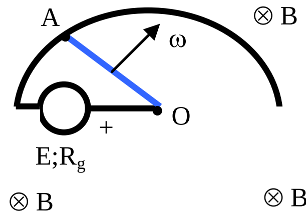
Dve paralelne šine leže u horizontalnoj ravni. Krajevi šina spojeni su otpornicima od 1 Ω i 3 Ω. Rastojanje između šina je 30 cm. Po šinama klizi (bez trenja) ravna metalna žica brzinom 0,5 m/s (sl.7.49.). Kolo je smešteno u vertikalno magnetno polje indukcije 0,02 T.

a) Odrediti jačinu struje u žici.

b) Kolika će biti jačina struje u kolu ako pregori otpornik od 3 Ω ?

Otpor žice je 0,5 Ω, a otpor šina je zanemarljiv

7.50.

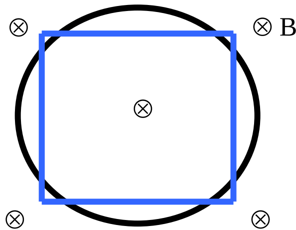


Sl.7.50.

Štap OA otpora R i dužine l klizi po polukrugu zanemarljivo malog otpora (sl.7.50.). Kontura je smeštena u homogeno magnetno polje indukcije B. Ems izvora je E, a njegov unutrašnji otpor je R_g. Ugaona brzina štapa je ω. Odrediti:

a) jačinu struje u štapu,
b) razliku potencijala na krajevima štapa,
c) pri kolikoj ugaonoj brzini će jačina struje u štapu biti jednaka nuli ?

7.51.

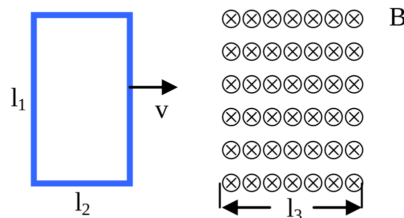


Sl.7.51.

Kružni ram prečnika 0,2 m i otpora 0,2 Ω napravljen je od tanke metalne žice. Ram se nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije $4 \cdot 10^{-4}$ T (sl.7.51.).

a) Kolika će količina elektriciteta proteći kroz ram ako se on deformiše u kvadratni ram ?
b) Kolika će količina elektriciteta proteći ako se kvadratni ram izvuče iz magnetnog polja ?

7.52.



Sl.7.52.

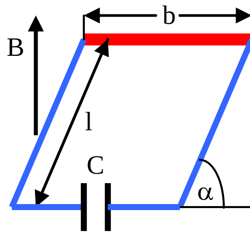
Pravougaoni provodni ram otpora 1Ω kreće se stalnom brzinom kroz oblast homogenog magnetnog polja indukcije 0,5 T (sl.7.52.). Pri kojoj brzini **v** će se u ramu izdvojiti količina toplote od 1 mJ ako je: $l_1 = 0{,}1$ m; $l_2 = 0{,}05$ m i $l_3 > l_2$?

7.53. Proviodni tanak prsten obuhvata površinu $S = 100\ cm^2$. Prsten je presečen na jednom mestui u taj razrez je spojen kondenzator kapaciteta $C = 10\ \mu F$. Prsten je smešten u magnetno polje čije su linije normalne na ravan prstena. Odrediti količinu naelektrisanja na pločama kondenzatora ako se magnetna indukcija polja ravnomerno menja brzinom dB/dt = 5 mT/s.

7.54. U homogenom magnetnom polju indukcije B = 60 mT nalazi se kalem prečnika d = 8 cm, koji ima N= 80 navojaka bakarne žice preseka S_{Cu} = 1 mm^2. Kalem se obrne za α = 180° tokom dt = 0,2 s. Pre i posle rotacije osa kalema je paralelna linijama sila magnetnog polja. Odrediti srednju vrednost indukovane ems u kalemu i indukovanu količinu naelektrisanja koja prođe kroz kalem. Za specifični električni otpor bakra uzeti vrednost ρ_{Cu} = 0,017 Ωmm^2/m.

7.55. Zatvorena kontura u obliku rama površine 50 cm^2 ravnomerno se obrće u magnetnom polju praveći 14 obrtaja u sekundi. Odrediti maksimalnu vrednost indukovane ems u konturi ako je jačina magnetnog polja 1,59·10^4 A/m.

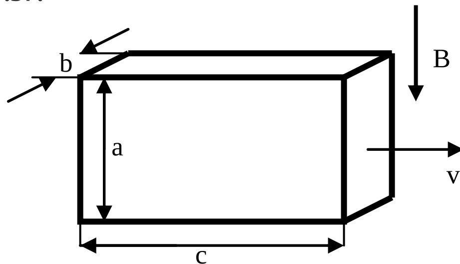
7.56.



Sl.7.56.

Po dvema paralelnim metalnim šinama klizi bez trenja provodnik mase **m.** Na jednom kraju šina vezan je nenaelektrisani kondenzator kapaciteta **C** (sl.7.56.). Šine su nagnute pod uglom **α** u odnosu na horizontalnu ravan i nalaze se na rastojanju **b** jedna od druge. Sistem je u vertikalnom magnetnom polju indukcije **B**. U početku provodnik se drži na rastojanju **l** od donjeg kraja šina. Odrediti vreme **t** za koje pušteni provodnik stigne do kraja šina. Koliku će brzinu imati provodnik u tom trenutku ? Otpor sistema je zanemarljiv.

7.57.

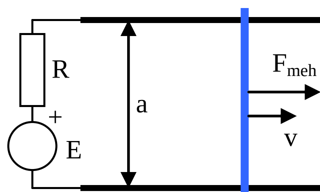


Sl.7.57.

Metalna pločica dimenzija **a**×**b**×**c**, pri čemu je **b << a , c** , kreće se brzinom **v** u magnetnom polju indukcije **B,** prikazano na slici 7.57.

a) Odrediti razliku potencijala između bočnih površina.
b) Odrediti površinsku gustinu naelektrisanja na bočnim površinama.

7.58.



Sl.7.58.

Pravolinijska šipka, dužine a = 2 m, klizi bez trenja stalnom brzinom v = 10 m/s po provodnim šinama, pod dejstvom stalne mehaničke sile F_{meh} = 10 N, kao što je prikazano na slici 7.58. Šipka je normalna na šine, a ceo sistem se nalazi u homogenom stalnom magnetnom polju, nepoznate indukcije B, normalnom na ravan koju obrazuje šipka i šine. Za šine je priključen realan naponski generator, ems E = 10 V i unutrašnje otpornosti R = 2 Ω. Snaga Otpornosti šipke i šina, kao i elektromotorna sila samoindukcije su zanemarljivo mali. Izračunati:

a) intezitet magnetske indukcije B
b) snagu realnog naponskog generatora.

8. INDUKTIVNOST KOLA

8.1. SAMOINDUKCIJA

Svako električno kolo kroz koje protiče struja nalazi se u magnetnom polju kojeg stvara ta struja. To znači da provadnik ili kalem kroz koji protiče struja nalazi se u svom sopstvenom magnetnom polju. Odnos između fluksa Φ i struje I koja stvara svoj fluks je za nemagnetne materijale ($\mu \cong \mu_0$) konstantan, i taj odnos predstavlja tzv. INDUKTIVNOST KOLA.
Dakle, induktivnost kola L jednaka je:

$$\mathbf{L = \frac{\Phi}{I}[H]}$$

Ako je u pitanju neki kalem, tada je njegova induktivnost, koja se još i naziva SAMOINDUKCIJA, jednaka:

$$\mathbf{L = N\frac{\Phi}{I}[H]}$$

gde je: - N….broj navojaka,
- Φ….magnetni fluks (Wb),
- I…..struja koja stvara fluks Φ (A).

Kako je, po Kap Hopkinsonovom zakonu $\Phi = M\,\Lambda = I\,N\,\Lambda \Rightarrow L = N\cdot(IN\Lambda/I) = N^2\Lambda$
sledi:

$$\mathbf{L = N^2\Lambda\ [H]}$$

što znači da koeficijent samoindukcije (induktivnost) zavisi od:
- kvadrata broja navojaka (N^2), i
- magnetne provodnosti (Λ).

Magnetna provodnost je jednaka $\Lambda = \mu S/l$, pa je:

$$\mathbf{L = N^2\mu S/l}$$

Izraz $L = N\,\Phi/ I$, predstavlja statičku induktivnost kola. Analogno tome sledi dinamička induktivnost kola koja iznosi:

$$\mathbf{L = N\frac{d\Phi}{dI} \Rightarrow LdI = Nd\Phi}$$

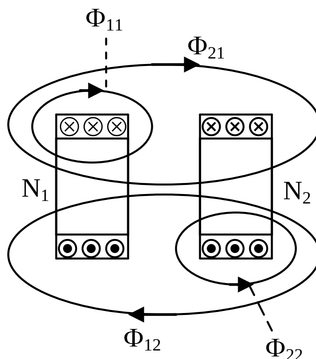
gde je **dI** i **dΦ** priraštaj (promena) struje odnosno fluksa.
Kako promena fluksa izaziva indukovanu ems u svakom navoju doći će i do indukovane ems u vlastitom navoju ako je njegov fluks promenjiv, te sledi :

$$\mathbf{e_S = -N\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}[V]}$$

gde je $\mathbf{e_s}$ indukovana ems samoindukcije, a **dI/dt** brzina promene struje. Ostale veličine su poznate od ranije.

8.2 UZAJAMNA INDUKCIJA (MEĐUSOBNA INDUKTIVNOST)

Ako kroz dva navojka (konture) u neposrednoj blizini protiču struje I_1 i I_2 one će u njima stvarati svoje flukseve Φ_{11}, odnosno Φ_{22}, kao što je prikazani na slici .32.



Sl.32.

Ukupni fluks koji prolazi kroz prvi navojak iznosi:: $\mathbf{\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}}$, a kroz drugi : $\mathbf{\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12}}$,

gde su:

- Φ_{21} … delovanje drugog navojka delom magn. polja na prvi;
- Φ_{12}…..delovanje prvog navojka delom magn. polja na drugi.
-

Sledi da je:

$$\mathbf{\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{21} I_2}$$

odnosno:

$$\mathbf{\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{12} I_1}$$

Ako bi postepeno udaljavali navojke fluksevi Φ_{12} i Φ_{21} bi se, takođe postepeno smanjivali (istovremeno), sve dok oba ne postanu jednaka nuli, tj. međusobno jednaka ($L_{12} = L_{21} = 0$ H).
Ova zajednička vrednost tzv. uzajamnih flukseva dva kola predstavljaju zajedničku karakteristiku ta dva kola i ona se naziva **UZAJAMNA INDUKTIVNOST** tih kola, ili **koeficijent uzajamne induktivnosti** tih kola.

Na osnovu navedenog sledi da je uzajamna induktivnost (međusobna) dvaju kola definisana izrazom:

$$\mathbf{L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}}$$

Navedeni izrazi predstavljaju **statičku induktivnost** (struja i fluksevi su konstantni), dok kod promene struje (nastanka ili nestanka) nastaje tzv. **dinamička uzajamna induktivnost** koja je jednaka:

$$\mathbf{L_{12} = L_{21} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_1} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_2} [H]}$$

Ako umesto navojaka imamo dva kalema N_1 i N_2 , tada će prvi navojak svojom strujom I_1 koja stvara deo fluksa Φ_{12} u drugom kalemu N_2 proizvesti induktivnost L_{12} , koja iznosi:

$$\mathbf{L_{12} = N_2 \frac{\Phi_{12}}{I_1}}$$,odnosno

Drugi kalem će svojom strujom I_2 i svojim delom fluksa Φ_{21} proizvesti u prvom kalemu N_1 induktivnost L_{21}, koja je jednaka:

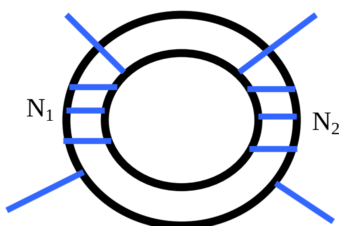
$$\mathbf{L_{21} = N_1 \frac{\Phi_{21}}{I_2}}$$

Kako je: $\Phi_{12} = N_1 I_1 \Lambda$, a $\Phi_{21} = N_2 I_2 \Lambda$(Kap Hopkinsonov zakon) $\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{L_m = L_{12} = L_{21} = N_1 N_2 \Lambda}}$$

Budući da indukovanu ems u jednom navojku stvara promena struje (fluksa) u drugom navojku, tada će indukovana ems koja nastaje usled uzajamne induktivnosti L_m iznositi:

$$\boxed{\mathbf{e_{m1} = -L_m \frac{dI_2}{dt}}} \qquad \boxed{\mathbf{e_{m2} = -L_m \frac{dI_1}{dt}}}$$



Sl.33.

Koeficijent međusobne induktivnosti je veoma teško precizno izračunati.Najjednostavnija je varijanta kod torusa (sl.33.), jer je tu srednja dužina magnetnih linija redovito i srednja dužina torusa, a samim tim i presek torusa je ujedno presek magnetnih linija. To znači da je kod torusa lako izračunati magnetnu provodnost kola Λ ($\Lambda=\mu S/l$).
Kod nemagnetnih materijala ($\mu \cong \mu_0$ $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) uzajamna induktivnost je konstantna, tj. srazmerna je broju navojaka N_1 .i N_2, kao i magnetnoj provodnosti Λ. Kod idealnog torusa (nema magnetnog rasipanja) dobije se najveća međusobna induktivnost.

Što je rasipanje veće međusobna induktivnost je manja, tj. induktivna veza je slabija. Kod idealnog slučaja koeficijent (sačinilac) induktivne veze jednak je 1, a ako induktivnosti nema koeficijent je jednak 0.

Kada pomnožimo induktivnosti L_1 i L_2 $\Rightarrow$ $L_1 L_2 = N_1^2 \Lambda N_2^2 \Lambda = (N_1 N_2 \Lambda)^2$ $\Rightarrow$

$\sqrt{L_1 L_2} = N_1 N_2 \Lambda = L_m$, Navedena relacija važi za idealan slučaj (nema magnetnog rasipanja). tj. k = 1. Kako je u praksi prisutno magnetno rasipanje ($0 \le k \le 1$)$\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{L_m = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{k = \frac{L_m}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}}}$$

Ako na torusu (sl.33) imamo dva kalema (ili više) koji su ravnomerno raspoređeni po celoj dužini tako da nema magnetnog rasipanja i ako je magnetna permeabilnost konstantna, tada je magnetna indukcija u torusu jednaka:

$$\mathbf{B = B_1 \pm B_2 = \mu (H_1 \pm H_2) = \mu (I_1N_1/l \pm I_2N_2/l),}$$

Ako još pretpostavimo da je struja $I_1 = I_2$ (navoji redno povezani), sledi:

$$\boxed{B = \mu \frac{I}{l}\left(N_1 \pm N_2\right)}$$

Znak plus je kada su magnetne linije u torusu istog smera, a znak minus za suprotan smer linija.
Rezultantni fluks kola iznosi:

$$\boxed{\mathbf{\Phi_r = B\,S\,(N_1 \pm N_2)}} \quad ;$$

Induktivnost jedinstvenog kola je:

$$L = \Phi_r / I = (N_1 \pm N_2)^2 \cdot \mu S/l = \mu N_1^2 S/l \pm 2\mu N_1 N_2 S/l + \mu N_2^2 S/l \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{L = L_1 + L_2 \pm 2\,L_m}}$$

Konačno:

$\mathbf{L = L_1 + L_2 + 2L_m}$………isti smer magnetnih linija,
$\mathbf{L = L_1 + L_2 - 2L_m}$**……..**suprotan smer magnetnih linija.

To znači da bi kod idealnog kola (k = 1), za $L_1 = L_2 \Rightarrow L = 4\,L_1$ za prvi slučaj, odnosno $L = 0$ za drugi slučaj.

Z A D A C I :

8.1. Električno zvono ima elektromagnet induktivnosti $L = 1,2$ H. Pri uključenju zvona struja poraste do 0,8 A za vreme od 0,025 s, a pri isključenju opadne na nulu za vreme od 0,05 s. Izračunati indukovanu ems samoindukcije.

8.2. Izračunati ems samoindukcije u kolu induktivnosti $L = 0,5$ H, kada se u toku 0,05 s struja u kolu poveća sa 3 A na 3,5 A.

8.3. U kolu sa $N = 300$ navojaka u vremenskom intervalu $dt = 0,2$ s, fluks po navojku od vrednosti $\Phi_1 = 0$ naraste do $\Phi_2 = 12$ mWb. Izračunati ems samoindukcije kao i induktivnost namotaja, ako se za to vreme struja povećala sa $I_1 = 0$ na $I_2 = 0,5$ A.

8.4. Namotaj od $N = 100$ navojaka ima induktivnost $L = 60$ mH. U vremenskom intervalu $dt = 0,2$ s, struja u kalemu se sa $I_1 = 0,4$ A povećala na $I_2 = 0,8$ A. Izračunati:

a) ems samoindukcije u kolu,
b) promenu fluksa kroz kolo koju je izazvalo povećanje struje.

8.5. Izračunati induktivnost torusa poprečnog preseka S na kome je ravnomerno namotano N navojaka. Poluprečnik srednje linije torusa je R, a torus je od kartona.
Dato je: $R = 20$ cm; $S = 20\ cm^2$; $N = 100$ navojaka.

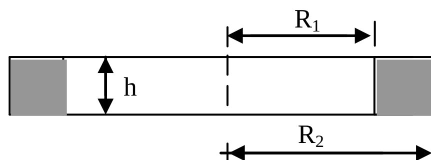
8.6. Izračunati induktivnost L kalema sa $N = 1000$ navojaka koji se nalaze u vazduhu. Kroz navojke teče struja $I = 5$ A i stvara fluks $\Phi = 5\ \mu$Wb po navojku.

8.7. Odrediti induktivnost kalema od $N = 1000$ navojaka, ako se pri magnetomotornoj sili $M = 6000$ A uspostavi fluks $\Phi = 4,5$ mWb po navojku.

8.8 Dat je torus kružnog poprečnog preseka, poluprečnika r, na kome je ravnomerno namotan provodnik dužine l_p. Materijal od kojeg je načinjen torus ima $\mu_r = 1200$. Dužina srednje linije torusa je $l = 80$ cm, a njegova induktivnost $L = 2$ H. Izračunati dužinu provodnika l_p.

8.9. Torusni namotaj, čiji je $\mu_r = 1$, ima površinu poprečnog preseka $S = 4\ cm^2$ i dužinu srednje linije $l = 40$ cm. Torus je načinjen od $N = 300$ navojaka kroz koje prolazi ukupni magnetni fluks , koji iznosi, $\Phi = 7\ \mu$Wb. Kolika jačina struje teče kroz N namotaja torusa i kolika je induktivnost torusa?

8.10.



Sl.8.10.

Na torusu pravougaonog preseka, dimenzije kao na sl.8.10. namotano je $N = 8000$ navojaka. Kroz osu torusa prolazi vrlo dug pravolinijski provodnik kroz koji protiče struja I_1. Jezgro torusa je od kartona. Izračunati međusobnu induktivnost L_m provodnika i namotaja torusa.
Brojni podaci: $R_1 = 10$ cm; $R_2 = 12$ cm; $h = 4$ cm

8.11. Dva kalema iste dužine $l = 40$ cm i broja navojaka $N = 1000$, a različitih poluprečnika $R_1 = 3$ cm, $R_2 = 1,5$ cm nalaze se u vazduhu postavljeni tako da im je koeficijenat sprege $k = 0,2$. Kolika je međusobna induktivnost?

8.12. Na solenoid dužine $l = 20$ cm, namotano je $N = 60$ navojaka. Izračunati induktivnost solenoida L, ako je relativna magnetna permeabilnost materijala od kojeg je solenoid napravljen jednaka $\mu_r = 500$, a površina poprečnog preseka solenoida $S = 3\ cm^2$.

8.13. Na istom jezgru poluprečnika R, napravljenom od materijala čija je magnetna permeabilnost $\mu_r = 200$, namotana su dva kalema: $N_1 = 200$ navojaka na dužini $l_1 = 10$ cm i $N_2 = 150$ navojaka na dužini $l_2 = 8$ cm. Izračunati poluprečnik jezgra, ako je međusobna induktivnost namotaja $L_m = 200$ mH.

8.14. Dva induktivno spregnuta navojka nalaze se u vazduhu. Na red sa prvim navojkom, čija je površina poprečnog preseka $S = 2\ cm^2$ i sopstvena induktivnost $L_1 = 4$ mH, vezan je generator stalne ems E = 10 V i unutrašnje otpornosti generatora $R_g = 2\ \Omega$. Otpornost namotaja prvog navojka je $8\ \Omega$ a struja kroz kalem stvara magnetnu indukciju B = 1 T u čijem polju se nalazi i drugi navojak iste površine poprečnog preseka S. Koeficijent sprege je k = 0,3.

Izračunati: a) međusobnu induktivnost kola,

c) sopstvenu induktivnost drugug navojka.

8.15. Izračunati induktivnost L solenoida sa N = 1000 navojaka ako se zna da je magnetomotorna sila M = 6000 A, a magnetni fluks u kolu $\Phi = 4{,}5$ mWb.

8.16. Odrediti induktivnost navoja sa N = 900 navojaka na kartonskom jezgru dimenzija d = 40 mm i l = 200 mm, kao i indukovanu ems samoindukcije u njemu pri porastu struje od nule na 5 A za vreme od 0,25 s.

8.17. Koliki je broj navojaka N navoja i induktivnost L ako se u njemu za vreme od 0.01 s pri promeni magnetnog fluksa od 1 mWb do 1,5 mWb i struje od 200 do 300 A indukuje ems samoindukcije od 10 V?

8.18. U jednom od dva magnetno spregnuta navoja uzajamne induktivnosti $L_m = 20$ mH struja se ravnomerno menja od 15 mA do nule za vreme od 1 s. Kolika je indukovana ems uzajamne indukcije za drugi navoj?

8.19. Odrediti uzajamnu induktivnost dva magnetno vezana kola kada se u jednom navoju, pri ravnomernoj brzini promene struje od 0,5 A/s, u drugom navoju javlja elektromotorna sila uzajamne indukcije od 2 V.

8.20. Odrediti uzajamnu induktivnost dva navoja namotana na čelično jezgro ($\mu_r = 1500$) ako je prečnik jezgra d = 40 mm, dužina l = 200 mm i broj navojaka $N_1 = 100$ i $N_2 = 200$.

8.21. Potrebno je napraviti solenoid koji treba da ima induktivnost L. Prečnik solenoida je d, a dužina l. Odrediti potreban broj zavojaka kada je solenoid:

a) sa jezgrom od kartona ($\mu_r \cong 1$)
b) sa jezgrom od feromagnetnog materijala čija je relativna magnetna permeabilnost jednaka $\mu_r = 1000$.

Brojni podaci: L = 0,5 H; d = 2 cm; l = 20 cm.

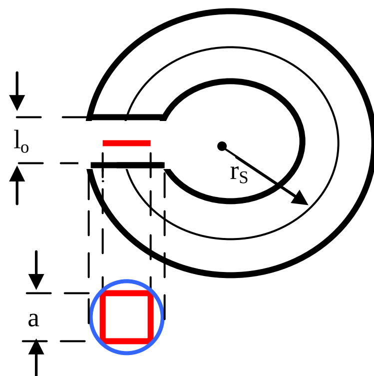
8.22. Dva solenoida istih dužina l i broja zavojaka N imaju prečnike d_1 i d_2 i nalaze se u vazduhu. Ako je poznata uzajamna indukcija L_{12}, izračunaj koeficijent induktivne sprege k.
Brojni podaci: l = 40 cm; N = 1500 zavojaka; $d_1 = 2$ cm; $d_2 = 4$ cm; $L_{12} = 0{,}533$ mH.

8.23. Na torus sa feromagnetnim jezgrom relativne magnetne permeabilnosti μ_r gusto i ravnomerno su namotana, jedan preko drugog, dva namotaja sa brojem zavojaka N_1 i N_2. Poluprečnik srednjeg kruga torusa je a. Pod uslovom da nema magnetnog rasipanja odrediti broj zavojaka N_2, tako da uzajamna induktivnost iznosi L_{12}. Prečnik torusa je d.
Brojni podaci: $L_{12} = 1$ mH; a = 10 cm; d = 1 cm; $\mu_r = 500$; $N_1 = 1000$ zavojaka.

8.24. Odrediti odnos induktivnosti L′ torusa bez vazdušnog procepa i induktivnosti L″ kada je na njemu isečen procep širine l_0. Unutrašnji poluprečnik torusa je r_1 a spoljašnji r_2.
Brojni podaci: $r_1 = 10$ cm; $r_2 = 12$ cm; N = 500; $\mu_r = 1000$; $l_0 = 1$ mm; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m.

8.25. Dat je torus kružnog poprečnog preseka poluprečnika r na kome je ravnomerno namotan provodnik nepoznate dužine l_p. Materijal od kojeg je načinjen torus ima relativnu magnetnu permeabilnost μ_r = 1200. Dužina srednje linije torusa je l = 80 cm, a njegova induktivnost L = 2 H. Naci dužinu provodnika l_p.

8.26.



Sl.8.26.

Za magnetno kolo na sl.8.26. poznato je r_s = 9 cm, površina poprečnog preseka torusa S = 3 cm^2, vazdušni procep l_0 =3 mm i relativna magnetna permeabilnost μ_r = 1000. U vazdušnom procepu nalazi se navojak kvadratnog oblika, stranice a = 1 cm, površine normalne na linije polja. U trenutku t = 0 struja I′ kroz N namotaja torusa iznosi I′= 2 A, pa za vreme dt = 0,1 s opadne linearno do I″= 0 A, a torus razmagnetiše. Pri tome se u navojku indukuje elektromotorna sila e = 705 μV. Naći:

a) magnetnu indukciju B_0' u procepu u trenutku t = 0;
b) broj navojaka torusa N i
c) induktivnost torusa.

8.27. Kalem sa 300 navojaka namotanih na jezgro od nemagnetnog materijala ima induktivnost od 10 mH. Odrediti:

a) fluks proizveden strujom od 5 A;
b) indukovanu ems kada struja od 5 A promeni smer za 8 ms.

8.28. Glavni kalem ima 1500 navojaka a dugačak je 60 m. Ispitivani kalem ima 500 navojaka i površinu poprečnog preseka 20 cm^2 a smešten je u sredini glavnog kalema. Izračunaj:

a) međusobnu induktivnost oba kalema L_m i
b) indukovanu ems u ispitivanom kalemu ako brzina ravnomerne promene struje u glavnom kalemu isnosi 250 A/s.

8.29. Izračunaj el. otpor i induktivnost jednog kalema srednjeg prečnika 1 cm, dužine 1 m sa 1000 navojaka bakarne žice prečnika 0,5 mm. Takođe odrediti kolika se ems indukuje u kalemu u momentu kada struja iznosi 1 A i menja se brzinom od 10000 A/s . Koliki će napon delovati na krajevima kalema (sredina je vazduh).

8.30. Kalem sa 1000 navojaka namotan je na jezgru preseka 20 cm^2. Ako struja od 4 A proizvede magnetnu indukciju od 1 T a struja od 9 A magnetnu indukciju od 1,4 T izračunati srednju vrednost induktivnosti (samoindukcija) kalema unutar navedenih strujnih granica kao i indukovanu ems ako struja u kalemu padne ravnomerno sa 9 A na 4 A u vremenu od 0,05 s.

8.31. Dva identična kalema sa istim brojem navojaka od po 1000 navojaka leže u dve paralelne ravne tako da koeficijenat induktivne sprege ižnosi k = 60%. U prvom kalemu struja od 5 A proizvede magnetni fluks od 0,05 mWb. Ako struja u prvom kalemu sa 6 A promeni svoj smer (- 6 A) u vremenu od 10 ms izračunati:

a) indukovanu ems u drugom kalemu e_2,
b) međusobnu induktivnost oba kalema L_m i
c) induktivnost pojedinačnih kalemova L_1 odnosno L_2.

8.32.∗ Kalem dužine 100 cm i prečnika 2 cm ima 500 navojaka nalazi se koaksijalno u drugom kalemu dužine 100 cm, prečnika 6 cm a koji ima 1000 navojaka (različitih magnetnih otpora) . Izračunati međusobnu induktivnost kalemova kao i ukupnu induktivnost kola ako su kalemovi redno povezani i to tako da se:

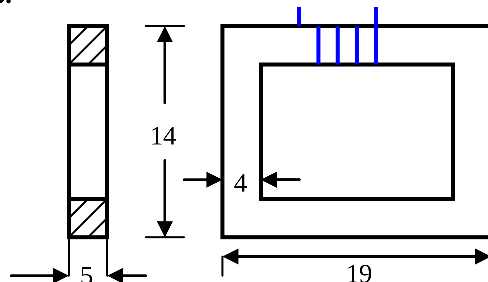
a) fluksevi oba kalema potpomažu (istog smera) i
b) fluksevi kalemova suprostavljaju (suprotnih smerova).

8.33. Dat je kalem čija je induktivnost L = 60 mH a električni otpor žice R = 8 Ω. Ako struja kroz kalem raste brzinom od 1100 A/s odrediti napon na krajevima kalema u trenutku kada struja u kalemu iznosi 15 A.

8.34. U kratkospojenom navojku struja raste sa brzinom 10 A/s, i stvara magnetni fluks koji raste brzinom 0,5 Wb/s. Kolika je dinamička induktivnost navojka.

8.35. Kako se menja induktivnost kalema namotanog na jezgru, ako se broj navojaka poveća za dva puta. a struja u njemu smanji za dva puta, uz pretpostavku da je magnetna permeabilnost konstantna.

8.36.



Sl.8.36.

Odrediti induktivnost namotaja koji je dat na slici 8.36, ako je magnetna permeabilnost jezgre $\mu = 10^{-3}$ H/m. Broj navojaka N = 100. Dimenzije jezgre date su u centimetrima.

8.37. Dva kalema sa 30 odnosno 600 navojaka namotana su jedan uz drugi na zatvorenu gvozdenu jezgru dužine 150 cm i poprečnog preseka 100 cm^2. Izračunati:

a) međusobnu induktivnost kalemova ako je relativna magnetna permeabilnost jezgre $\mu_r = 2000$.

b) indukovanu ems u drugom kalemu ako struja u prvom kalemu raste ravnomerno od 0 do 10 A u vremenu od 10 ms.

8.38.* Srednji prečnik čeličnog prstena iznosi 50 cm a magnetna indukcija u njemu iznosi 1 T koju je proizvela jačina magnetnog polja jačine 40 A/cm. Ako je broj navojaka na prstenu 500 a njihov presek 20 cm^2 izračunati:

a) induktivnost L,
b) potrebnu struju i induktivnost za slučaj uvođenja vasdušnog procepa dužine 1 cm sa tim da magnetna indukcija ostane nepromenjena. Zanemariti magnetno polje van jezgre kao i rasipanje u vazdušnom procepu.

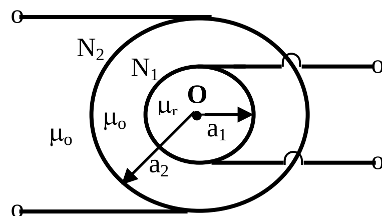
8.39.* Namotaj prečnika 3 cm, dužine 100 cm sa 1000 navojaka smešten je koaksijalno unutar drugog namotaja iste dužine i broja navojaka ali prečnika 6 cm. Izračunati približno njihovu međusobnu induktivnost kao i koeficijent njihove induktivne sprege (povezanosti).

8.40.* Koliki induktivitet L'' i L' imaju dva kalema istih magnetnih otpora ako su oni u rednoj vezi i ako su im pojedinačne induktivnosti 25 odnosno 44 mH a stepen induktivne povezanosti k = 1. Neka je L'' ukupna induktivnost kada se fluksevi potpomažu a L' kada se suprostavljaju.

8.41.* Induktivnost dvaju namotaja istih magnetnih otpora spojenih na red iznosi 0.6 H odnosno 0,1 H (zavisno da li se fluksevi potpomažu ili suprostavljaju). Ako jedan od dva namotaja ima vlastitu induktivnost 0,2 H izračunati:

a) međusobnu induktivnost L_m i
b) koeficijent magnetne povezanosti namotaja k.

8.42.



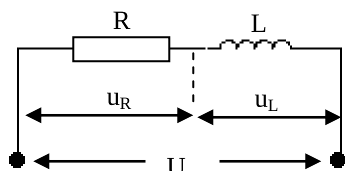
Sl.8.42.

Na slici 8.42, prikazan je poprečni presek dva vrlo dugačka solenoida postavljenih koksijalno. Poprečni preseci solenoida su kružni, poluprečnika **a_1**, odnosno **a_2**, dužina solenoida je **l**, a broj zavojaka **N_1** i **N_2**. Unutrašnjost prvog solenoida je isponjena linearnim feromagnetskim materijalom, relativne magnetske permeabilnosti **μ_r**, a između namotaja prvog i drugog solenoida, kao i izvan drugog je vazduh. Odrediti izrazza koeficijent sprege **k** ovih namotaja.

8.43. Na tankom torusnom jezgru, dužine srednje linije **l** i površine poprečnog preseka **S**, načinjenom od feromagnetskog materijala relativne magnetske permeabilnosti **μ_r**, ravnomerno i gusto su jedan preko drugoga namotana dva namotaja, sa **N_1** i **N_2** zavojaka. Nacrtati ekvivalentnu električnu šemu ovih spregnutih kola i odrediti izraze za sopstvene i međusobne induktivnosti namotaja.

9. ENERGIJA I SILE U MAGNETNOM POLJU

9.1 ENERGIJA MAGNETNOG POLJA



Sl.34.

Svaki kalem u sebi sadrži otpor R i induktivnost L. Usled indukovane ems u kalemu (kod promenljive struje) u kalemu se javlja pored otpornika R još i dodatni otpor X_L koji se naziva induktivni otpor. Prema drugom kirhofovom pravilu sledi (Sl.34):

$$U = u_R + u_L = iR - e_L = iR + Ldi/dt$$

Ako navedeno pravilo pomnožimo sa **idt** sledi :

$$\mathbf{Uidt = i^2Rdt + Lidi}$$

gde je: Uidt…energija izvora,
i^2Rdt…toplotna energija usled otpornosti R (Džulova energija), i
Lidi….energija magnetnog polja.

Pri promenljivoj struji (nastanak, nestanak ili naizmenična struja) i ove energije su promenljive.
Kod porasta struje od 0 do I (uključenjem prekidača) nastaje (priraštaj) magnetna energija koja iznosi:

$$W_m = \int_0^I Lidi = LI^2/2 \qquad \int_0^I \text{ ….određeni integral (viša matematika)}$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2[J]}$$

Navedeni (osnovni) izraz se može pisati i u sledećim oblicima : $W_m = (I^2N\Phi/I) / 2 = IN\Phi / 2 \Rightarrow$
$I^2N\Phi/I = IN\Phi = M\Phi = HlBS = HBV$
$W_m = M\Phi / 2 = HlBS / 2 = HBV / 2 \Rightarrow$

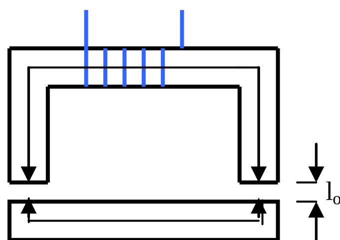
$$\boxed{\mathbf{W_m = \frac{1}{2}HBV[J]}}$$

gde je: - W_m…. magnetna energija (J)
- H……jačina magnetnog polja (A/m)
- B……magnetna indukcija (T)
- V……zapremina / V = Sl / (m^3)

Magnetna energija po jedinici zapremine (V= 1 m^3) iznosi: $W_m' = W_m / V \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{W_m' = \frac{1}{2}BH[J/m^3]}} \quad \text{ili} \quad \boxed{\mathbf{W_m' = \frac{B^2}{2u}[J/m^3]}}$$

9.2. SILE U MAGNETNOM POLJU (noseće sile magneta)



Sl.35.

Magnetna energija W_m se pretvara u mehanički rad (kotva se pomera na putu l_0), sl.35. Kako je otpor vazdušnog procepa mnogo veći od otpora feromagneta ($R_{\mu 0} >> R_{\mu Fe}$), pa je i magnetna energija u vazduhu mnogo veća od energije u samom gvožđu (magnetu). Zbog toga se za magnetnu energiju uzima energija koja je skoncentrisana u vazduhu. Magnetna energija po zapremini je: $W_m = BHV/2 = B^2V/2\mu$, a u vazduhu: $W_m = B^2Sl_0/2\mu_0$.
Pri pomaku kotve utroši se mehanička energija: $A_{meh.} = Fl_0$

Sledi da je: $B^2Sl_0/2\mu_0 = Fl_0 \Rightarrow$

$$\mathbf{F = B^2S/2\mu_o}$$

Navedeni izraz predstavlja noseću silu magneta.

Može se izvući zaključak da nosiva sila magneta ne zavisi od rastojanja površina (l_0).

Sila po jedinici površine ($S = 1\ m^2$) iznosi:

$$\mathbf{F' = \frac{B^2}{2\mu_o}\left[{}^{N}\!/\!{}_{m^2}\right]}$$

Kako je $\frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}} \approx 4\cdot 10^5 \Rightarrow$

$$\mathbf{F \cong 4\cdot 10^5\, B^2\, S}$$

odnosno,

$$\mathbf{F' \cong 4\cdot 10^5\, B^2}$$

Z A D A C I :

9.1.1. Sračunati magnetnu energiju navoja bez jezgra sa $N = 100$ navojaka u kome se sa strujom od $I = 5$ A stvorio magnetni fluks od $\Phi = 2$ mWb.

9.1.2. Navoj bez jezgra otpora $R = 2\ \Omega$ i induktivnosti $L = 10$ mH priključen je na izvor napona $U = 20$ V. Kolika se ostvarila magnetna energija u navoju?

9.1.3. Kroz cevasti navoj u vazduhu sa $N = 1600$ navojaka, srednje dužine magnetnih linija $l = 200$ cm i poprečnog preseka $S = 20\ cm^2$ prolazi struja od $I = 50$ A. Kolika je magnetna energija u navoju?

9.1.4. Sračunati gustinu magnetne energije oko pravog provodnika u tački udaljenoj 5 cm od ose provodnika, u kome je struja $I = 750$ A.

9.1.5. Sračunati gustinu magnetne energije u sredini solenoida u vazduhu, dužine $l = 10$ cm i prečnika $d = 5$ cm, koji ima 800 navojaka ako je struja u navoju 0,5 A.

9.1.6. Sračunati gustinu magnetne energije u sredini prstenastog navoja u vazduhu, poluprečnika 10 cm, prečnika jednog navojka 2 cm, koji ima 500 navojaka ako je struja u navoju 0,5 A.

9.1.7. Sračunati gustinu magnetne energije u vazdušnom procepu pri magnetnoj indukciji $B = 1,175$ T.

9.1.8. U kalemu je uspostavljena struja jačine $I = 0,6$ A. Kada struja za $dt = 0,2$ s opadne do nule, u kalemu se javlja indukovana ems samoindukcije $e_L = 10$ V. Koliko je iznosila magnetna energija u kalemu pre smanjenja struje u njemu?

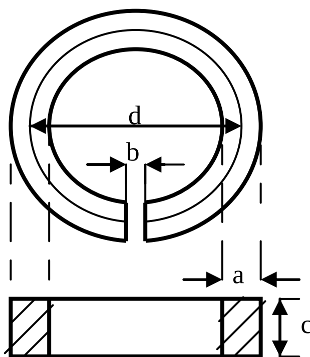
9.1.9. Za magnetno kolo, sa strujom $I = 1,5$ A i induktivnošću $L = 3$ H, izračunati magnetnu energiju kola.

9.1. 10. Kalem je načinjen od $N = 100$ navojaka kroz koje teče struja jačine $I = 2$ A, koja kroz jedan navojak kalema stvara fluks $\Phi_1 = 0,01$ Wb. Odrediti magnetnu energiju kalema.

9.1. 11. Izračunati gustinu energije sadržane u torusu od gvožđa površine poprečnog preseka $S = 4\ cm^2$, dužine srednje linije $l = 40$ cm i sa magnetnim fluksom $\Phi = 4{\cdot}10^{-4}$ Wb, ako je na torusu namotano $N = 250$ navojaka kroz koje teče struja jačine $I = 0,24$ A, a magnetna permeabilnost gvožđa je $\mu_{Fe} = 0,65{\cdot}10^{-2}$ H/m.

9.1.12. Niskonaponski rele sastoji se od solenoida čija je induktivnost 0,276 H. Ispred solenoida se nalazi gvozdena šipka sa oprugom. Kada se solenoid priključi na određeni napon u njegovim navojima postoji električna struja od 3,52 A i usled toga ostvareno magnetno polje uvlači gvozdeno jezgro. Kada je jezgro uvučeno u navojcima struja opadne na 1,41 A, a induktivnost iznosi 0,78 H. Odrediti količinu magnetne energije za oba slučaja.

9.1. 13.

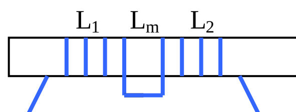


Sl.9.1.13.

Na torusu prikazanom na sl.9.1.13, koji ima procep dužine $b = 12$ mm, ravnomerno je namotano 1600 navojaka tako da nema magnetnog rasipanja. Prečnik srednjeg kruga torusa je $d = 65$ cm. Širina preseka torusa je $a = 2$ cm, a visina preseka iznosi $c = 12$ cm. Poznato je da pri struji od $I = 12$ A magnetna energija iznosi $W_m = 0.38$ J. Odrediti relativni magnetni permeabilitet materijala od koga je izrađen dati torus.

9.1.14. Kružnom navoju povećavamo dimenzije tako da mu se induktivnost poveća za dva puta. Ako je struja u navoju smanjena za dva puta kako se promenila energija magnetnog polja?

9.1.15.



Sl.9.1.15.

Odrediti energiju magnetnog polja dvaju redno spojenih navoja, namotanih na zajedničku jezgru, prema Sl.9.1.15, ako je:
$L_1 = 2$ mH; $L_2 = 4$ mH; $L_m = 1$ mH i $I = 1$ A

9.1.16. Kolika energija je potrebna za formiranje magnetnog polja u prstenastom kalemu bez feromagnetne jezgre, ako su dimenzije jezgre: srednji prečnik kalema (torusa) 28 cm; srednji prečnik navojka 6 cm; broj navojaka 800. Kroz kalem protiče struja od 3 A?

9.1.17. Kolika je energija sadržana u vazdušnom procepu dužine 1 mm, širine 20 mm i visine 27 mm, ako magnetna indukcija iznosi 1,9 T?

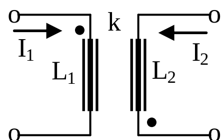
9.1.18. Izračunaj dužinu vazdušnog procepa dimenzija 60×50 mm ako u njemu , zanemarujući magnetno rasipanje, treba da bude skoncentrisana energija od 8,6 Ws uz magnetnu indukciju od 1,2 T.

9.1.19. Dva torusna namotaja, induktivnosti $L_1 = 3$ mH i $L_2 = 12$ mH, čiji je koeficijent sprege $k = 1$, vezani su na red. Kolika se može ostvariti energija magnetnog polja torusnih namotaja ako kroz njih protiče ista jačina struje od $I = 2$ A?

9.1.20. Na gvozdeni torus, prečnika 25 cm i poprečnog preseka 2,5×2 cm^2, ravnomerno je namotano 314 navojaka žice. Kroz namotaj protiče struja od $I = 2$ A. Odrediti gustinu energije magnetnog polja ako je u gvozdenom jezgru prisutan magnetni fluks od $\Phi = 1{,}5\cdot10^{-4}$ Wb. Kolika je relativna magnetna permeabilnost za datu jezgru?

9.1.21. Tanko torusno feromagnetno jezgro načinjeno je od materijala koji se, približno, može okarakterisati konstantnom magnetnom permeabilnošću $\mu = 4000\,\mu_0$. Srednji poluprečnik jezgra je $R = 10$ cm, a površina poprečnog preseka mu je $S = 1$ cm^2. U namotaju od $N = 500$ navojaka oko jezgra, postoji struja jačine $I = 0{,}1$ A. Izračunati energiju utrošenu pri namagnetisanju jezgra (gustinu magnetne energije), kao i ukupnu energiju magnetnog polja u jezgru.

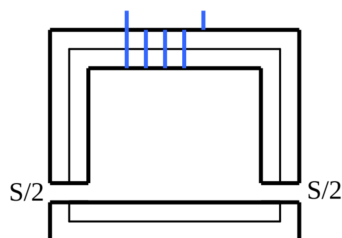
9.1.22.



Sl.9.1.22

Sopstvene induktivnosti dve spregnute konture, prikazane prema slici 9.1.22, su $L_1 = 1$ mH i $L_2 = 4$ mH, a koeficijent induktivne sprege je $k = 0{,}5$. U konturama postoje stalne struje jačina $I_1 = 2$ A i $I_2 = 1$ A. Kolika je magnetska energija ovog sistema ?

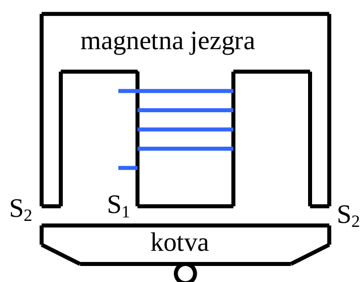
9.2.1.



Sl.9.2.1.

Kolika je sila nošenja potkovičastog elektromagneta, prema slici 9.2.1, ako struja u njegovim navojima stvara magnetni fluks gustine B = 1 T i ako jedna dodirna površina iznosi 10×20 cm^2?

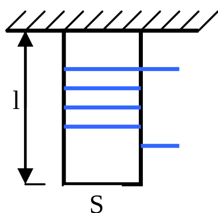
9.2.2.



Sl.9.2.2.

Sračunati silu koja drži kotvu uz polove kružnog elektromagneta na slici 9.2.2, pri gustini magnetnog fluksa B = 0,85 T, ako prečnik kružne povrsine S_1 iznosi 120 mm, a prečnici prstenaste povrsine S_2 imaju 220 i 260 mm.

9.2.3.

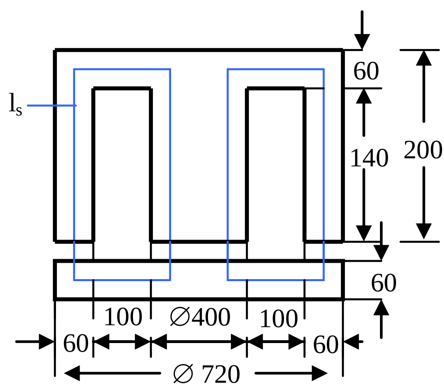


Sl.9.2.3.

Elektromagnet u obliku šipke sačinjen je od livenog gvozđa , prema slici 9.2.3, ima dužinu l = 20 cm i presek jezgre S = 4×4 cm^2.

Odrediti silu kojom se može podignuti teret ako kroz namotaj sa N = 100 navojaka protiče struja jačine I = 5 A.

9.2.4.



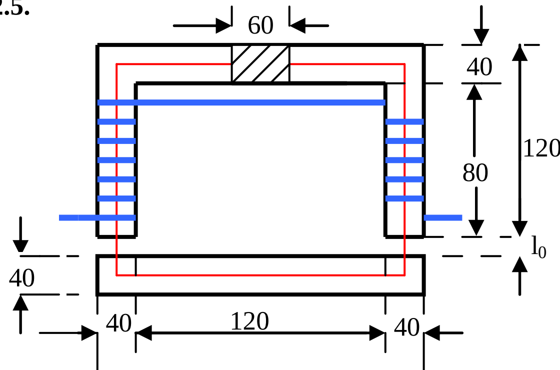
Sl.9.2.4.

Kružni elektromagnet od livenog čelika, prema slici 9.2.4, treba da nosi teret mase od 3 tone.

Koliki treba da je broj navojaka N ako je struja u njemu I = 1,5 A?

Dimenzije su date u mm.

9.2.5.



Sl.9.2.5.

Potkovičasti elektromagnet od livenog čelika (sl.9.2.5) ima navoj sa 2×300 navojaka.

Kolika je struja potrebna da bi on privukao kotvu sa teretom mase 200 kg sa daljine l_0 = 1 cm?

Kolika je struja potrebna da drži ovaj teret?

9.2.6. Kolika magnetna energija vlada na ankeru jednog releja ako njegova poprečna površina polova iznosi 0,25 cm^2 a privlačen je silom od 3,43 N?

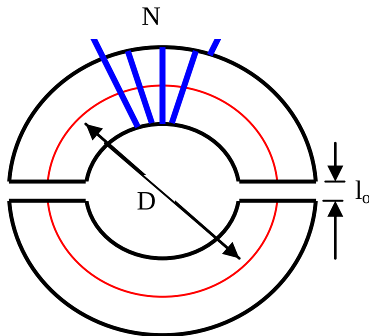
9.2.7. Na oba pola dimenzija 15×18 mm jednog elektromagneta vlada magnetna indukcija od 0,64 T. Kolikom će silom biti privučen polovima odgovarajući viseći anker? Kolika će biti magnetna indukcija na polovima ako je anker privučen silom od 117,72 N ?

9.2.8. Elektromagnet sa polnim nastavkom kružnog poprečnog preseka prečnika 1,8 cm treba da razvije silu od 24,525 N. Koliki je magnetni fluks i magnetna indukcija elektromagneta na krajevima polnih nastavaka?

9.2.9. Koliki je induktivitet releja sa 18000 navojaka koji kod struje od 30 mA razvija silu od 4.415 N? Prečnik polnog nastavka kružnog oblika iznosi 1,75 cm.

9.2.10. Kako se menja privlačna sila elektromagneta ako (pri promenljivoj struji) povećamo površinu polnih nastavaka za duplo, uz pretpostavku da je magnetni fluks ostao nepromenjen?

9.2.11.



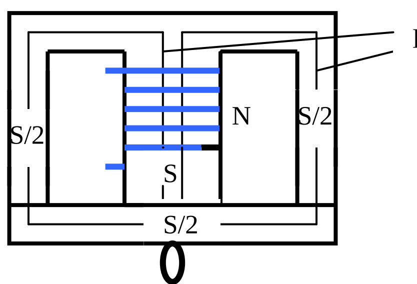
Sl.9.2.11.

Na torusu preseka S = 4 cm^2, sl.9.2.11, koji se sastoji iz dva dela jednake dužine od kojih je jedan od transformatorskog lima a drugi od livenog čelika, namotano je ravnomerno N = 1000 navojaka . Da bi se održale ove dve polovine na rastojanju od l_0 = 1 mm potrebna je sila od 117.72 N (12 kp). Odrediti potrebnu struju kroz namotaj, ako je prečnik torusa D = 30 cm, a karakteristike magnetiziranja za date materijale su date na kraju knjige.

9.2.12. Kalem od 3000 navojaka namotan je ravnomerno na torus od livenog čelika, koji se sastoji iz dva polukružna dela. Kalem se tako napaja da je potrebna sila od 98,1 N da drži obe polovine na rastojanju od 0,1 cm. Srednji prečnik torusa je 50 cm a presek jezgra iznosi 4 cm^2. Odrediti:

a) fluks u procepu između dve polovine torusa
b) struju kroz namotaj i
c) induktivnost (samoinduktivnost) kalema pri gornjim uslovima.

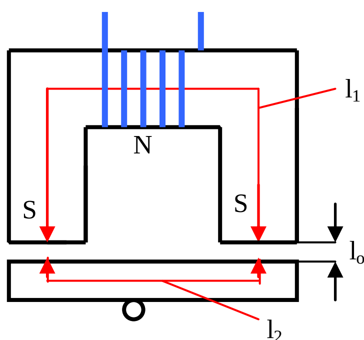
9.2.13.



Sl.9.2.13.

Odrediti noseću silu elektromagneta postavljenog kao na sl.9.2.13, kada kroz namotaj protiče struja od I = 120 mA. Presek S iznosi 4 cm^2 a srednja dužina magnetnih linija je l = 20 cm. Površine naleganja su dobro obrađene tako da vazdušni procep između kotve i jezgra ne postoji. Broj navojaka je N = 1000. Materijal kotve i jezgre je od livenog čelika

9.2.14.



Sl.9.2.14.

Pretpostaviti da su dimenzije elektromagneta i kotve na sl.9.2.14 sledeće: S = 100 cm^2, l_1 = 50 cm, l_2 = 20 cm. Ako je elektromagnet načinjen od dinamo lima, za koji je karakteristika data na kraju knjige, odrediti potreban broj navojaka i jačinu struje kroz njih da bi elektromagnet mogao da nosi (uključujući i težinu kotve) 300 kp (1 kp = 9,81 N), ako je N = 100 navojaka.

10. MAGNETNI HISTEREZIS I VRTLOŽNE STRUJE

10.1. MAGNETNI HISTEREZIS

Kod histerezne petlje (nastanka magnetiziranja—rast H) električna energija se jednim delom pretvara u magnetnu (pojava magnetnog polja) a drugim delom u toplotnu (sudaranje elektrona u magnetnoj jezgri). Slično se događa i kod razmagnetiziranja (opadanje H). Kako u praksi imamo naizmeničnu struju, sledi da će u svim feromagnetima koji se nalaze u magnetnom polju naizmenične struje doći do ovih pretvaranja energija. Veoma je teško odrediti utrošenu energiju (magnetna i toplotna) kod feromagneta (gvožđa). Usled toga u praksi se određuje SNAGA GUBITAKA (P_H), koja se računo prema empirijskoj (kroz praksu utvrđenoj) relaciji:

$$\mathbf{P_H = p_h\, m\, f\, B_m^2 \;\; [W]}$$

gde je: P_H….snaga gubitaka usled magnetnog histerezisa …jedinica (W)
p_h….specifična snaga gubitaka (gubici pri m=1 kg; f=1 Hz; B_m=1 T)..jedinica (W/kgHzT^2);
m….masa feromagneta (gvožđa) …jedinica (kg)
B_m…maksimalna magnetna indukcija koju feromagnet poseduje …jedinica (T)
f…..frekvencija (Hz)

Pošto je kod magnetnih kola u proračunima poznata zapremina (površina i srednja dužina) feromagneta, masa se često određuje iz relacije:

$$\mathbf{m = \wp V = \wp\, S_{Fe}\, l \; [kg]}$$

gde je:

$$\mathbf{\wp = \frac{m}{V}\left[{kg}/{m^3}\right]}$$

$\wp$…specifična masa, koja za gvožđe iznosi 7800 kg/m^3.

10.2 VRTLOŽNE STRUJE

U svim metalnim delovima (motori, generatori, transformatori..), koji se nalaze u promenljivom magnetnom polju (polje naizmenične struje) indukovati će se ems, a samim tim i el struja. Vrtložne struje se zatvaraju same u sebe (Fuk – fukove struje) čime i čine zatvoreno strujno kolo. Usled pojave vrtložnih struja svi metalni delovi se dodatno greju, pa se kod mašine velikih struja (transformatori) o ovome mora posebno voditi računa kako ta toplota nebi proizvela neželjene posledice (pregorevanja).
Slično kao i kod magnetnog histerezisa i kod vrtložnih struja došlo se do empirijske formule po kojoj se računaju snage gibitaka (toplota) koja se javlja pojavom ovih struja, a ona glasi:

$$\mathbf{P_{VS} = p_{vs}\, m\, f^2\, B_m^2 \;\; [\,W\,]}$$

gde je: P_{VS}….snaga gubitaka usled vrtložnih struja …. jedinica (W);
p_{vs}…. specifična snaga gubitaka (za m =1 kg; f = 1 Hz; B_m = 1 T)…jedinica (W/kgHz^{2}T^2).

Magnetni histerezis i vrtložne struje javljaju se istovremeno u metalnim kućištima koja se nalaze u promenljivom magnetnom polju, pa su ukupni gubici u gvožđu (feromagnetu) jednaki:

$$P_{Fe} = P_H + P_{VS}$$

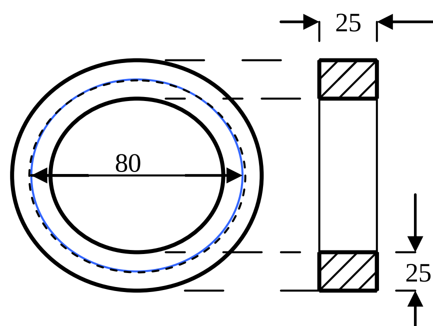
Specifični gubici se pored frekvencije $f = 1$ Hz, daju i za frekvenciju od 50 Hz.
Specifični gubici zavise, kako od materijala, tako od dimenzija limova (što se može primetiti i u datoj tabeli).
Kod transformatora pomoću limova i papirne izolacije između njih u značajnoj meri se smanjuju gubici usled vrtložnih struja.

TABELA SPECIFIČNIH GUBITAKA USLED HISTEREZISA I VRTLOŽNIH STRUJA

Materijal	**Specifična masa** [kg/m³]	**Debljina lima** [mm.]	**Specifični gubici**		**Specifični gubici u F_e**		
			p_h [W/kgH_ZT^2]	p_{vs} [$W/kgH_Z^2\ T^2$]	p_{h50} [W/kg]	p_{vs50} [W/kg]	p_{fe50} [W/kg]
Normalni dinamo lim (sa C)	7800 7800	1,0 0,5	0,048 0,048	0,002 0,00048	2,4 2,4	5,000 1,200	7,400 3,600
Slabo legirani dinamo lim (sa S_i)	7750	0,5	0,047	0,00026	2,35	0,650	3,000
Srednje legiani dinamolim (sa S_i)	7650	0,5	0,038	0,00016	1,9	0,400	2,300
Jako legirani dinamo lim (sa S_i)	7550 7550	0,5 0,35	0,0235 0,0235	0,00011 0,00005	1,175 1,175	0,275 0,125	1,450 1,300

Z A D A C I :

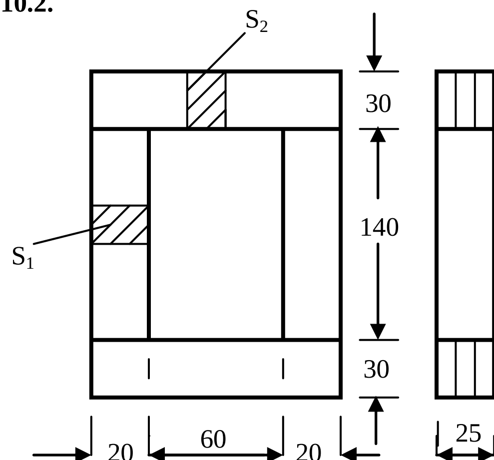
10.1.



Sl.10.1.

Magnetno kolo sa strujnim transformatorom, prema sl. 10.1, sačinjeno je od dinamo limova debljine 0,35 mm. Sračunati gubitke usled histerezisa i vrtložnih struja, kao i ukupne gubitke u feromagnetu ako je frekvencija (učestanost) $f = 50$ Hz, a fluks se menja u granicama $\pm 0,5$ mWb.
Dimenzije su date u milimetrima.

10.2.

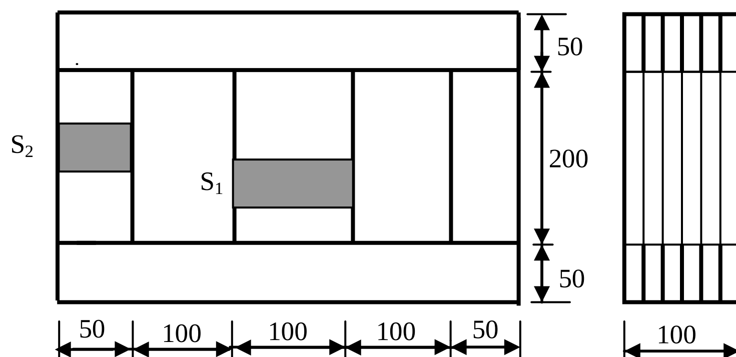


Sl.10.2.

Magnetno kolo, prikazano na slici 10.2, sačinjeno je od srednje legiranog dinamo-lima, debljine 0,5 mm, koji su odvojeni papirom i zauzima 10% debljine (zapremine). Frekvencija promene fluksa iznosi $f = 50$ Hz u granicama $\pm 0,5$ mWb. Sračunati ukupne gubitke u dinamo-limu (histerezis i vrtložne struje).

Dimenzije su date u mm.

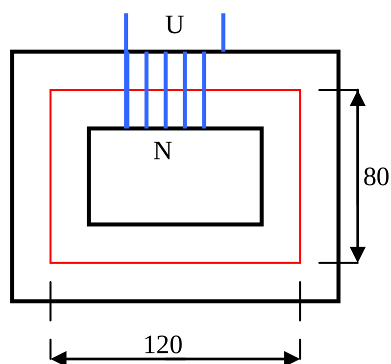
10.3. Magnetno kolo, prema Sl.10.3, sastavljeno je od jako legiranih transformatorskih limova, debljine 0,35 mm, koji su razdvojeni hartijom koja zauzima 12% debljine (zapremine). Učestanost promene fluksa iznosi $f = 50$ Hz u granicama od ± 9 mWb. Sračunati ukupne gubitke u magnetnoj jezgri.



Sl.10.3.

Napomena:
Fluks Φ predstavlja ukupni fluks, koji prolazi kroz srednji stubac (na krajnjim stubcima on se deli na Φ_2 i Φ_3)

10.4.



Sl.10.4.

Dato je magnetno kolo transformatora, debljine lima d = 0,35 mm (sl.10.4.). Aktivni presek jezgra (bez hartije) je $S_{Fe} = 23\times10^{-4}\ m^2$ i na njega je namotano N = 100 navojaka. Otpor (omski) namotaja je R = 1 Ω.

Ako je maksimalna vrednost fluksa Φ_m = 2,57 mWb, odrediti:

a) magnetomotornu silu za stvaranje datog fluksa
b) gubitke usled histerezisa i vrtložnih struja;
c) džulove gubitke u namotaju, ako kroz njih protiče struja od I = 0,9 A.
d) ukupne gubitke elektromagnetnog sistema

NAPOMENA ! Zanemariti magnetna rasipanja.

10.5. Izračunati specifičnu snagu gubitaka usled vrtložnih struja (p_{vs}) i magnetnog histerezisa (p_h) kao i ukupnu snagu specifičnih gubitaka (p_{Fe}) kod frekvencije od 50 Hz ako su kod maksimalne indukcije od 1,5 T gubici u gvožđu na frekvenciji 42 Hz iznosili 69 W, a na frekvenciji 60 Hz 116 W.

Masa gvožđa iznosi 10 kg.

NAPOMENA: Pogledati datu tabelu specifičnih gubitaka.

R E Š E N J A :
∗ E L E K T R O S T A T I K A ∗

1.1. ----- $m = m_e + m_p + m_n = 3 \cdot 9{,}108 \cdot 10^{-31} + 3 \cdot 1{,}6724 \cdot 10^{-27} + (7-3) \cdot 1{,}6747 \cdot 10^{-27} = 11{,}719 \cdot 10^{-27}$ kg.

1.2. ----- $m_u = 92 \cdot 9{,}108 \cdot 10^{-31} + 92 \cdot 1{,}6724 \cdot 10^{-27} + (238-92) \cdot 1{,}6747 \cdot 10^{-27} = 398{,}45 \cdot 10^{-27}$ kg.
$m_{He} = 2 \cdot 9{,}108 \cdot 10^{-31} + 2 \cdot 1{,}6724 \cdot 10^{-27} + (4-2) \cdot 1{,}6747 \cdot 10^{-27} = 6{,}696 \cdot 10^{-27}$ kg.
$m_u / m_{He} = 398{,}45 / 6{,}696 = 59{,}51$.

1.3. ----- a) $Q = n \cdot q_e \Rightarrow n = Q / q_e = -5 / (-1{,}6 \cdot 10^{-19}) = 3{,}125 \cdot 10^{19}$ elektrona.
b) $\sigma = Q / S = Q / r^2\pi = 5 / (5 \cdot 10^{-2})^2\pi = 636{,}94$ C/m^2.

1.4. ----- a) $q = Q / l = 2$ C/m; b) $V = S \cdot l = 0{,}75 \cdot 10^{-6}$ m^3, $\rho = Q / V = 1 / 0{,}75 \cdot 10^{-6} = 1{,}3333 \cdot 10^6$ C/m^3.

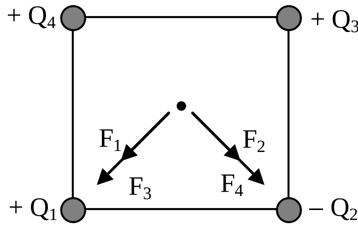
1.5. ----- $$m_e = \frac{m_{eo}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{9{,}81 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 10{,}529 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

1.6. ----- $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 \Rightarrow 1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$. Ukupan broj atoma u 1 cm^3 iznosi $N = 10^{29} \cdot 10^{-6} = 10^{23}$. Ukupan broj protona je $50 \cdot 10^{23}$, te je ukupna količina naelektrisanja svih protona jednaka $q_{p\Sigma} = 50 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 80 \cdot 10^4$ C. Ovo je ujedno i ukupna količina naelektrisanja svih elektrona ali sa suprotnim predznakom. Kako su protoni i elektroni u istom broju u svakom atomu, sledi da će čvrsto telo prema vani biti hemijski neutralno, tj. nenaelektrisano.

2.1. ----- 0,368 N; **2.2.** ----- $9\cdot10^{-4}$ N; **2.3.** ----- 10^3 m; $2,25\cdot10^{-7}$ N; **2.4.** ----- 0,178 m;

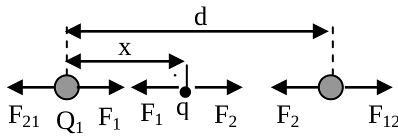
2.5. ----- a) $F = F_1 - F_2 = 0$; $F = F_1 + F_2 = 2\cdot F_1 = 2\cdot F_2 = 2\cdot Q\cdot q / 4\varepsilon\pi(a/2)^2 = 2\cdot Q\cdot q / \varepsilon\pi a^2$.

2.6. -----



$d = a\sqrt{2} = 6$ cm $\Rightarrow d/2 = 0,3$ cm;
$F_1 = Q_1\cdot q / 4\varepsilon\pi(d/2)^2 = 4\cdot10^{-5}$ N;
$F_2 = Q_2\cdot q / 4\varepsilon\pi(d/2)^2 = 6\cdot10^{-5}$ N;
$F_3 = Q_3\cdot q / 4\varepsilon\pi(d/2)^2 = 8\cdot10^{-5}$ N;
$F_4 = Q_4\cdot q / 4\varepsilon\pi(d/2)^2 = 10\cdot10^{-5}$ N.
$F_{13} = F_1 + F_3 = 12\cdot10^{-5}$ N; $F_{24} = F_2 + F_4 = 16\cdot10^{-5}$ N.
$F^2 = F_{13}^2 + F_{24}^2 = 400\cdot10^{-10} \Rightarrow F = 20\cdot10^{-5}$ N.

2.7. -----



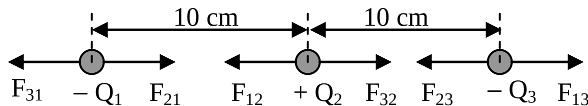
Sila između Q_1 i Q_2 iznosi $F_{12} = F_{21} = Q_1Q_2 / 4\varepsilon\pi d^2 \Rightarrow$
$F_{12} = F_{21} = 90\cdot Q_2$ [N].
Da bi naelektrisanje Q_1 ostalo u stanju mirovanja sili F_{21} se suprostavlja sila F_1 (sila između Q_1 i q), koja je istog inteziteta ali suprotnog smera. Dakle, $F_1 = F_{21} = 90\cdot Q_2$ N.

Isti je slučaj sa naelektrisanjem Q_2, na koje pored sile F_{12} deluje sila F_2, koja je jednaka $F_2 = 90\cdot Q_2$, ali suprotnog smera od F_{12}. Sila F_1 koja deluje između Q_1 i q je istog inteziteta ali suprotnog smera sa silom F_2 koja deluje između Q_2 i q. Ova sila je jednaka: $F_2 = Q_2\cdot q / 4\varepsilon\pi\cdot(d - x)^2 \Rightarrow 90\cdot Q_2 = Q_2\cdot q / 4\varepsilon\pi\cdot(d - x)^2 \Rightarrow$
$(d - x)^2 = q / 4\varepsilon\pi\cdot 90 = 16\cdot10^{-4} \Rightarrow d - x = 4\cdot10^{-2}$ m $\Rightarrow x = 10^{-2}$ m = 1 cm.
$F_1 = Q\cdot q / 4\varepsilon\pi x^2 = 36\cdot10^{-9}$ N $= F_2 = 90\cdot Q_2 \Rightarrow Q_2 = F_2 / 90 = 36\cdot10^{-9} / 90 = 0,4\cdot10^{-9}$ C $= 400\cdot10^{-12}$ C = 400pC.
Tražena rešenja su: x = 1 cm i Q_2 = 400 pC.

2.8. ----- $r^2 = b^2 - (a/2)^2 = 29,75$ cm, $F = Q_1Q_2 / 4\varepsilon\pi r^2 \Rightarrow Q_2 = F\cdot 4\varepsilon\pi r^2 / Q_1 = 5,95\cdot10^{-9}$ C = 5,95 nC.

2.9. ----- $F = Q_1Q_2 / 4\varepsilon_o\varepsilon_r\pi r^2 \Rightarrow \varepsilon_r = Q_1Q_2 / 4\varepsilon_o\pi r^2 = 1,67$; $\varepsilon_r = F_o / F \Rightarrow F_o = \varepsilon_r\cdot F = 0,36$ N.

2.10. -----



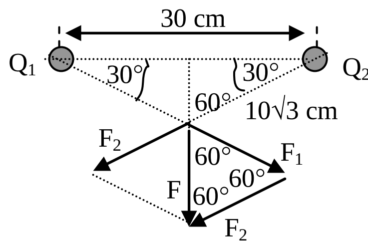
$F_{13} = F_{31} = Q_1Q_3 / 4\varepsilon\pi d^2 \cong 9\cdot10^9\cdot Q_1\cdot Q_3 / 0,2^2 = 225\cdot10^{-5}$ N.
$F_{12} = F_{21} = Q_1Q_2 / 4\varepsilon\pi\cdot 0,1^2 \cong 9\cdot10^9\cdot Q_1\cdot Q_2 / 0,1^2 = 450\cdot10^{-5}$ N.
$F_{23} = F_{32} = Q_2Q_3 / 4\varepsilon\pi\cdot 0,1^2 = 450\cdot10^{-5}$ N.
$F_1 = F_{21} - F_{31} = 225\cdot10^{-5}$ N; $F_2 = F_{12} - F_{32} = 0$ N; $F_3 = F_{23} - F_{13} = 225\cdot10^{-5}$ N.

2.11. ----- $Q_1 = - 10^9\cdot1,6\cdot10^{-19} = - 1,6\cdot10^{-10}$ C; $Q_2 = 2\cdot10^9\cdot1,6\cdot10^{-19} = 3,2\cdot10^{-10}$ C.
$F_o = Q_1Q_2 / 4\varepsilon\pi r^2 = 2,88\cdot10^{-11}$ N; $\varepsilon_r = F_o / F \Rightarrow F = F_o / \varepsilon_r = 2,88\cdot10^{-11} / 81 = 0,036\cdot10^{-11}$ N.
Dakle, sila se smanjila za 81 puta.

2.12. ----- $F = Q_1Q_2 / 4\varepsilon\pi r^2 = 5,4 / r^2$
za $r_1 = 1$ m $\Rightarrow F_1 = 5,4$ N; za $r_2 = 2$ m $\Rightarrow F_2 = 1,35$ N; za $r_3 = 3$ m $\Rightarrow F_3 = 0,6$ N; .
za $r_6 = 4$ m $\Rightarrow F_6 = 0,15$ N . Čitaocu nije problem da sam nacrta grafik F = f (r). Iz podataka (kao i sa grafika) može se konstatovati da sila F opada sa porastom rastojanja po paraboli (kvadratno).

2.13. ----- $F_2 / F_1 = r_1^2 / r_2^2 = 2 \Rightarrow r_1^2 = 2 r_2^2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{2}\, r_2$
$r_1 = 50 + r_2 \Rightarrow \sqrt{2}\, r_2 = 50 + r_2 \Rightarrow r_2 = 121,95$ cm $\Rightarrow r = r_1 = 50 + r_2 = 171,95$ cm.

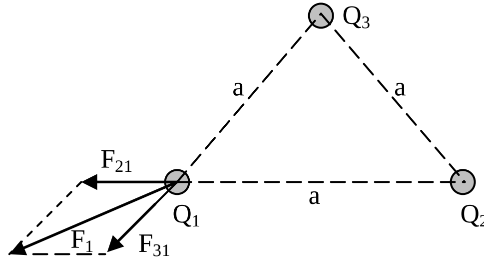
2.14. -----

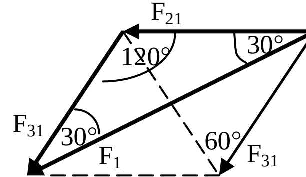


$\cos\alpha = 15 / 10\sqrt{3} = 15\sqrt{3} / 10\cdot 3 = \sqrt{3} / 2 \Rightarrow \alpha = 30°$

Sile F_1 koju stvara prvo naelektrisanje na naelektrisanje q, zatim sila F_2 koju stvara drugo naelektrisanje na q, kao i rezultantna sila F čine jedan jednakostranični trougao, te sledi: $F_1 = F_2 = F = Q_1\cdot q / 4\varepsilon\pi(10\sqrt{3})^2\cdot 10^{-4} = 0{,}6$ N.

2.15. -----





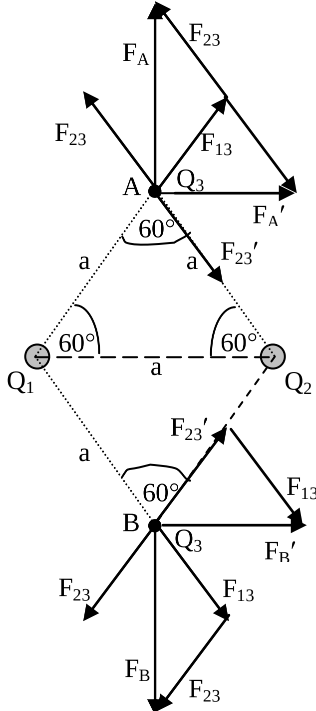
$(F_1/2)^2 = F_{21}^2 - (F_{21}/2)^2 \Rightarrow F_1 = \sqrt{3}\, F_{21}$.

Sila između dva naelektrisanja (Q_1 i Q_2, Q_2 i Q_3 odnosno Q_1 i Q_3)

iznosi $F_{12} = F_{23} = F_{31} = F_1 / \sqrt{3} = 1{,}156\cdot 10^{-2}$ N (jednakostranični trougao).

Kako je $F_{21} = Q_1Q_2 / 4\varepsilon_o\pi a^2 \Rightarrow a^2 = 12{,}4\cdot 10^{-6}\ m^2 \Rightarrow a = 3{,}52\cdot 10^{-3}$ m = 3,52 mm

2.16. -----



a) $F_{13} = F_{23} = Q_1Q_3 / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 36\cdot 10^{-7}$ N.

$F_3 = \sqrt{3}\cdot F_{13} = 62{,}28\cdot 10^{-7}$ N.

$F_A = F_B = 62{,}28\cdot 10^{-7}$ N.

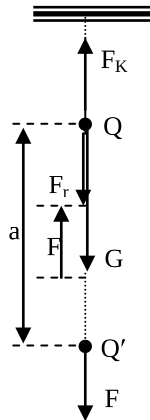
Ove dve sile su istog inteziteta i istog pravca, ali suprotnog smera (F_A ima smer ka gore, a F_B ka dole).

b) Kako je drugo naelektrisanje negativno (istog inteziteta kao i Q_1 i Q_3) sledi da će sila F_{23}' biti istog inteziteta kao i F_{23} (Q_2 pozitivno) ali suprotnog smera. Sila između prvog i trećeg naelektrisanja ostaje ista kao i u predhodnom slučaju. Sile F_{13}' i F_{23}' su pod uglom 120 °, odnosno ove dve sile sa rezultantnom silom F_A', odnosno F_B' zatvaraju jednakostranični trougao, pa sledi:

$F_A' = F_B' = F_{13} = F_{23}' = 36\cdot 10^{-7}$ N.

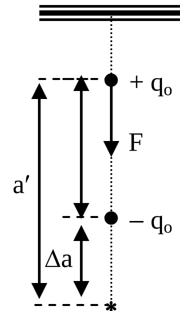
Ova dva vektora su istog inteziteta i smera a paralelnih pravaca (pravac im je normalan na duž AB).

2.17. .....



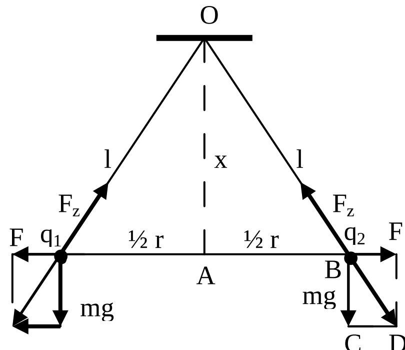
Odbojna (Kulonova) sila između naelektrisanja Q i Q′ iznosi
$F = Q \cdot Q' / 4\varepsilon_o \pi a^2 = 8{,}4375 \cdot 10^{-5}$ N.
Gravitaciona sila (sila zemljine teže) je $G = mg = 0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 \Rightarrow$
$G = 392{,}4 \cdot 10^{-5}$ N. Kulonova i gravitaciona sila su suprotnih smerova a istog pravca te one daju rezultantnu sulu koja iznosi
$F_r = G - F = 383{,}96 \cdot 10^{-5}$ N u smeru gravitacione (veće).
Ovoj rezultantnoj sili se suprostavlja sila konca, koji dato naelektrisanje drži u stabilnom položaju. To znači da ja sila zatezanja konca jednaka rezultantnoj sili ali suprotnog smera.
Dakle,
$F_K = - F_r \Rightarrow |F_K| = |F_r| = 383{,}96 \cdot 10^{-5}$ N.

2.18. -----



Kulonova sila između datih naelektrisanja iznosi
$F = q_o \cdot q_1 / 4\varepsilon_o \pi a^2 \cong 9 \cdot 10^9 \cdot q_o \cdot q_1 / a^2 = 9 \cdot 10^{-3}$ N = 9 mN.
Rezultantna sila je jednaka $F_r = F + G = F + mg = 9 \cdot 10^{-3} + 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 \Rightarrow$
$F = 13{,}905 \cdot 10^{-3}$ N 13,905 mN. Ovo je ujedno sila zatezanja konca.
Da bi se sila zatezanja smanjila na polovinu, tj na $F_r' = F_r / 2 = 6{,}9525$ mN treba smanjiti Kulonovu silu sa F na F′ tako što ćemo povećati rastojanje između naelektrisanja sa a na a′. Sada je $F_r' = F' + G \Rightarrow F' = F_r' - G \Rightarrow$
$F' = 6{,}9525 \cdot 10^{-3} - 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 = 2{,}0475 \cdot 10^{-3}$ N = 2,0475 mN.
Kako je $F' = q_o \cdot q_1 / 4\varepsilon_o \pi a'^2 \Rightarrow a'^2 = q_o \cdot q_1 / 4\varepsilon_o \pi \cdot F' = 4{,}396 \cdot 10^{-2}$ m^2 $\Rightarrow$
$a' = 0{,}2097$ m = 20,97 cm $\Rightarrow a' = a + \Delta a \Rightarrow \Delta a = a' - a = 10{,}97$ cm.
Donju kuglicu treba udaljiti od gornje još za 10,97 cm.

2.19. -----



Na jednu kuglicu deluju istovremeno tri sile:
sila zemljine teže (mg), Kulonova sila (F) i sila zatezanja konca (F_z). Konac o koji je kuglica obešena nalazi se u istom pravcu rezultantne sile koju čini Kulonova i sila teže. Vidimo sa slike (zbog sličnosti trouglova OAB o BCD) da je $mg / F = x / r/2 \Rightarrow F = mg \cdot r / 2x$, gde je $x^2 = l^2 - (r/2)^2 \Rightarrow$
$x = 24{,}92$ cm $\Rightarrow F = 0{,}394$ mN.
Iz Kulonove sile $F = q_1 \cdot q_2 / 4\varepsilon\pi r^2 \Rightarrow q_1 \cdot q_2 = F \cdot 4\varepsilon\pi r^2 = q^2 \Rightarrow$
$q_1 = q_2 = q = 8{,}37$ nC.

2.20. ----- Pre dodirivanja između kuglica vladala je odbojna sila $F_1 = Q_1 Q_2 / 4\varepsilon\pi a^2 = 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$
$Q_1 Q_2 = F_1 \cdot 4\varepsilon\pi a^2 = 0{,}889 \cdot 10^{-16}$ C^2.
Kada se kuglice dodirnu, zbog istih zapremina (površina), naelektrisanja će se ravnomerno rasporediti po njihovim površinama, pa sledi da su im iste novonastale količine naelektrisanja: $Q_1' = Q_2' = Q' \Rightarrow$
$Q'^2 = F' \cdot 4\varepsilon\pi a^2 = 2{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 12{,}56 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 10^{-16}$ C^2 $\Rightarrow Q' = 10^{-8}$ C.
Ukupna količina naelektrisanja je: $Q = Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' = 2 \cdot 10^{-8}$ C.
Slede jednačine: $Q_1 + Q_2 = 2 \cdot 10^{-8}$, odnosno $Q_1 \cdot Q_2 = 0{,}889 \cdot 10^{-16} \Rightarrow Q_1 = 0{,}889 \cdot 10^{-16} / Q_2 \Rightarrow$
$0{,}889 \cdot 10^{-16} / Q_2 + Q_2 = 2 \cdot 10^{-8} \;/ \cdot Q_2 \Rightarrow Q_2^2 - 2 \cdot 10^{-8} Q_2 + 0{,}889 \cdot 10^{-16} = 0. \Rightarrow$

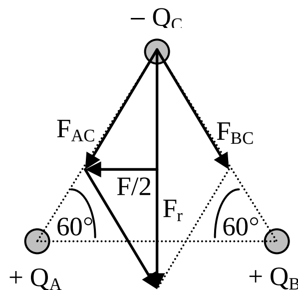
$$Q_{2(1/2)} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \pm \sqrt{\left(2 \cdot 10^{-8}\right)^2 - 4 \cdot 0{,}889 \cdot 10^{-16}}}{2} = (2 \cdot 10^{-8} \pm 0{,}666 \cdot 10^{-8}) / 2 \quad \Rightarrow$$

$Q_{2\,(1)} = 1{,}333 \cdot 10^{-8}$ C; $Q_{2\,(2)} = 0{,}667 \cdot 10^{-8}$ C.
$Q_{1\,(1)} = 2 \cdot 10^{-8} - Q_{2\,(1)} = 0{,}667 \cdot 10^{-8}$ C; $Q_{1\,(2)} = 2 \cdot 10^{-8} - Q_{2\,(2)} = 1{,}333 \cdot 10^{-8}$ C.
Kuglice su predhodno bile naelektrisane sa količinama naelektrisanja : $Q_1 = 0{,}667 \cdot 10^{-8}$ C i $Q_2 = 1{,}333 \cdot 10^{-8}$ C i obrnuto. Naelektrisanja su istoimena (kuglice su se odbijale), što znači da su kuglice mogle biti naelektrisane i sa $-0{,}667 \cdot 10^{-8}$ C, odnosno $-1{,}333 \cdot 10^{-8}$ C.

2.21. ----- $F_3 = 20{,}88 \cdot 10^{-7}$ N; **2.22.** ----- $F = 51 \cdot 10^{-5}$ N.

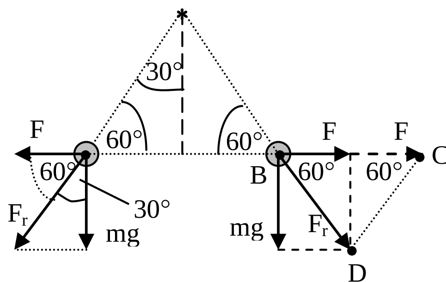
2.23. ----- Kada se kuglice dodirnu podjednako i istoimeno se naelektrišu, pa je nakon toga njihovo naelektrisanje jednako $Q_1' = Q_2' = Q' = (Q_1 + Q_2) / 2 = -10^{-9}$ C $= -1$ nC.
Pre dodira sila privlačenja je iznosila $F = Q_1Q_2 / 4\varepsilon\pi d^2$, a posle dodira $F' = Q'^2 / 4\varepsilon\pi d^2 \Rightarrow$
$F / F' = Q_1Q_2 / Q'^2 = 15 \cdot 10^{-18} / 1 \cdot 10^{-18} = 15$.
Dakla, $F / F' = 15 / 1$.

2.24. -----



$|F_{AC}| = |F_{BC}| = |F|$.
Kako sila F_{AC}, F_{BC} i rezultantna sila F_r čine jednakokraki trougao, sledi: $(F_r/2)^2 = F^2 - (F/2)^2 = (4 \cdot F^2 - F^2) / 4 \Rightarrow$
$F_r^2 = 3\,F^2 \Rightarrow F_r = \sqrt{3} \cdot F$

2.25. -----

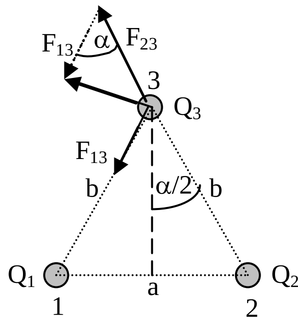


$F_r^2 = F^2 + (mg)^2$;
$F = (10^{-7})^2 / 4\varepsilon\pi \cdot 0{,}1^2 = 9 \cdot 10^{-3}$ N = 9 mN.
Ako Kulonovu silu F produžima do tačke C (još jednu dužinu) dobijamo jednakostranični trougao BCD. Iz datog trougla sledi: $F_r = 2F$
$\Rightarrow$ $F_r = 18 \cdot 10^{-3}$ N = 18 mN.
Iz Pitagorine teoreme sledi $(mg)^2 = F_r^2 - F^2$
$\Rightarrow$ $m = 1{,}589 \cdot 10^{-3}$ kg (g = 9,81).
Težina kuglice iznosi $G = mg = 15{,}588 \cdot 10^{-3}$ N.

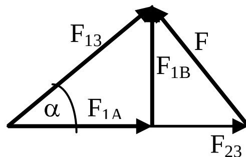
2.26. ----- $Q = E \cdot 4\varepsilon\pi r^2 = 50 \cdot 10^{-9}$ C = 50 nC.
Navedena jačina električnog polja je najjača na površini naelektrisane kugle. Ova jačina električnog polja bi u praksi dovela do proboja vazduha (kroz vazduh bi proticala struja– usmerena naelektrisanja), jer se u vazduhu može ostvariti maksimalna jačina polja od $3 \cdot 10^6$ V/m.Dakle, sa stanovišta prakse ovakav režim je neostvarljiv.

2.27. ----- Intezitet sile pre dodira je iznosio $F = Q_1Q_2 / 4\varepsilon_o\pi d^2$. Ova sila je odbojna ako ako su naelektrisanja istoimena (pod a), odnosno, ona je privlačna ako su naelektrisanja raznoimena (pod b).
Kada se kuglice dodirnu njihova novonastala naelektrisanja postaju istoimena i jednaka (iste geometrijske dimenzije), pa je $Q_1' = Q_2' = Q' = (Q_1 + Q_2) / 2$. Sada će sila između novih naelektrisanja biti odbojna (i pod a i pod b) i ona iznosi $F' = Q_1'Q_2' / 4\varepsilon_o\pi d^2 = Q'^2 / 4\varepsilon_o\pi d^2 = [(Q_1 + Q_2) / 2]^2 / 4\varepsilon_o\pi d^2 = (Q_1 + Q_2)^2 / 16\varepsilon_o\pi d^2$.

2.28. -----

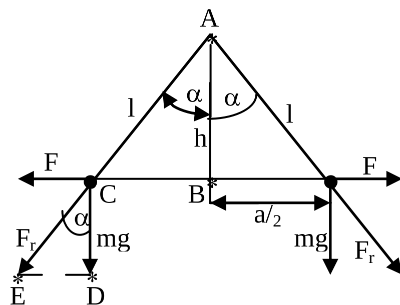


$F_{13} = Q_1Q_3 / 4\varepsilon_o\pi b^2 = 360 \cdot 10^{-9}$ N = 360 nN.
$F_{23} = Q_2Q_3 / 4\varepsilon_o\pi b^2 = 540 \cdot 10^{-9}$ N = 540 nN.
$\sin(\alpha/2) = (a/2) / b = 0{,}6 \Rightarrow \alpha/2 = 36{,}87° \Rightarrow$
$\alpha = 73{,}74°$.
Primenom kosinusne teoreme:
$F^2 = F_{23}^2 + F_{13}^2 - 2F_{13}F_{23} \cos\alpha \Rightarrow F = 558 \cdot 10^{-9}$ N.



Rezultantnu silu F možemo dobiti i na drugi način (druga slika. Silu (vektor) F_{13} razložiti na njegove komponente F_{1A} i F_{1B} (F_{1A}, F_{1B} i F_{13} čine pravougli trougao).
Kako je $\sin\alpha = F_{1B} / F_{13} \Rightarrow F_{1B} = F_{13} \cdot \sin\alpha = 345{,}6 \cdot 10^{-9}$ N,
Odnosno $\cos\alpha = F_{1A} / F_{13} \Rightarrow F_{1A} = F_{13} \cdot \cos\alpha = 100{,}8 \cdot 10^{-9}$ N.
Konačno, $F^2 = (F_{23} - F_{1A})^2 + F_{1B}^2 \Rightarrow F = 558 \cdot 10^{-9}$ N.

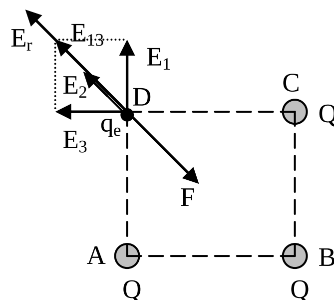
2.29. -----



Trouglovi ABC i CDE su slični, tj. trouglovi istih uglova a proporcionalnih stranica, pa sledi: $F / mg = (a/2) / h = \mathrm{tg}\,\alpha$
$\Rightarrow F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow m = F / g \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = (Q^2 / 4\varepsilon_o\pi a^2) / g \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$;
Kako je $\mathrm{tg}\,\alpha = 1 / \mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sin\alpha = (a/2) / l \Rightarrow a/2 = l \sin\alpha$
$\Rightarrow a = 2l \cdot \sin\alpha$.
Masa kuglica je $m = Q^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha / 4\varepsilon_o\pi a^2 \cdot g \Rightarrow$
$m = Q^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha / 4\varepsilon_o \cdot g \cdot 4l^2 \cdot \sin^2\alpha = Q^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha / 16\varepsilon_o\pi g l^2 \sin\alpha$

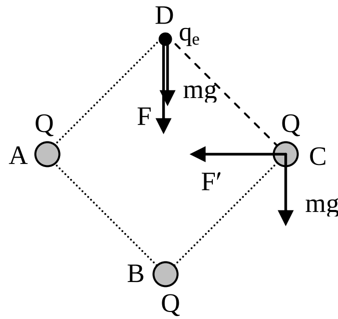
2.30. ----- $Q_1 / Q_2 = 9/1$; **2.31.** ----- $E = Q / 2\varepsilon_o\pi a^2$.

2.32. ----- a)



$E_1 = E_3 = Q / 4\varepsilon\pi a^2$, $E_{13}^2 = E_1^2 + E_3^2 \Rightarrow E_{13} = \sqrt{2}\ E_1 \Rightarrow$
$E_{13} = Q \cdot \sqrt{2}\ / 4\varepsilon\pi a^2$; $E_2 = Q / 4\varepsilon\pi \cdot (a\sqrt{2})^2 = Q / 8\varepsilon\pi a^2$.
Kako je vektor E_{13} i E_2 istog pravca i smera rezultantno polje je jednako njihovom algebarskom zbiru.
Dakle, $E_r = E_{13} + E_2 = Q \cdot \sqrt{2}\ / 4\varepsilon\pi a^2 + Q / 8\varepsilon\pi a^2 \Rightarrow$
$E_r = 3{,}82 \cdot Q / 2 \cdot 4 \cdot \varepsilon\pi a^2 = 1{,}92 \cdot Q / 4\varepsilon\pi a^2 = 1{,}92 \cdot E_1$.
Pravac i smer se poklapa sa dijagonalom BD.
Elektron se u električnom polju kreće u suprotnom smeru u odnosu na smer polja, što znači da će na elektron delovari Kulonova sila koja će elektron pomerati od tačke D ka tački B. Intezitet te sile je jednak:
$F = E_r \cdot q_e = 1{,}92 \cdot E_1 \cdot q_e = 1{,}92 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot E_1 = 3{,}072 \cdot 10^{-19} \cdot E_1$.

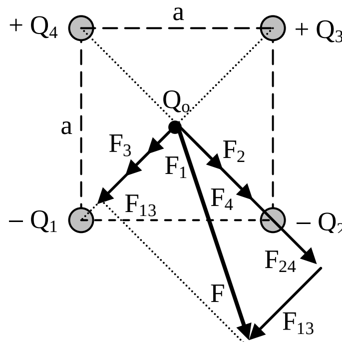
b)



Ako je dijagonala BD normalna na zemlju sila zemljine teže i Kulonova sila F su istog pravca i smera, pa je rezultantna sila jednaka $F_r = F + mg = 3{,}072 \cdot 10^{-19} \cdot E_1 + 9{,}108 \cdot 10^{-31} \cdot 9{,}81$.
Intezitet sile F je već određen pod tačkom a), dok je sila zemljine teže jednaka $G = mg$
Smer rezultantne sile F_r je od temena D ka temenu B (poklapa se sa smerom zemljine teže).

Ako je druga dijagonala AC normalna na zemlju (ceo sistem zaokrenemo za 90°), tada će ugao između Kulonove sile F i sile teže biti od 90° . U tom slučaju rezultantna sila bi bila jednaka $F_r^2 = F^2 + (mg)^2$

2.33. -----

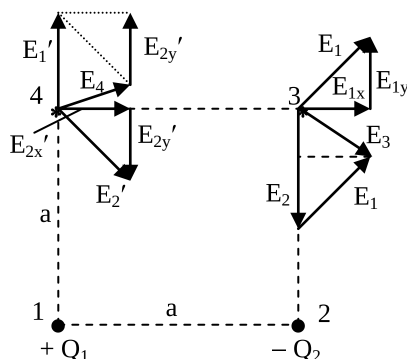


$r = a / \sqrt{2} = 3$ cm,
$F_1 = Q_1Q_o / 4\varepsilon\pi r^2 = 5 \cdot 10^{-5}$ N; $F_2 = Q_2Q_o / 4\varepsilon\pi r^2 = 6 \cdot 10^{-5}$ N;
$F_3 = Q_3Q_o / 4\varepsilon\pi r^2 = 8 \cdot 10^{-5}$ N; $F_4 = Q_4Q_o / 4\varepsilon\pi r^2 = 10 \cdot 10^{-5}$ N.
$F_{13} = F_1 + F_3 = 13 \cdot 10^{-5}$ N; $F_{24} = F_2 + F_4 = 16 \cdot 10^{-5}$ N.
Prema Pitagorinoj teoremi $F^2 = F_{13}^2 + F_{24}^2$ rezultantna sila F iznosi $F = 20{,}62 \cdot 10^{-5}$ N.
Pravac i smer sile dat je na slici.

2.34. ----- Električno polje treba da stvara Kulonovu (elektrostatičku) silu na naelektrisanje koja je jednaka $F = EQ = 10^{-8} \cdot E$. Ova sila treba da se izjednači sa gravitacionom silom, ali suprotnog smera (istog pravca).
Dakle, $F = mg = 1 \cdot 9{,}81 = 9{,}81$ N $\Rightarrow$ $9{,}81 = 10^{-8} \cdot E$ $\Rightarrow$ $E = 9{,}81 \cdot 10^8$ V/m.
Ako je naelektrisanje pozitivno električno polje na njega deluje silom čiiji je smer isti kao i smer električnog polja. To znači da smer električnog polja treba da je suprotan u odnosu na smer gravitacione sile, kako bi naelektrisanje lebdila (kada su te dve sile jednake). U protivnom, ako je naelektrisanje negativno, ono će se u električnom polju kretati suprotno od smera električnih linija, a to znači da bi negativno naelektrisanje lebdilo u električnom polju smer linija polja mora biti isti kao i smer gravitacione sile.

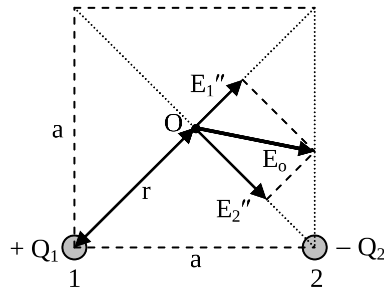
Rešenje je teorijske prirode, jer u praksi jačina električnog polja u vazduhu može maksimalno dostići vrednost do $3 \cdot 10^6$ V/m. Iznad ove vrednosti dolazi do proboja vazduha (varničenje).

2.35. ----- a)



$E_1 = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi (a\sqrt{2})^2 = 2{,}7 \cdot 10^6$ V/m = 2,7 KV/mm;
$E_2 = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 15{,}12 \cdot 10^6$ V/m = 15,12 KV/mm;
Pravac jačine polja E_1 se poklapa sa pravcom dijagonale 13, te se vektor E_1 može razložiti na komponente E_{1x} i E_{1y}.
Vektori E_{1x}, E_{1y} i E_1 čine jednakokraki trougao u kojem je $E_{1x} = E_{1y} = E_1 / \sqrt{2} = 1{,}915$ KV/mm.
Iz Pitagorine teoreme $E_3^2 = E_{1x}^2 + (E_2 - E_{1y})^2 \Rightarrow$
$E_3 = 13{,}34$ KV/mm.
$E_2' = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi (a\sqrt{2})^2 = 7{,}55$ KV/mm;
$E_1' = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 5{,}4$ KV/mm. Razlaganjem E_2' na E_{2x}' i E_{2y}' $\Rightarrow$ $E_{2x}' = E_{2y}' = E_2' / \sqrt{2} = 5{,}36$ KV/mm.
$\mathbf{E_4^2 = E_{2x}'^2 + (E_1' - E_{2y}')^2 \Rightarrow E_4 = 5{,}79}$ **KV/mm.**

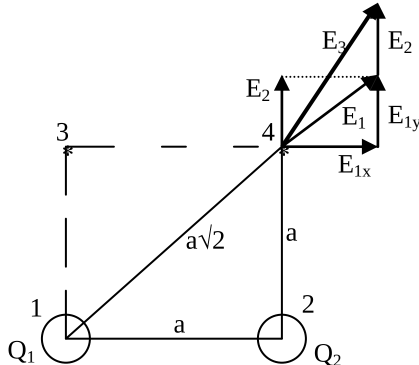
b)



$r = d / 2 = a\sqrt{2} / 2 = 3{,}536$ cm;
$E_1'' = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi r^2 = 10{,}8\cdot10^6$ V/m = 10,8 KV/mm;
$E_2'' = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi r^2 = 30{,}21\cdot10^6$ V/m = 30,21 KV/mm;
Iz Pitagorine teoreme $E_o^2 = E_1''^2 + E_2''^2 \Rightarrow$
$E_o = 32{,}08$ KV/mm.
Napomena! Sva ostvarena polja (E_3, E_4 i E_o) su praktično neostvarljiva, jer je maksimalna jačina magnetnog polja za vazduh 3 KV/mm (za E > 3 KV/mm nastaje proboj).
Zadatak se mogao rešiti i kosinusnom teoremom.

2.36. ----- 89,92 V/m; **2.37.** ----- $\varepsilon_r = 2{,}5$; **2.38.** ----- $1{,}28\cdot10^{-16}$ N;

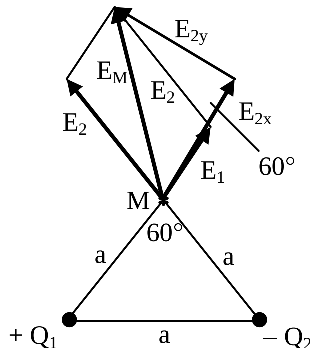
2.39. -----



$E_1 = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi (a\sqrt{2})^2 = 999{,}15$ V/m;
$E_2 = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 1998{,}3$ V/m;
Razlaganjem vektora E_1 na komponente E_{1x} i E_{1y} nastaje jednakokraki trougao u kojem su kraci E_{1x} i E_{1y} jednakih dužina (inteziteta). Sledi, $E_{1x} = E_{1y} = E_1 / \sqrt{2} \Rightarrow$
$E_{1x} = E_{1y} = 708{,}62$ V/m;
Iz Pitagorine teoreme: $E_3^2 = (E_2 + E_{1y})^2 + E_{1x}^2 \Rightarrow$
$E_3 = 2798{,}13$ V/m.

Učenicima se preporučuje da zadatak reše primenom kosinusne teoreme ($E_3^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(90 + 45)$.

2.40. -----



$E_1 = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 1\,124$ V/m; $E_2 = Q_2 / 4\varepsilon_0\pi a^2 = 3\,372$ V/m;
Razlaganjem vektora E_2 u njegove komponente E_{2x} i $E_{2y} \Rightarrow$
$E_{2x} = E_2 \cos 60° = 1\,686$ V/m; $E_{2y} = E_2 \sin 60° = 2\,916{,}78$ V/m;
Iz Pitagorine teoreme $E_M^2 = (E_1 + E_{2x})^2 + E_{2y}^2 \Rightarrow$
$E_M = 4\,050{,}15$ V/m.

Ili,pomoću kosinusne teoreme:
$E_M^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos120°$

2.41. ----- a) $E_1 = E_2 = Q / 4\varepsilon_o\pi a^2$. Pravac i smer je isti kao u predhodnom zadatku (dakle, poklapa se sa stranicama).

c) Vektor E_1, E_2 i E_M čine jednakokraki trougao, iz kojeg sledi $E_M = \sqrt{3}\cdot E_1 = 8{,}66\cdot10^6$ V/m.
Pravac polja E_M se poklapa sa visinom koja spaja teme M sa osnovom na kojoj se nalaze naelektrisanja Q_1 i Q_2, a smer je od tačke M ka gore .

c) Iz $E_1 = Q / 4\varepsilon_o\pi a^2 \Rightarrow a^2 = Q / 4\varepsilon_o\pi E_1 = 0{,}003597 \Rightarrow a = 0{,}06$ m = 6 cm.

2.42. ----- $Q_1 > Q_2$, oba negativna; **2.43**. ----- $Q_2 > Q_1$, Q_1 pozitivno a Q_2 negativno naelektrisano

2.44. ----- $Q_1 = Q_2$, oba negativna; **2.45**. ----- $Q_1 > Q_2$, Q_1 pozitivno a Q_2 negativno;

2.46. ----- $Q_1 = Q_2$, Q_2 pozitivno a Q_1 negativno; **2.47.** ----- Sila F_6;

2.48. -----

a) $E_1 = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi r^2$; $r = \overline{CD}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ cm;
$E_1 = 71{,}94$ V/m; $E_2 = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi r^2 = 107{,}91$ V/m;
Iz $E^2 = E_1^2 + E_2^2 \Rightarrow E = 129{,}69$ V/m.
b) $E_1' = E_2' \Rightarrow Q_1 / 4\varepsilon_o\pi x^2 = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi (10 - x)^2 \Rightarrow$
$Q_2 / Q_1 = (10 - x)^2 / x^2 = 1{,}5 \Rightarrow (10 - x) / x = 1{,}225 \Rightarrow$
$x = 4{,}49$ cm, $y = 10 - x = 5{,}51$ cm.
Tačka E, koja je udaljena od prvog naelektrisanja za 4,49 cm a od drugog za 5,51 cm jačina električnog polja jednaka je nuli.
Kolike su pojedinačne jačine električnog polja za tačku E ?

2.49. ----- a) $E_1 = Q / 4\varepsilon_o\pi b^2 = 119\,897{,}3$ V/m; $E_2 = Q / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 67\,442{,}26$ V/m;
Iz Pitagorine teoreme $E_C^2 = E_1^2 + E_2^2 \Rightarrow E_C = 137\,563{,}88 \text{ V/m} \cong 13{,}76\cdot10^4$ V/m.
$E_1' = Q / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 67\,442{,}26$ V/m; $E_2' = Q / 4\varepsilon_o\pi b^2 = 119\,897{,}3$ V/m;
$E_A^2 = E_1'^2 + E_2'^2 \Rightarrow E_A = 137\,563{,}88 \text{ V/m} \cong 13{,}76\cdot10^4$ V/m.
Tačke A i C imaju istu jačinu električnog polja ($E_A = E_C = 13{,}76\cdot10^4$ V/m).
Ako u tačku A postavimo elektron na njega će delovati elektrostatička sila (sila električnog polja) koja iznosi $F = E\cdot q_e = 13{,}76\cdot10^4\cdot1{,}6\cdot10^{-19} = 22{,}016\cdot10^{-15}$ N.
Kako se tačka E nalazi podjednako udaljena od naelektrisanja Q_B i Q_D, koja su jednaka i istog predznaka, sledi da će ova dva naelektrisanja stvarati istu jačinu električnog polja, ali suprotnog smera. Rezultantno polje za tu tačku će biti jednako nuli. Dakle, $E_E = 0$ V/m. Kako u tački E nema jačine električnog polja, sledi da u toj tački neće biti nikakve sile na bilo koje naelektrisanje, a samim tim ni na elektron. Elektron će u tački E ostati u stanju mirovanja (uz pretpostavku da nema gravitacione sile).

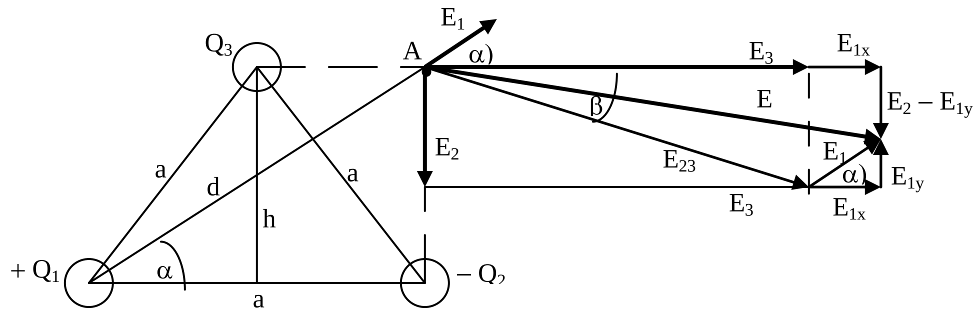
2.50. -----

$b = a\cdot\sqrt{2} = 4\cdot10^{-2}$ m;
$E_1 = Q / 4\varepsilon_o\pi b^2 \Rightarrow$
$E_1 = 112{,}5$ V/m;
$E_{13} = \sqrt{3}\, E_1$

Svako od naelektrisanja stvara istu jačinu polja $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 112{,}5$ V/m, čiji pravac odgovara pravcu bočne ivice, a smer je ka odgovarajućem naelektrisanju. Kako je prvo i treće naelektrisanje pod uglom od 60° (tačke A, M i C su temena jednakostraničnog trougla), sledi da će ova dva naelektrisanja stvarati rezultantno polje koje će imati pravac visine H, sa smerom ka preseku dijagonala. Rezultantno polje E_{13} i polja E_1 i E_3 čine jednakokraki trougao iz kojeg sledi da je $E_{13} = \sqrt{3}\, E_1 = \sqrt{3}\cdot112{,}5$ V/m.
Isti je slučaj sa drugim i četvrtim naelektrisanjem, pa je $E_{24} = \sqrt{3}\, E_2 = \sqrt{3}\cdot112{,}5$ V/m.
Kako je i polje E_{24} u pravcu visine H i istog smera kao i E_{13}, sledi da je ukupno rezultantno polje jednako $E = E_{13} + E_{24} = 2\sqrt{3}\cdot112{,}5 = 389{,}7$ V/m.

2.51. ----- $8{,}63\cdot10^4$ V/m.

2.52. -----



$h^2 = a^2 - (a/2)^2 = 300\ cm^2 \Rightarrow h = 10\sqrt{3}$ cm.; $d^2 = a^2 + h^2 = 700\ cm^2 \Rightarrow d = 10\sqrt{7}$ cm;
$E_1 = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi d^2 = 12{,}85\cdot 10^5$ V/m = 1,285 KV/mm;
$E_2 = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi h^2 = 59{,}95\cdot 10^5$ V/m = 5,995 KV/mm;
$E_3 = Q_3 / 4\varepsilon_o\pi\ (a/2)^2 = 449{,}62\cdot 10^5$ V/m = 44,962 KV/mm.
Ukupnu jačinu polja dobijemo vektorskim zbirom pojedinačnih. Da bi se to analitički rešilo vektor E_1 razložiti na komponente E_{1x} i E_{1y} (pravougli trougao).Kako je $tg\ \alpha = h / d = 0{,}655 \Rightarrow \alpha = 33{,}2°$.
$E_{1x} = E_1 \cos\alpha = 1{,}285\cdot 10^6\cdot 0{,}655 = 1{,}075\cdot 10^6$ V/m = 1,075 KV/mm, odnosno
$E_{1y} = E_1 \sin\alpha = 1{,}285\cdot 10^6\cdot \sin 33{,}2° = 0{,}704\cdot 10^6$ V/m = 0,704 KV/mm.
Konačno, koristeći Pitagorinu teoremu $E^2 = (E_3 + E_{1x})^2 + (E_2 - E_{1y})^2$, rezultantno polje je jednako
$E = 44{,}205\cdot 10^6$ V/m = 44,205 KV/mm.

(NAPOMENA! Maksimalna jačina električnog polja koju vazduh može da podnese a da ne dođe do njegovog proboja iznosi 3 KV/mm. To znači da bi E_2, E_3 i E dovelo do probijanja vazduha, što će reći da su predhodna rešenja samo teoretskog karaktera.)

2.53. ----- $F = G = mg = 1{,}02\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}81 = 10\cdot 10^{-5}$ N. Kako je elektrostatička sile jednaka $F = E\cdot Q \Rightarrow$ $E = F / Q = 10\cdot 10^{-15} / 5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19} = 1{,}25\cdot 10^4$ V/m = 12,5 KV/m. Smer električnog polja je od zemlje ka naelektrisanju, dok je pravac normalan na zemlju.

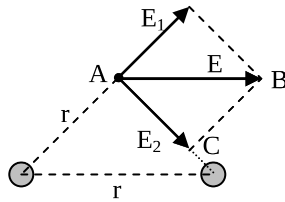
2.54. ----- $F = G = mg = 9{,}108\cdot 10^{-31}\cdot 9{,}81 = 89{,}35\cdot 10^{-31}$ N.
$E = F / q_e = 89{,}35\cdot 10^{-31} / 1{,}6\cdot 10^{-19} = 55{,}84\cdot 10^{-12}$ V/m. Da bi elektron lebdio na njega treba da deluje električno polje elektrostatičkom silom čiji je intezitet jednak gravitacionoj sili, ali suprotnog smera. Kako se elektron kreće suprotno od smera električnog polja, sledi da smer električnog pola treba da bude u smeru gravitacione sile (električne linije su ka zemlji).

2.55. ----- $E = E_1 + E_2 = Q_1 / 4\varepsilon_0\pi\ (a/2)^2 + Q_2 / 4\varepsilon_o\pi\ (a/2)^2 = 342\cdot 10^5$ V/m. Smer ka negativnom naelektrisanju.

2.56. ----- $E_A = E_{A1} + E_{A2} = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi r_A^2 + Q_2 / 4\varepsilon_o\pi\ (a - r_A)^2 = 14{,}5\cdot 10^3$ V/m, odnosno
$E_B = E_{B1} + E_{B2} = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi r_B^2 + Q_2 / 4\varepsilon_o\pi\ (a - r_B)^2 = 69{,}75\cdot 10^3$ V/m.
Smer E_A i E_B je ka negativnom naelektrisanju. Čitaocu nije problem da to grafički predstavi, koristeći odgovarajuću razmeru (npr. 1 cm = 10^4 V/m).

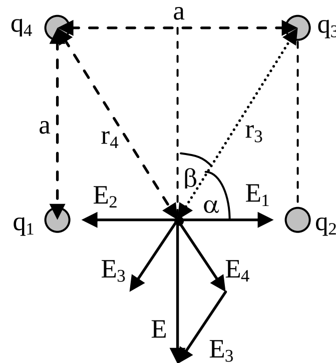
2.57. ----- $E_A = 15{,}75\cdot 10^3$ V/m; $E_B = 34{,}88\cdot 10^3$ V/m.

2.58. -----



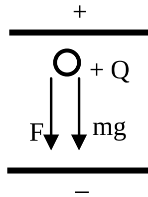
Tačka A je treće teme jednakostraničnog trougla, a samim tim vektori E_1 i E_2 zatvaraju ugao od 120°. Rezultantno električno polje E je jednako vektorskom zbiru E_1 i E_2. Ova tri vektora čine jednakostranični trougao sa temenima A, B i C, pa je njihov intezitet električnog polja međusobno jednak.
Dakle, $E_1 = E_2 = E = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi r^2 = 10{,}8\cdot 10^3$ V/m.
Smer i pravac je naznačen na slici.

2.59. -----



$\mathrm{tg}\,\alpha = a / (a/2) = 2 \Rightarrow \alpha = \mathrm{arc\,tg}\,2 = 63{,}43°$;
$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow 90° - \alpha = 26{,}57°$.
$r_3^2 = r_4^2 = r = a^2 + (a/2)^2 = 125\ \mathrm{cm}^2 \Rightarrow r_3 = r_4 = r = \sqrt{5}\ 5$ cm.
$E_1 = E_2 = q / 4\varepsilon_o\pi a^2$. Kako su ova dva vektora na istom pravcu a suprotnih smerova njihova rezultanta je $E_{12} = 0$.
$E_3 = E_4 = q / 4\varepsilon_o\pi r^2 = 7\ 193{,}84$ V/m.
Povlačenjem visine sa kraja vektora E_4 na vektor E nastaje pravougli trougao u kojem se vektor E deli na dve jednake polovine. Ako povučenu visinu obeležimo sa E′, sledi:
$\sin\beta = E' / E_4 \Rightarrow E' = E_4\cdot\sin\beta = 3\ 217{,}74$ V/m.
Iz Pitagorine teoreme $(E/2)^2 = E_4^2 - E'^2 \Rightarrow$
E = 12 868,18 V/m.

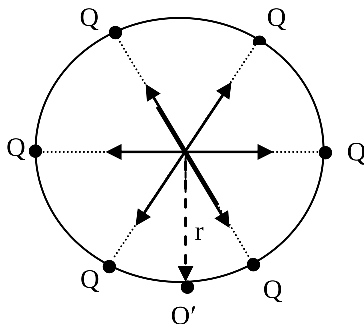
2.60. -----



Na kuglicu deluje elektrostatička sila koja iznosi $F = E\cdot Q = 3\cdot 10^3\cdot 10^{-6} \Rightarrow$ $F = 3\cdot 10^{-3}$ N. Istovremeno na kuglicu deluje sila zemljine teže koja je jednaka $G = mg = 0{,}2\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}81 = 1{,}962\cdot 10^{-3}$ N.
Kako su ove dve sile istog pravca i istog smera rezultantna sila je jednaka njihovom zbiru, pa je $F_r = F + G = 4{,}962\cdot 10^{-3}$ N.

Iz zakona dinamike $F = m\cdot a \Rightarrow a = F / m = 24{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.
Kuglica se kreće ravnomerno ubrzano prema donjoj ploči (negativnoj) ubrzanjem od $a = 24{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

2.61. -----

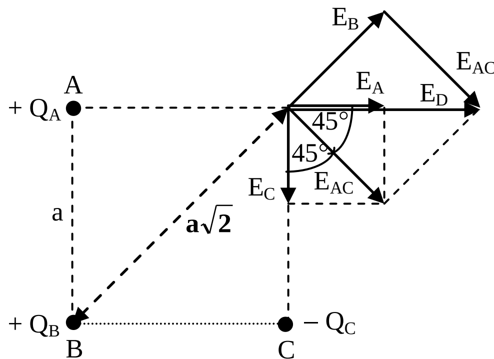


Svako od naelektrisanja stvara svoju jačinu električnog polja koja je jednaka $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = Q / 4\varepsilon_o\pi r^2 \Rightarrow$
$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = 3\cdot 10^{-6} / 4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}2^2$.
Kako je rezultantno polje u centru kruga jednako vektorskom zbir pojedinačnih polja, sledi da je u centru kruga jačina polja jednaka nuli (vektori istog inteziteta i pod istim uglom od 60°)

Ako se na površinu kruga dovede neko drugo naelektrisanje (Q′), tada će ono u centru kruga stvarati jačinu polja koja je jednaka $E' = Q' / 4\varepsilon_o\pi r^2 = 4{,}5\cdot 10^5$ V/m, jer su polja svih predhodnih naelektrisanja međusobno poništena.

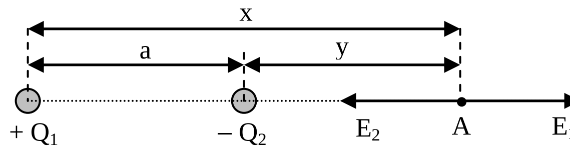
2.62. ----- $E_A = Q / 4\varepsilon_o\pi r_A^2$; $E_B = Q / 4\varepsilon_o\pi r_B^2$; $E_A / E_B = (r_B / r_A)^2 = 4 \Rightarrow r_B / r_A = 2 \Rightarrow r_B = 2\cdot r_A$; $r_A = r_B /2$.
$E_C / E_B = (r_B / r_C)^2 \Rightarrow [r_B / (r_B + r_A) / 2]^2 = [r_B / (r_B + r_B / 2) / 2]^2 = [1 / (1 + 1/2) / 2]^2 = (2 / (3/2)^2 \Rightarrow$
$E_C / E_B = 16/9 \Rightarrow E_C = E_B\cdot 16/9 = 16$ V/m.

2.63. -----



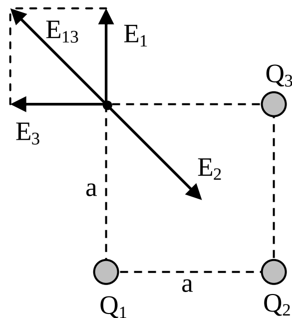
$E_A = Q_A / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 22{,}5$ V/m;
$E_B = Q_B / 4\varepsilon_o\pi\, (a\sqrt{2}\ )^2 = 22{,}5\cdot\sqrt{2}$ V/m,
$E_C = Q_C / 4\varepsilon_o\pi a^2 = 22{,}5$ V/m;
Kako E_A, E_B čine jedan kvadrat u kojem je dijagonala E_{AC}, sledi:
$E_{AC} = E_A\sqrt{2} = 22{,}5\sqrt{2}$ V/m.
Vektori E_{AC} i E_B su stranice novog kvadrata u kojem ja dijagonala jednaka E_D, tj. rezultantnoj jačini polja za tačku D. Dakle,
$E_D = E_{AC}\sqrt{2} = 45$ V/m.
Pravac i smer rezultantnog polja se poklapa sa pravcom i smerom E_A.

2.64. -----



$E_1 = E_2 \;\Rightarrow\; Q_1 / 4\varepsilon\pi x^2 = Q_2 / 4\varepsilon\pi y^2 \;\Rightarrow\; (x / y)^2 = Q_1 / Q_2 = 2 \;\Rightarrow\; x / y = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2}\, y.$
$x - y = a \;\Rightarrow\; \sqrt{2}\, y - y = a \;\Rightarrow\; y = 2{,}42\cdot a$, odnosno $x = 3{,}42\cdot a$
Jačina električnog polja jednaka je nuli u tački (A) koja se nalazi na istom pravcu na kojem se nalaze i naelektrisanja Q_1 i Q_2 i koja je udaljena od prvog naelektrisanja (većeg) za 3,42·a, a od drugog za 2,42·a.

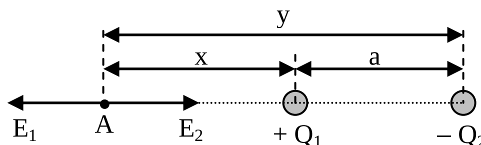
2.65. -----



Za $Q_1 = Q_3 \;\Rightarrow\; E_1 = E_3 \;\Rightarrow\; E_{13} = \sqrt{2}\, E_1$.
Da bi rezultantno polje bilo jednako nuli drugo naelektrisanje treba da stvara istu jačinu električnog polja kao rezultantno polje E_{13} ali sa suprotnim smerom. To praktično znači da su Q_1 i Q_3 istoimeno naelektrisani, dok je Q_2 suprotnog predznaka u odnosu na Q_1 i Q_3.
Kako je $E_2 = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi\cdot(a\sqrt{2}\ )^2 = E_{13} = Q_1\sqrt{2}\ / 4\varepsilon_o\pi a^2 \;\Rightarrow$
$Q_2 / Q_1 = 2\sqrt{2}$; $Q_1 = Q_3$.
Prema slici, Q_1 i Q_3 su predstavljeni kao pozitivna naelektrisanja, a Q_2 je negativno. Isti efekat je (Er = 0) ako se svim naelektrisanjima promeni predznak.

NAPOMENA! Moguće su i druge varijante, no one su nešto složenije od navedenih.

2.66.

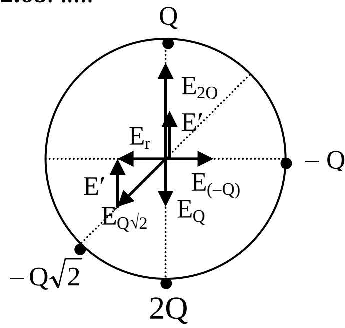


$E_1 = E_2 \;\Rightarrow\; Q_1 / 4\varepsilon\pi x^2 = Q_2 / 4\varepsilon\pi y^2 \;\Rightarrow$
$(x / y)^2 = Q_1 / Q_2 = 1/3 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{3}\, x.$
Kako je $a = y - x \Rightarrow \sqrt{3}\, x - x = 20$ cm $\Rightarrow$
x = 27,32 cm, odnosno y = 47,32 cm.

Tražena tačka (A) je udaljena od prvog naelektrisanja (Q_1) 27,32 cm a od drugog (Q_2) 47,32 cm i nalazi se na istom pravcu sa navedenim naelektrisanjima.

2.67. ..... suprotno od vektora E.

2.68. .....



Rezultantno polje E_r će se poništiti ako naelektrisanje (− Q) postavimo u tačku prema datoj slici, jer će naelektrisanje (− Q) stvarati istu jačinu električnog polja i isti pravac kao i rezultantno polje predhodna tri naelektrisanja. Kako su smerovi rezultantnog polja i polja kojeg stvara uneto naelektrisanje (− Q) suprotni, tada se ova dva polja međusobno poništavaju. U tom slučaju jačina polja u centru kružnice jednako je nuli.

3.1. ----- $E = Q / \varepsilon_o \cdot S = 10^{-9} / 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1 = 1\,129,43$ V/m.

3.2. ----- $E = Q / 4\varepsilon_o \pi r^2 = 89,92$ V/m; $D = Q / S = \varepsilon_o \cdot E = 7,96 \cdot 10^{-10}$ C/m^2.

3.3. ----- $D = \varepsilon \cdot E \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r = D / E = 2,6562 \cdot 10^{-11} \Rightarrow \varepsilon_r = 2,6562 \cdot 10^{-11} / 8,854 \cdot 10^{-12} = 3$;
$D = Q / S \Rightarrow Q = D \cdot S = 2,6562 \cdot 10^{-9} \cdot 4r^2\pi = 8,34 \cdot 10^{-9}$ C.

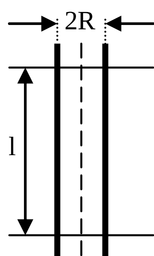
3.4. ----- $D = Q / S = 3,24 \cdot \pi \cdot 10^{-12} / 4 \cdot 0,09^2 \cdot \pi = 10^{-10}$ C/m^2; $E = D / \varepsilon = 10^{-10} / 8,854 \cdot 10^{-12} = 11,29$ V/m.

3.5. ----- $q = 10^{-11}$ C/cm $= 10^{-11} / 10^{-2}$ C/m $= 10^{-9}$ C/m;
Kada se provodnik (valjak) razvije , tada je površina jednaka $S = 2r\pi \cdot l$ ($2r\pi$... obim valjka, a l... dužina).
Sledi, $S = 2 \cdot 3,13 \cdot 0,18 \cdot 1 = 1,13$ m^2.
za 1 m $\Rightarrow Q = 1$ nC; $D = Q / S = 10^{-9} / 1,13 = 885 \cdot 10^{-12}$ C/m^2 $\Rightarrow E = D/\varepsilon = 885 \cdot 10^{-12} / 8,85 \cdot 10^{-12} = 100$ V/m.

3.6. ----- $Q = E \cdot 4\varepsilon\pi r^2 = 111,2 \cdot 10^{-12}$ C; $\sigma = Q / S' = Q / 4r'^2\pi = 111,2 \cdot 10^{-12} / 4 \cdot (10^{-3})^2 \cdot \pi = 8,854 \cdot 10^{-6}$ C/m^2.

3.7. ----- $E = Q / \varepsilon \cdot S \Rightarrow Q = E \cdot \varepsilon \cdot S = 4,427 \cdot 10^{-9}$ C; $\sigma = Q / S = 4,427 \cdot 10^{-9} / / 50 \cdot 10^{-4} = 8,854 \cdot 10^{-7}$ C/m^2.

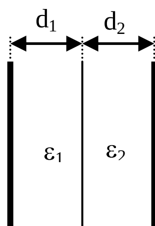
3.8. -----



$Q = 10^{-7}$ C; $D = Q / S_p = Q'/2R\pi l = 10^{-7}/ 2 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 10^3 = 1,59 \cdot 10^{-8}$ C/m^2;
$E = D / \varepsilon_o = 1,59 \cdot 10^{-8} / 8,854 \cdot 10^{-12} = 1\,795,8$ V/m.
Površinska gustina (indukcija) na udaljenosti od $r' = 10^3$ m iznosi:
$D' = Q / S' = Q / 2r'\pi \cdot l = 10^{-7} / 2 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 10^3 = 1,59 \cdot 10^{-14}$ C/m^2;
Jačina električnog polja na udaljenosti r' je $E' = D' / \varepsilon_o = 1,8 \cdot 10^{-3}$ V/m.

3.9. ----- $q = Q / l$; $D = \varepsilon_o E = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ C/m^2; $D = Q / S \Rightarrow Q = D \cdot S = D \cdot 1r\pi \cdot l \Rightarrow$
$Q = 10 \cdot 10^{-9} \cdot l$ [C].
Podužna gustina je $q = Q / l = 10 \cdot 10^{-9} \cdot l / l = 10 \cdot 10^{-9}$ [C/m].
Jačina električnog polja na površini provodnika je
$E' = Q / \varepsilon_o \cdot S' = 10 \cdot 10^{-9} \cdot l / 8,85410^{-12} \cdot 2R\pi l = 10^4 / 8,854 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1,8 \cdot 10^5$ V/m.

3.10. -----



$\sigma = Q / S = 3 \cdot 10^{-10}$ C/cm^2 $= 3 \cdot 10^{-10} / 10^{-4}$ C/m^2 $= 3 \cdot 10^{-6}$ C/m^2;
Prva ravan stvara dielektrični pomak od $D_1 = \sigma / 2$, jer se naelektrisanje raspoređuje sa obe strane, samim tim ono se deli na dve jednake polovine.
Isti je slučaj sa drugom ravnom, tj. $D_2 = \sigma / 2$.
Sledi, $D_1 = D_2$, pa je ukupna indukcija između obeju ravni jednaka $D = D_1 + D_2 = \sigma = 3 \cdot 10^{-6}$ C/m^2.

Za dielektrik sa staklom, jačina polja je $E_S = D / \varepsilon_o \cdot \varepsilon_{rs} = 3 \cdot 10^{-6} / 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 6 = 56,47 \cdot 10^3$ V/m;
a za parafin $E_P = D / \varepsilon_o \cdot \varepsilon_{rp} = 3 \cdot 10^{-6} / 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 2 = 169,4$ V/m.

3.11. ----- a) Električna indukcija (intezitet vektora dielektričnog pomeraja) je $D = Q / S = Q / 4\pi r^2 = 7{,}97\cdot10^{-12} / r^2$ [C/m²]. Iz navedene relacije, električna indukcija je obrnuto srazmerna sa kvadratom rastojanja. To znači da sa porastzom r indukcija se smanjuje po kvadratnoj funkciji (paraboli).

b) Jačina električnog polja (vektor električnog polja) iznosi:

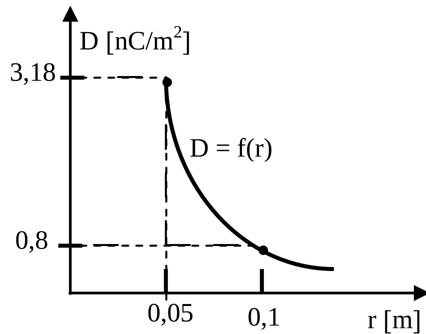
za $\mathbf{R_1 \leq r \leq R_2}$ $\Rightarrow$ $E_1 = D / \varepsilon_1 = Q / 4\varepsilon_o\varepsilon_r\cdot\pi\cdot r^2 \cong 9\cdot10^9\cdot Q / \varepsilon_r\cdot r^2 = 9\cdot10^9\cdot10^{-10} / 3\cdot r^2 = 0{,}3 / r^2$ V/m;

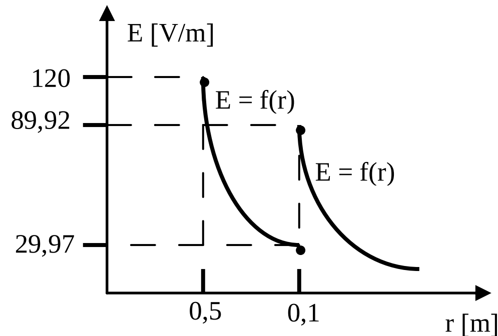
za $\mathbf{R_2 \leq r}$ $\Rightarrow$ $E_2 = D / \varepsilon_o = Q / 4\pi\varepsilon_o r^2 = 9\cdot10^9\cdot Q / r^2 = 9\cdot10^9\cdot10^{-10} / r^2 = 0{,}9 / r^2$ V/m.

Jačina električnog polja je srazmerna sa kvadratom rastojanja (udaljenost tačke od centra kugle). Dakle, jačina polja će opadati po paraboli (kvadratno) sa porastom rastojanja r. Kako su prisutne dve sredine (sloj oko kugle i vazduh), zbog relativne dielektrične konstante jačina polja će u vazduhu da se pojača za ε_r puta u odnosu na dielektrik. Zbog navedenog, na vanjskoj površini dielektrika (sa unutrašnje strane), jačina polja je tri puta manja od jačine polja na istom rastojanja (sa vanjske strane – dielektrik vazduh).

Za $r = R_2 = 0{,}05$ m $\Rightarrow$ $D = D_{max} = 3{,}18\cdot10^{-9}$ C/m²; $E = E_{max} = 120$ V/m;

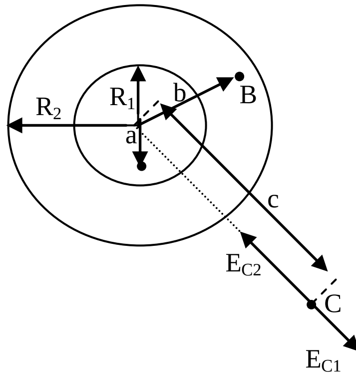
Za $r = R_1 = 0{,}1$ m $\Rightarrow$ $D_1 = 0{,}8\cdot10^{-9}$ C/m²; $E_1' = 29{,}97$ V/m; $E_1'' = E_1'\cdot3 = 89{,}92$ V/m.





3.12. ----- $E = F / q = 60\cdot10^{-3} / 10^{-6} = 60\,000$ V/m; $E = Q / 2\varepsilon S$ $\Rightarrow$ $\sigma = Q / S = 2\cdot\varepsilon\cdot E = 1{,}06\cdot10^{-6}$ C/m².

3.13. -----

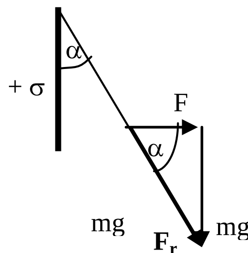


U unutrašnjosti sfere manjeg poluprečnika jačina polja je jednaka nuli (oba naelektrisanja stvaraju jačinu polja izvan svoje sfere). Dakle, u tački A jačina električnog polja jednaka je nuli ($E_A = 0$ V/m).

Za tačku B, koja se nalazi između dve sfere postoji jačina električnog polja samo unutrašnje sfere (vanjska sfera za tu tačku nema jačinu polja). Sledi $E_B = Q_1 / 4\varepsilon_o b^2$ $\Rightarrow$ $E_B = 1\,100{,}2$ V/m.

Tačka C ima jačinu polja koju stvaraju oba naelektrisanja. Kako su vektori tih polja istog pravca a suprotnog smera, jačina el. polja za datu tačku iznosi. $E_C = E_{C2} - E_{C1}$ $\Rightarrow$ $E_C = Q_2 / 4\varepsilon\pi c^2 - Q_1 / 4\varepsilon\pi c^2$ 0 1 598,63 V/m, smer ka centru.

3.14. -----

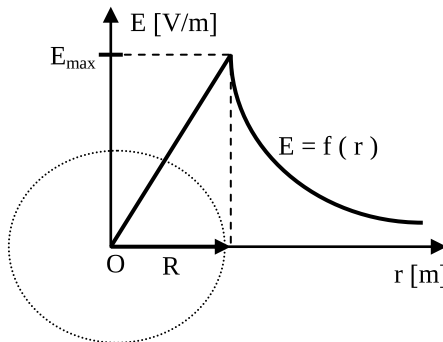


$E = Q / 2\varepsilon S = \sigma / 2\varepsilon = 4\cdot10^{-5} / 2\cdot8{,}854\cdot10^{-12} = 2{,}26\cdot10^6$ V/m.

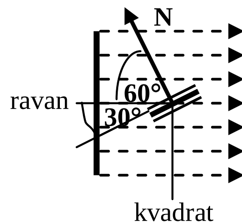
$F = E\cdot q = 2{,}26\cdot10^{-3}$ N.

Kulonova sila F, sila zemljine teže mg i rezultantna sila F_r čine jedan pravougli trougao iz kojeg se lako izračuna ugao zakretanja niti. On iznosi $\operatorname{tg}\alpha = F / mg = 2{,}26\cdot10^{-3} / 10^{-3}\cdot9{,}81 = 0{,}23$ $\Rightarrow$ $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 0{,}23 = 12{,}97°$.

3.15. ----- Zapreminska gustina naelektrisanja kugle (ravnomerno raspoređeno) iznosi
$\rho = Q / V = Q / (4/3)\cdot R^3\pi$.
Na delu kugle poluprečnika r ($0 \le r \le R$), zapreminska gustina je $\rho = Q' / V' = Q' / (4/3)\cdot r^3\pi$, tj. ista je kao i na celoj kugli. Dakle,
$Q / (4/3)R^3\pi = Q' / (4/3)r^3\pi \Rightarrow Q' = Q\cdot r^3/ R^3$, gde je $(4/3)R^3\pi$ ukupna zapremina koja obuhvata ukupno naelektrisanje Q, odnosno $(4/3)r^3\pi$ deo zapremine kugle koji obuhvata naelektrisanja Q′.
Jačina električnog polja za bilo koju tačku u kugli, koja se nalazi na rastojanju r od centra, jednaka je
$E = Q' / 4\varepsilon\pi r^2 = (r^3/R^3)\cdot Q / 4\varepsilon\pi r^2 = Q\cdot r / 4\varepsilon\pi R^3$.
Kako je $Q / 4\varepsilon\pi R^3$ konstantno, sledi : $E = k\cdot r$
Za $r = 0 \Rightarrow E = 0$ V/m, za $r = R \Rightarrow E = Q / 4\varepsilon\pi R^2 = E_{max}$.
U kugli polje se linearno povećava sa porastom rastojanja r od 0 (centar kugle) do maksimalne vrednosti (na površini kugle).
Sa daljim porastom r polje se smanjuje, na isti način kao kod površinskog naelektrisanja, tj. po paraboli



3.16. -----



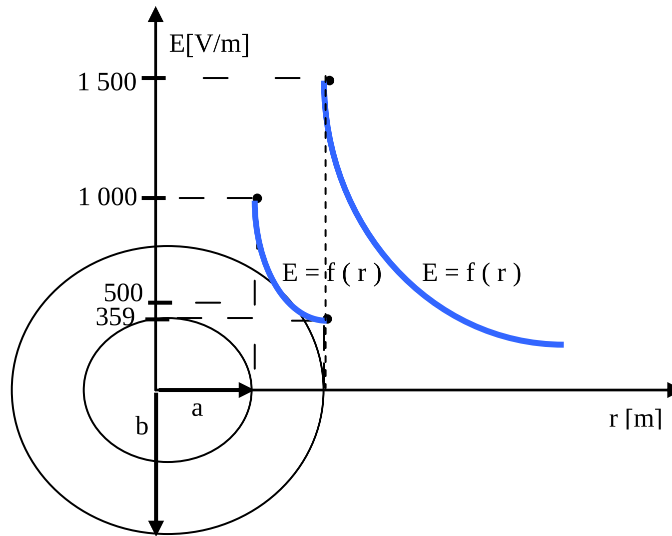
Ako je ravan kvadrata pod 30° u odnosu na linije električnog polja, tada će njegova normala biti pod uglom od (90° – 30°) 60° u odnosu na linije električnog polja.
Ravan stvara jačinu električnog polja $E = D/\varepsilon_o = \sigma/2\varepsilon_o = 10^{-6}/2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12} \Rightarrow$
E = 56 472 V/m.
Električni fluks u kvadratnom ramu je $\psi = E\cdot S\cdot \cos 60° = E\cdot a^2\cdot \cos 60° \Rightarrow$
ψ = 282,36 Vm.

3.17. ----- Iz Gausovog zakona $\psi = Q/\varepsilon_o \Rightarrow Q = \psi\cdot\varepsilon_o = 100\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12} = 8{,}854\cdot 10^{-10}$ C.

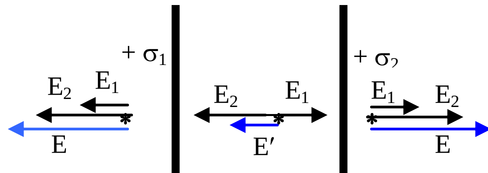
3.18. ----- Ukupni fluks, prema Gausovom zakonu, je $\psi = Q/\varepsilon_o$ = 2,26 Vm. Kako kocka sa svojih šest stranica obuhvata ukupni fluks, sledi da će po svakoj stranici on iznositi $\psi' = \psi / 6$ = 0,377 Vm.

3.19. ----- Za $r < a \Rightarrow E = 0$ V/m, jer površ unutrašnje sfere ne obuhvata nikakva naelektrisanja, pa samim tim prema Gausovoj teoremi i nema električnog fluksa, odnosno električnog polja.
Za $a \le r \le b \Rightarrow E = E_1 = Q_1 / 4\varepsilon\pi r^2$, jer spoljašnja sfera nema u ovom delu električni fluks (naelektrisanje se raspoređuje sa spoljašnje strane sfera).
Za r = a = 3 cm $\Rightarrow E = E_1$ = 999,14 V/m (jačina polja na površini unutrašnje sfere – spolja).
Za r = b = 5 cm $\Rightarrow E_1 = Q_1 / 4\varepsilon_o\pi b^2$ = 359,69 V/m. Ovde treba imati u vida da sa unutrašnje strane druge sfere nema jačine el. polja druge sfere, te je ukupna jačina polja jednaka $E = E_1$ = 359,69 V/m. Na samoj površini druge sfere sa spoljašnje strane javlja se jačina polja kojeg stvara drugo naelektrisanje i ono iznosi
$E_2 = Q_2 / 4\varepsilon_o\pi b^2$ = 1 798,5 V/m. Rezultantno polje je na površini druge sfere, spolja, jednako $E = E_2 - E_1 \Rightarrow$
E = 1 438,9 V/m. Može se konstatovati da je električno polje na vanjskoj sferi naglo poraslo sa 359,69 (unutrašnja strana) na 1 438,9 V/m (spoljašnja strana sfere).

Za $r > b \Rightarrow E = E_2 - E_1 = Q_2/4\varepsilon_o\pi b^2 - Q_1/4\varepsilon_o\pi b^2 = (Q_2 - Q_1) / 4\varepsilon_o\pi b^2$. U ovom prostoru porastom r jačina električnog polja kvadratno opada (po paraboli). Na osnovu dobijenih podataka sledi grafički dijagram



3.20. -----



Prva ravan stvara jačinu električnog polja od $E_1 = \sigma_1/2\varepsilon_o = 56{,}47$ V/m, a druga $E_2 = \sigma_2/2\varepsilon_o = 169{,}41$ V/m.
Smer el. linija je od površina ka beskonačnosti.
Između ravnih te su linije suprotnog smera, pa je rezultantno polje u tom prostoru jednako: $E' = E_2 - E_1 = 112{,}94$ V/m, a smer kao E_2.
Izvan ravni smerovi pojedinačnih polja su isti, te je rezultantno polje jednako njihovom zbiru, tj $E = E_1 + E_2 = 225{,}88$ V/m, sa smerom od ravnih ka beskonačnosti (kao E_1 i E_2).

3.21. ----- a) U unutrašnjem cilindru nema polja, jer on ne obuhvata naelektrisanja (po Gausovom zakonu nema ni električnog fluksa : $\psi = Q/\varepsilon_o$, a samim tim ni električnog polja). Dakle, $E_A = 0$ V/m.

b) U tački B postoji polje samo unutrašnjeg cilindra i ono iznosi $E_B = D_1/\varepsilon_o = Q_1/\varepsilon_o S_1 = Q_1/\varepsilon_o \cdot 2 r_B \pi \cdot h \Rightarrow E_B = 179{,}85/r_B$.

Za $r_B = r_1 \Rightarrow E_B = 1\,798{,}5$ V/m, a za $r_B = r_2 \Rightarrow E_B = 899{,}25$ V/m (odnosno, 0 V/m).
Treba imati u vidu da u unutrašnjosti vanjskog cilindra nema jačine električnog polja tog cilindra, što znači da sa unutrašnje strane spoljnog cilindra ostaje polje samo unutrašnjeg cilindra., koje iznosi 899,25 V/m.
Na površini vanjskog cilindra sa vanjske strane javlja se polje spoljnog cilindra ($Q_2 / \varepsilon \cdot 2\pi r_B \cdot h$), koje je istog inteziteta kao i polje unutrašnjeg cilindra ali suprotnog smera. Usled toga nastaje rezultantno polje koje je jednako nuli. Na osnovu navedene konstatacije sledi da polje na vanjskom cilindru sa vrednosti 899,25 V/m (unutrašnji deo površine) odjednom pada na nulu (spoljašnji deo površine).

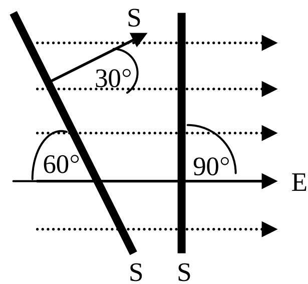
c) Van cilindara oba naelektrisanja stzvaraju istu jačinu električnog polja (isto Q i isto r) ali suprotnih smerova (raznoimena naelektrisanja), te je rezultantno polje jednako nuli. Dakle, $E_C = o$ V/m.

3.22. ----- a) $E = D / \varepsilon = Q / \varepsilon \cdot S \Rightarrow Q = E \cdot \varepsilon \cdot S = 222 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 20 = 39{,}31 \cdot 10^{-9}$ C = 39,31 nC.

b) električni fluks iznosi $\Psi' = E \cdot S \cdot \cos 30° = 222 \cdot 20 \cdot \sqrt{3} / 2 = 3\,845{,}15$ Vm.

$\psi' = Q' / \varepsilon_o \Rightarrow Q' = \psi' \cdot \varepsilon_o = 3\,845{,}15 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} = 34{,}04 \cdot 10^{-9}$ C = 34,04 nC.

3.23. .....



$$\Psi = \overline{E} \cdot \overline{S} = E \cdot S \cdot \cos \angle\left(\overline{E}, \overline{S}\right) = E \cdot S \cdot \cos 0^{\circ} = 200[V \cdot m] \Rightarrow$$

$$E \cdot S = 200[V \cdot m]$$

$$\Psi_1 = E \cdot S \cdot \cos 30^{\circ} = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}[V \cdot m]$$

4.1. ----- 6 V.

4.2. -----a) $V_M = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) + Q_2/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) = (Q_1 + Q_2)/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) = (50 - 20).10^{-9}/4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3.14\cdot0{,}1 \Rightarrow$ $V_M = 2\,697{,}7$ V.

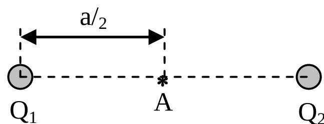
b) Naelektrisanje Q_2 stvara potencijal u početnoj tačci (mesto gde se nalazi Q_1) $V_p = Q_2/4\varepsilon\pi a \Rightarrow$ $V_p = -\,899{,}23$ V, a u tačci M $V_M = Q_2/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) = -\,1\,798{,}46$ V.Usled ove potencijalne razlike naelektrisanje Q_1 će da se pomeri iz početne tačke u tačku M, pri čemu se izvrši rad od $A = (V_p - V_M)\cdot Q_1 = 44{,}9615\cdot10^{-6}$ J.

4.3. ----- $Q = 2{,}5\cdot10^{-8}$ C.

4.4. ----- $\sigma = Q_1/S_1 = Q_2/S_2 \Rightarrow Q_1/R_1^2\pi = Q_2/R_2^2\pi \;\Rightarrow\; Q_1/Q_2 = (R_1/R_2)^2 = 16$.

4.5. ----- $r^2 = (a/2)^2 + (b/2)^2 \;\Rightarrow\; r = 5$ cm. $V_A = 4\cdot Q/4\varepsilon\pi r = Q/\varepsilon\pi r \;\Rightarrow\; Q = V_A\cdot\varepsilon\pi r = 1{,}67\cdot10^{-9}$ C.

4.6. -----



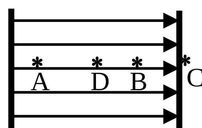
$V_A = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) + Q_2/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) = (Q_1 + Q_2)/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) \;\Rightarrow$
$V_A = (4\cdot10^{-9} - 3\cdot10^{-9})/4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot\pi\cdot0{,}05 = 179{,}85$ V.
$A = (V_A - V_B)\cdot Q = 179{,}85\cdot10^{-9}$ J = 179,85 nJ.

4.7. ----- $V_1 = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot r_1$; $V_2 = Q_2/4\varepsilon\pi\cdot r_2$; $Q_1/4\varepsilon\pi\cdot r_1 = Q_2/4\varepsilon\pi\cdot r_2 \Rightarrow Q_1/Q_2 = r_1/r_2 = 0{,}5 \;\Rightarrow\; r_2 = 2\cdot r_1$. $r_1 + r_2 = 18$ cm ; $r_1 + 2\cdot r_1 = 18$ cm $\Rightarrow$ $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 12$ cm.

4.8. ----- tačka a (V_A); **4.9.** ----- $U_{AB} = E\cdot r_1$;

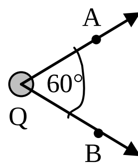
4.10. ----- Tačka C se nalazi na površini negativno naelektrisane ploče, a tačka D tačno na sredini između ploča (potencijali su suprotnih predznaka a istog inteziteta, pa je rezultantni potencijal $\Rightarrow V_D = V_{D1} - V_{D2} = 0$).

4.11. -----



Najveći rad se utroši pri prebacivanju naelektrisanja iz tačke A u tačku C (najveća razlika potencijala), i on iznosi :
$A_{AC} = (V_A - V_C)\cdot Q$.
Najmanji rad se izvrši pri prebacivanju naelektrisanja iz tačke D u tačku B (najmanja razlika potencijala), i on je jednak:
$A_{DB} = (V_D - V_B)\cdot Q$.

4.12. -----

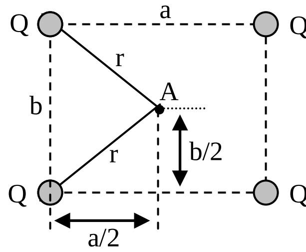


Tačka A i tačka B je na istom potencijalu (ista udaljenost od centra naelektrisanog tela), što znači da je njihova razlika potencijale jednaka nuli. Dakle, $U_{AB} = 0$ V, bez obzira pod kojim su uglom te dve električne linije koje prolaze kroz date tačke.

4.13. ----- $V_N = Q_1/4\varepsilon\pi a + Q_2/4\varepsilon\pi a + Q_3/4\varepsilon\pi d$; gde je $d = a\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$ cm.
$V_N = 299{,}7 + 599{,}49 + 637{,}8 = 1\,536{,}94$ V.
$r_2^2 = a^2 + (a/2)^2 = 900 + 225 = 1\,125 \Rightarrow r_2 = 33{,}54$ cm; $V_M = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) + Q_2/4\varepsilon\pi r_2 + Q_3/4\varepsilon\pi\cdot(a/2) \Rightarrow$ $V_M = 10\cdot10^{-9}/4\cdot\pi\cdot\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot0{,}15 + 20\cdot10^{-9}/4\cdot\pi\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot0{,}3354 + 30\cdot10^{-9}/4\cdot\pi\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot0{,}15 = 599{,}49 + 536{,}21 + 1\,798{,}46 = 2\,934{,}16$ V.

4.14. ----- $V_A = Q_1/4\varepsilon\pi b + Q_2/4\varepsilon\pi a = -\,50\cdot10^{-9}/4\cdot\pi\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot0{,}08 + 20\cdot10^{-9}/4\cdot\pi\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot0{,}06 \Rightarrow$ $V_A = -\,5\,620{,}2 + 2\,997{,}4 = -\,2\,622{,}77$ V.

4.15. -----



$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$; $r^2 = (a/2)^2 + (b/2)^2 = 6{,}25 \Rightarrow r = 2{,}5$ cm.
$V_A = Q/4\varepsilon\pi r + Q/4\varepsilon\pi r + Q/4\varepsilon\pi r + Q/4\varepsilon\pi r = Q/\varepsilon\pi r \Rightarrow$
$Q = V_A\cdot\varepsilon\pi r = 2{,}2\cdot10^3\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}13\cdot2{,}5\cdot10^{-2} = 152{,}91\cdot10^{-11}$ C
$\Rightarrow Q = 1{,}529\cdot10^{-9}$ C = 1,529 nC.

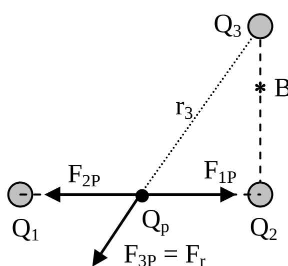
4.16. ----- $r_1 = r_2 = r_3 = r = a\sqrt{3}/3 = 5{,}77$ cm,
$V_A = (Q_1 + Q_2 + Q_3) / 4\varepsilon\pi r = (Q_1 + 2\cdot10^{-11} - 4\cdot10^{-11}) / 4\cdot3{,}14\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot5{,}77\cdot10^{-2} = 1{,}56\cdot10^{11}\cdot(Q_1 - 2\cdot10^{-11})$
$V_A = 1{,}56\cdot10^{11}Q_1 - 3{,}12$.
$r_1' = r_2' = a/2 = 5$ cm, $r_3' = a\sqrt{3}/2 = 8{,}66$ cm $\Rightarrow V_B = Q_1 / 4\varepsilon\pi r_1' + Q_2 / 4\varepsilon\pi r_2' + Q_3 / 4\varepsilon\pi r_3' \Rightarrow$
$V_B = Q_1\cdot10^{12} / 5{,}56 + 2\cdot10^{-11}\cdot10^{12} / 5{,}56 - 4\cdot10^{-11}\cdot10^{12} / 9{,}63 = 1{,}8\cdot10^{11}Q_1 + 3{,}6 - 0{,}55 = 1{,}8\cdot10^{11}Q_1 - 0{,}55$.
Kako je $V_A - V_B = -1\,800 \Rightarrow 1{,}56\cdot10^{11}Q_1 - 3{,}12 - (1{,}8\cdot10^{11} - 0{,}55) = -0{,}24\cdot10^{11}Q_1 - 2{,}57 \Rightarrow$
$-1\,797{,}43 = -0{,}24\cdot10^{11}Q_1 \Rightarrow Q_1 = 7\,489\cdot10^{-11}$ C $= 74{,}89\cdot10^{-9}$ C = 74,89 nC.

4.17. ----- $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$; $r^2 = (a/2)^2 + (b/2)^2 = 29 \Rightarrow r = 3\sqrt{3} = 5{,}39$ cm,
$r_5 = h + b/2$; $h^2 = c^2 - (a/2)^2 = 11 \Rightarrow h = 3{,}32$ cm $\Rightarrow r_5$ 5,32 cm.
$V_A = (Q/r_1 + Q/r_2 + Q/r_3 + Q/r_4 + Q/r_5) / 4\pi\varepsilon = (Q/4\pi\varepsilon)\cdot(4/r + 1/r_5) = 0{,}84\cdot10^{12}\cdot Q \Rightarrow Q = 1{,}6667$ nC.

4.18. ----- Tačka P_1 je podjednako udaljena od naelektrisanja, i to $r_1 = r_2 = r_3 = r = a\sqrt{3}/3 = 5{,}77$ cm.
Potencijal tačke P_1 iznosi $V_1 = (Q_1/r_1 + Q_2/r_2 + Q_3/r_3) / 4\varepsilon\pi$.
Tačka P_2 je udaljena od prvog i drugog naelektrisanja $r_1' = r_2' = a/2 = 5$ cm, a trećeg $r_3' = a\sqrt{3}/2 = 8{,}66$ cm.
Potencijal tačke P_2 je $V_2 = (Q_1/r_1' + Q_2/r_2' + Q_3/r_3') / 4\varepsilon\pi$.
Kako je $U = V_1 - V_2 = -1{,}8 \Rightarrow (Q_1/5{,}77\cdot10^{-2} + 2\cdot10^{-11}/5{,}77\cdot10^{-2} - \sqrt{3}\,10^{-11}) / 4\cdot3{,}14\cdot8{,}854\cdot10^{-12} -$
$Q_1/5\cdot10^{-2} + 2\cdot10^{-11}/5\cdot10^{-2} - \sqrt{3}\cdot10^{-11}/8{,}66\cdot10^{-2}) / 4\cdot3{,}14\cdot8{,}854\cdot10^{-12} = -1{,}8 \Rightarrow Q_1 = \sqrt{3}\cdot10^{-11}$ C.

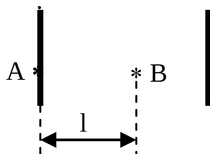
4.19. ----- $r_{1A} = r_{2A} = a/2 = 1$ cm $= 10^{-2}$ m, $r_{3A} = h = a\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$ cm $= \sqrt{3}\cdot10^{-2}$ m $\Rightarrow$
$V_A = (Q_1/r_{1A} + Q_2/r_{2A} + Q_3/r_{3A}) / 4\varepsilon\pi = 0 \Rightarrow (2\cdot10^{-12}/10^{-2} + Q_3/1{,}73\cdot10^{-2}) / 4\cdot3{,}14\cdot8{,}854\cdot10^{-12} = 0 \Rightarrow$
$Q_3 = -3{,}46\cdot10^{-12}$ C = – 3,46 pC.
$r_{1B} = h = a\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$ cm, $r_{2B} = r_{3B} = a/2 = 1$ cm $\Rightarrow V_B = (Q_1/r_{1B} + Q_2/r_{2B} + Q_3/r_{3B}) / 4\varepsilon\pi = -1{,}698$ V $\Rightarrow$
$U_{AB} = V_A - V_B = 1{,}698$ V.

4.20. -----



$r_3^2 = r_2^2 + x^2 \Rightarrow r_3 = 7{,}21$ cm; $r_4^2 = (r_1 + r_2)^2 + r_5^2 \Rightarrow r_4 = 8{,}94$ cm.
$A_{AB} = U_{AB}\cdot Q_p = 0 \Rightarrow U_{AB} = 0$ V $\Rightarrow V_A = V_B \Rightarrow$
$(Q_1/r_1 + Q_2/r_2 + Q_3/r_3) / 4\varepsilon\pi = (Q_1/r_4 + Q_2/r_5 + Q_3/r_6) / 4\varepsilon\pi \Rightarrow$
$Q_3 = 7{,}76\cdot10^{-9}$ C = 7,76 nC.
Prvo i drugo naelektrisanje stvaraju elektrostatičku silu istog inteziteta ($F_{1p} = -F_{2p}$), ali suprotnog smera, pa se one međusobno poništavaju. Rezultantna sila je jednaka sili koju stvara treće naelektrisanje i ona iznosi $F_r = F_{3p} = Q_3\cdot Q_p / 4\varepsilon\pi r_3^2 = 1{,}34\cdot10^{-8}$ N.

4.21. -----



a) $A = U \cdot q_p \Rightarrow U = A / q_p = 60$ V;
$E = Q / \varepsilon_o \varepsilon_r \cdot S = 2 \cdot 10^{-9} / 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 30 \cdot 16 \cdot 10^{-4} = 47\,060$ V/m.
b) $E = U / d \Rightarrow d = U / E = 1{,}275$ mm.
$U_{AB} = E \cdot l = 47\,060 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 47{,}06$ V.
$U_{AB} = V_A - V_B = 47{,}06 \Rightarrow 12 - V_B = 47{,}06 \Rightarrow V_B = -35{,}06$ V.

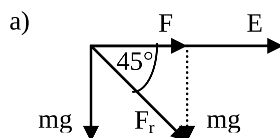
4.22. ----- a) $A = U_{AB} \cdot q_p \Rightarrow U_{AB} = A / q_p = 270$ V.
b) $U_{AB} = V_A - V_B \Rightarrow Q / 4\varepsilon\pi r_A - Q / 4\varepsilon\pi r_B = 270 \Rightarrow Q = -10^{-9}$ C = – 1 nC.
Potencijal kugle je $V = Q / 4\varepsilon\pi r = -10^{-9} / 4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = -2\,997$ V.

4.23. ----- $E = U/d = 44 \cdot 10^3$ V/m; $E = Q/\varepsilon S = D/\varepsilon \Rightarrow D = \varepsilon \cdot E = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 44 \cdot 10^3 = 389{,}58 \cdot 10^{-9}$ C/m^2.

4.24. ----- a) $D = \varepsilon \cdot E = \varepsilon_o \varepsilon_r \cdot E = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (-1{,}35/10^{-2}) = -11{,}95 \cdot 10^{-14}$ C/m^2.
b) $E = Q/4\varepsilon\pi r^2 \Rightarrow Q = E \cdot 4\varepsilon\pi r^2 = -1{,}35 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 = -609\,175$ C.
c) $V = Q/4\varepsilon\pi r = -609\,175/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 6\,370 \cdot 10^3 = -8{,}6 \cdot 10^8$ V = – 860 MV.

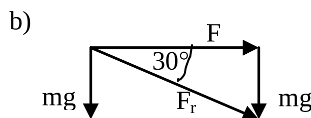
4.25. ----- $U_{AB} = 0$ V, jer je $V_A = V_B$ [ili $U_{AB} = E \cdot a \cdot \cos\alpha = E \cdot a \cdot \cos 90° = 0$, gde je $\alpha \angle$ između a i E].
$U_{AC} = U_{BC} = E \cdot a \cdot \cos\alpha = 180 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 30° = 7{,}79$ V;
$U_{AD} = E \cdot r_{AD} \cdot \cos\alpha = U_{AE} = E \cdot r_{AE} = E \cdot a \cdot \sqrt{3} = 15{,}59$ V, jer su tačke D i E na istom potencijalu ($V_D = V_E$).

4.26. -----
a)



tg 45° = mg/F = 1 $\Rightarrow$ mg = F.
Kako je $F = E \cdot Q \Rightarrow E \cdot Q = mg \Rightarrow$
$E = mg/Q = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81/10 \cdot 10^{-9} = 9{,}81 \cdot 10^6$ V/m.
Pravac polja je horizontalan sa površinom zemlje, a smer nije bitan.

b)



tg 30° = mg/F = mg/E·Q $\Rightarrow$ E = mg/Q·tg 30° $\Rightarrow$
$E = 9{,}81 \cdot 10^6/0{,}577 = 17 \cdot 10^6$ V/m.
Pravac i smer isti kao i pod tačkom a).

c) E = mg/Q·tg 60° = $5{,}67 \cdot 10^6$ V/m. Pravac je horizontalan sa zemljom (beskonačno rešenja) a smer nije bitan.

4.27. ----- tg $\alpha = mg/F' = mg/E \cdot Q \Rightarrow m = E \cdot Q \cdot \text{tg}\,\alpha/g = 10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot \text{tg}\,30°/9{,}81 = 5{,}88 \cdot 10^{-3}$ kg = 5,88 g.

4.28. ----- a) $V = Q/4\varepsilon\pi r = -14\,116{,}6$ V
b) $E = Q/4\varepsilon\pi r^2 = V/r = -2{,}22 \cdot 10^{-3}$ V/m = – 2,22 mV/m.
c) $\sigma = Q/S = Q/4r^2\pi = 10/4 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot 3{,}14 = 2 \cdot 10^{-14}$ C/m^2.

4.29. ----- $V' = Q/4\varepsilon\pi r \Rightarrow Q = V' \cdot 4 \cdot \varepsilon \cdot \pi \cdot r = 20 \cdot 4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 2{,}22 \cdot 10^{-8}$ C;
$V = Q/4\varepsilon\pi \cdot R = 2{,}22 \cdot 10^{-8}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1 = 2\,000$ V.

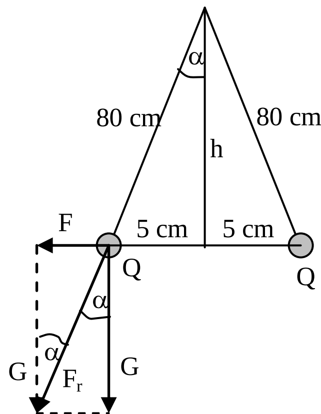
4.30. ----- $Q = -V \cdot 4\varepsilon\pi r = -4{,}448 \cdot 10^{-9}$ C. Kako je ukupno naelektrisanje jednako zbiru elementarnih, tj. $Q = n \cdot q_e$, sledi da je ukupan broj elektrona jednak $n = Q/q_e = -4{,}448 \cdot 10^{-9}/(-1{,}6 \cdot 10^{-19}) = 2{,}78 \cdot 10^{10}$.
Ukupna masa elektrona je $m_\Sigma = n \cdot m_e = 2{,}78 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}108 \cdot 10^{-31} = 25{,}32 \cdot 10^{-21}$ kg $= 2{,}532 \cdot 10^{-20}$ kg.

4.31. ----- 150 KV. **4.32.** ----- E = 0 V/m, V = 127 550 V.

4.33. ----- $V_1 = Q_1/4\varepsilon\pi r_1 = 0{,}3\cdot10^{-9}/4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}14\cdot0{,}1 = 26{,}98$ V;
$V_2 = Q_2/4\varepsilon\pi r_2 = 0{,}3\cdot10^{-9}/4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}14\cdot4\cdot10^{-2} = 67{,}44$ V.
Izvršeni rad iznosi $A = (V_2 - V_1)\cdot Q_1 = 202\cdot10^{-9}$ J. (Rad je uvek pozitivan)

4.34. ----- $E_A = 5{,}4\cdot10^5$ V/m; $E_B = 2{,}16\cdot10^4$ V/m; $V_A = 27$ KV; $V_B = 5{,}4$ KV $\Rightarrow$
$A = (V_A - V_B)\cdot q' = 216\cdot10^{-6}$ J.

4.35. ----- Iz specifične gustine $\gamma = m/V \Rightarrow m = \gamma\cdot V = \gamma\cdot(4/3)r^3\pi = [0{,}2\cdot10^{-3}/(10^{-2})^3]\cdot4\cdot(4\cdot10^{-3})^3\cdot3{,}14/3 \Rightarrow$
$m = 0{,}053$ g, gde je: γ – spec. gustina kuglica, m – masa kuglica, V – zapremina kuglice.

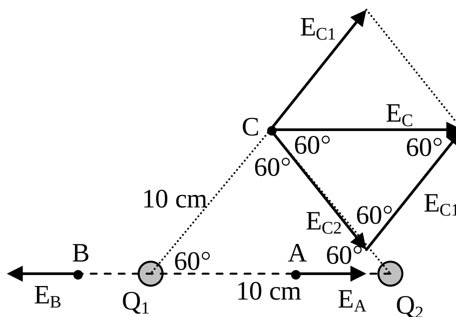


a) $G = mg = 0{,}053\cdot10^{-3}\cdot9{,}81 = 0{,}52\cdot10^{-3}$ N
$\sin\alpha = 5/80 = 0{,}0625 \Rightarrow \alpha = 3{,}58°$.
$\mathrm{tg}\,\alpha = F/G \Rightarrow F = G\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}52\cdot10^{-3}\cdot0{,}063 = 3{,}3\cdot10^{-5}$ N.

b) $F = Q^2/4\varepsilon\pi a^2 \Rightarrow Q^2 = F\cdot4\varepsilon\pi a^2 = 36{,}7\cdot10^{-18}\ C^2 \Rightarrow$
$Q = 6{,}06\cdot10^{-9}$ C = 6,06 nC.

c) $V_1 = V_2 = Q/4\varepsilon\pi r = 6{,}06\cdot10^{-9}/4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}14\cdot4\cdot10^{-3} \Rightarrow$
$V_1 = V_2 = 13\ 623$ V.

4.36. -----



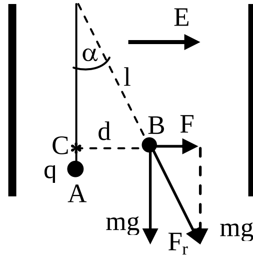
a) $E_A = E_{1A} + E_{2A} = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot0{,}06^2 + Q_2/4\varepsilon\pi\cdot0{,}04^2 \Rightarrow$
$E_A = 97\ 416$ V/m, sa smerom od tačke A ka nael. Q_2.
$E_B = E_{1B} - E_{2B} = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot0{,}04^2 - Q_2/4\varepsilon\pi\cdot0{,}14^2 \Rightarrow$
$E_B = 61\ 937$ V/m, smer se poklapa sa smerom E_{1B} (od Q_1)
$E_{1C} = E_{2C} = Q/4\varepsilon\pi\cdot0{,}1^2 = 10\ 791$ V/m.
Kako vektori E_{1C}, E_{2C} i E_C čine jedan jednakostranični trougao, sledi: $E_C = E_{1C} = E_{2C} = 10\ 791$ V/m, sa smerom prikazanim na slici (pravac paralelan pravcom Q_1 i Q_2).

b) $V_A = V_{1A} + V_{2A} = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot0{,}06 + Q_2/4\varepsilon\pi\cdot0{,}04 =$
$12\cdot10^{-9}/4\cdot\varepsilon\cdot\pi\cdot0{,}06 - 12\cdot10^{-9}/4\cdot\varepsilon\cdot\pi\cdot0{,}04 = -900$ V,
$V_B = V_{1B} + V_{2B} = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot0{,}04 + Q_2/4\varepsilon\pi\cdot0{,}14 = 1\ 900$ V
$V_C = V_{1C} + V_{2C} = Q_1/4\varepsilon\pi\cdot0{,}1 + Q_2/4\varepsilon\pi\cdot0{,}1 = 0$ V.

c) $W_{PA} = V_A\cdot q = -900\cdot4\cdot10^{-9} = -36\cdot10^{-7}$ J; $W_{PB} = V_B\cdot q = 76\cdot10^{-7}$ J; $W_{PC} = V_C\cdot q = 0$ J.
d) $A_{AB} = (V_B - V_A)\cdot q = (1\ 900 + 900)\cdot4\cdot10^{-9} = 11{,}2\cdot10^{-6}$ J.
$A_{CA} = (V_A - V_C)\cdot q = -900\cdot4\cdot10^{-9} = -3{,}6\cdot10^{-6}$ J. Znak ″ – ″ nam govori da bi navedeno naelektrisanje obavilo rad od $3{,}6\cdot10^{-6}$ J pri prebacivanju datog naelektrisanja iz tačke A u tačku C. Kako se radi o utrošenoj energiji koja je potrebna da se obavi određena radnja, smer te energije nije bitan, jer njen iznos ne zavisi od smera. To znači da energiju (rad) posmatramo isto kao i potencijal, dakle skalarno.

4.37. ----- $V_A = q/4\varepsilon\pi r_1 = 599{,}5$ V; $V_B = q/4\varepsilon\pi r_2 = 224{,}8$ V;
$A_{AB} = (V_B - V_A)\cdot q = (224{,}8 - 599{,}5)\cdot0{,}5\cdot10^{-3} = -187{,}35\cdot10^{-3}$ J = – 187,35 mJ $\Rightarrow$ $A_{BA} = 187{,}35$ mJ.

4.38. -----



Elektrostatička sila polja iznosi $F = E\cdot q = 10^5\cdot 4{,}9\cdot 10^{-9} = 4{,}9\cdot 10^{-4}$ N.
Gravitaciona sila je jednaka $G = mg = 0{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}81 = 39{,}24\cdot 10^{-4}$ N.
$\text{tg}\,\alpha = F/G = 0{,}125 \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\,0{,}125 = 7°$.
Tačka C je na istom potencijalu kao i tačka A, pa se rastojanje od tačke C do tačke B (d) odredi iz izraza $\sin\alpha = d/l \Rightarrow d = l\cdot\sin\alpha$.
Napon $U_{AB} = U_{CB} = E\cdot d = E\cdot l\cdot\sin\alpha = 10^5\cdot 0{,}2\cdot\sin 7° = 2\,440$ V.

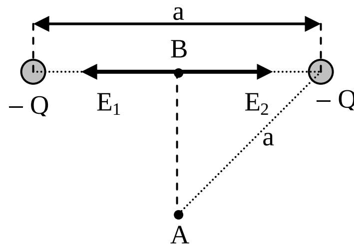
4.39. ----- $V_A = Q/4\varepsilon_o\pi\cdot r_A = 60\cdot 10^3$ V = 60 KV; $V_B = Q/4\varepsilon_o\varepsilon_r\cdot r_B = V_A/\varepsilon_r = 60\cdot 10^3/81 = 741$ V.

4.40. ----- a) $V_A = V_B \Rightarrow U_{AB} = 0 \Rightarrow A = U_{AB}\cdot q = = 0$.
b) $U_{AC} = U_{BC}$, pa je $A_{AC} = U_{AC}\cdot q$, odnosno $A_{BC} = U_{BC}\cdot q \Rightarrow A_{AC} = A_{BC}$. Isti se rad utroši, jer su tačke A i B na istom potencijalu (na istoj ekvipotencijalnoj liniji).

4.41. ----- $V = Q/4\varepsilon\pi R \Rightarrow Q = V\cdot 4\varepsilon\pi R = 400\cdot 4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 4\cdot 10^{-2} = 1{,}78\cdot 10^{-9}$ C = 1,78 nC,
$V_1 = Q/4\varepsilon\pi\cdot r_1 = 1{,}78\cdot 10^{-9}/4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}2 = 80$ V.
$A = (V_1 - V_2)\cdot q = (80 - 0)\cdot 3\cdot 10^{-6} = 240\cdot 10^{-6}$ J.

4.42. ----- $V_1 = V_2 \Rightarrow Q_1/4\varepsilon\pi r_1 = Q_2/4\varepsilon\pi r_2 \Rightarrow Q_1/Q_2 = r_1/r_2 = 2 \Rightarrow Q_1 = 2Q_1$.Ukupna količina naelektrisanja se razdeli na Q_1 i Q_2, te je: $Q_1 + Q_2 = Q \Rightarrow 2Q_2 + Q_2 = 120$ nC $\Rightarrow Q_2 = 40$ nC; $Q_1 = 80$ nC.

4.43. -----



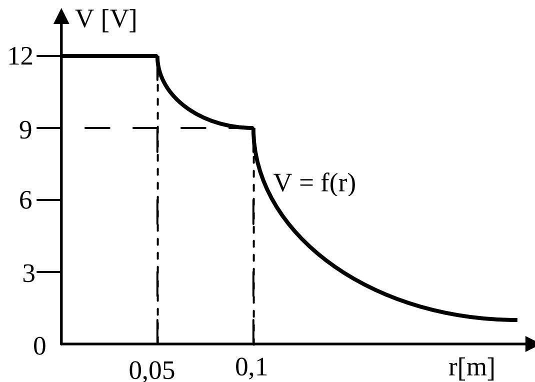
Na sredini između naelektrisanja, na istom pravcu, (tačka B) jačina električnog polja jednaka je nuli.. To znači da se iz te tačke neće pomerati naelektrisanje Δq a samim tim u toj tački elektrostatička sila na probno naelektrisanje jednaka je nuli.
Potencijal za tačku B je $V_B = V_{1B} + V_{2B} \Rightarrow$
$V_B = - Q/4\varepsilon\pi(a/2) - Q/4\varepsilon\pi(a/2) = - Q/\varepsilon\pi a$, a tačke A
$V_A = V_{1A} + V_{2A} = - Q/4\varepsilon\pi a - Q/4\varepsilon\pi a = - Q/2\varepsilon\pi a$

Prilikom pomeranja naelektrisanja Δq iz tačke A u tačku B utroši se rad, koji je jednak $A = (V_A - V_B)\cdot\Delta q \Rightarrow$
$A = (- Q/2\varepsilon\pi a + Q/\varepsilon\pi a)\cdot\Delta q = (- Q/2\varepsilon\pi a + 2Q/2\varepsilon\pi a)\cdot\Delta q \Rightarrow$ $\mathbf{A = Q\cdot\Delta q / 2\varepsilon\pi a}$**.**

4.44. ----- $V_1 = V_2 \Rightarrow Q_1/4\varepsilon\pi R = Q_2/4\varepsilon\pi r \Rightarrow Q_1/Q_2 = R/r = 5 \Rightarrow Q_1 = 5Q_2$.
$Q_1 + Q_2 = Q \Rightarrow 5Q_2 + Q_2 = 12\cdot 10^{-8}$ C $\Rightarrow Q_2 = 2\cdot 10^{-8}$ C ; $Q_1 = 10\cdot 10^{-10}$ C.
Površinske gustine su: $\sigma_1 = Q_1/S_1 = Q_1/4R^2\pi = 3{,}18\cdot 10^{-8}$ C/m² ; $\sigma_2 = Q_2/S_2 = \sigma_2/4r^2\pi = 15{,}92\cdot 10^{-8}$ C/m².

4.45. ----- Intezitet električnog polja na površinama kugli (međusobno nezavisnih) je:
na prvoj $E_1 = Q_1/4\varepsilon\pi R^2 = 10\cdot 10^{-8}/4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5^2 = 3\,596{,}9$ V, na drugoj $E_2 = Q_2/4\varepsilon\pi r^2 = 17\,984{,}6$ V/m.
$E_1/E_2 = [Q_1/4\varepsilon\pi R^2] / [Q_2/4\varepsilon\pi r^2] = (Q_1/Q_2)\cdot(r/R)^2 = (10\cdot 10^{-8}/2\cdot 10^{-8})\cdot(10/50)^2 = 5\cdot(1/5)^2 = 5/25 = 1/5$.

4.46. ----- Da je metalna kugla bez okolnog dielektrika ona bi bila na potencijalu $V_k = Q/4\varepsilon\pi R_1 = 18$ V. Zbog dielektrika ($\varepsilon_r = 3$) na površini metalne kugle sa vanjske strane potencijal se smanjuje. To znači da će navedeni dielektrik na samoj površini kugle izazvati izvesno smanjenje potencijala. Ako bi kugla umesto metala ($\varepsilon_r = 1$) bila od navedenog dielektrika, tada bi na njenoj površini potencijal bio jednak $V_k' = Q/4\varepsilon_o\varepsilon_r\pi R_1 = 6$ V. Za poterncijal kugle (potencijal na njenoj površini) uzima se srednja vrednost potencijala kojeg stvara metalna kugla i dielektrik. Dakle potencijal u samoj kugli iznosi $V = (V_k + V_k') / 2 = 12$ V (za $0 \le r \le R_1$).



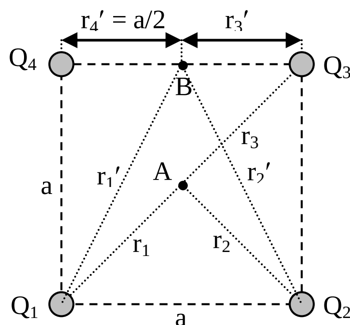
Za $r = R_2$ sa spoljašnje strane dielektrika ($\varepsilon_r = 1$) potencijal je jednak $V' = Q/4\varepsilon_o\pi R_2 = 9$ V.

Dakle, potencijal na vanjskoj površini dielektrika (u vazduhu) iznosi) V.

Za $r > R_2 \Rightarrow$ Daljim povećanjem rastojanja r potencijal sa 9 V pada ka nuli tangentno (za $r = \infty \Rightarrow V = 0$ V).

4.47. ----- Ako je tačka za koju računamo potencijal udaljena od naelektrisanja Q za **a,** a od – Q za **b,** potencijal te tačke je $V = Q/4\varepsilon\pi a - Q/4\varepsilon\pi b = Q\cdot(1/a - 1/b) /4\varepsilon\pi$. Ako ja $a = b \Rightarrow V = 0$.
Potencijal $V = 0$ se nalazi na svim tačkama koje se nalaze na simetralnoj ravni koja spaja tačkasta naelektrisanja Q i – Q.
Ako naelektrisanje Q pomeri drugo naelektrisanje – Q sa rastojanja d na rastojanje 2d ono će obaviti rad:
$A = (V' - V)\cdot(- Q) = (Q/4\varepsilon\pi\cdot 2d - Q/4\varepsilon\pi d)\cdot(- Q) = (Q/8\varepsilon\pi d - 2Q/8\varepsilon\pi d)\cdot(- Q) \Rightarrow$ $\mathbf{A = Q^2/8\varepsilon\pi d}$.

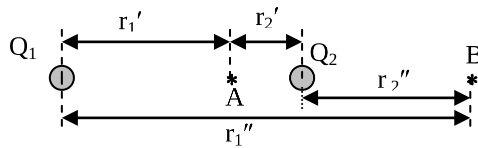
4.48. -----



Tačka A je podjednako udaljena od naelektrisanja, i to za $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r = a/\sqrt{2}$, jer je $a = r\sqrt{2}$.
Potencijal tačke A (u centru) je $V_A = V_{1A} + V_{2A} + V_{3A} + V_{4A}$,
$V_A = 4\cdot Q/4\varepsilon\pi r = Q/\varepsilon\pi r = 1\,272$ V.
Tačka B je udaljena od prvog i drugog naelektrisanja za $r_1' = r_2'$.
$r_1'^2 = a^2 + (a/2)^2 = 5$ cm^2 $\Rightarrow r_1' = r_2' = \sqrt{5}$ cm = 2,24 cm.
A od trećeg i četvrtog naelektrisanja $r_3' = r_4 = a/2 = 1$ cm.
Potencijal tačke B je $V_B = V_{1B} + V_{2B} + V_{3B} + V_{4B} \Rightarrow$
$V_B = Q/4\varepsilon\pi r_1' + Q/4\varepsilon\pi r_2' + Q/4\varepsilon\pi r_3' = Q/4\varepsilon\pi r_4' = 200{,}7 + 200{,}7$
$+ 449{,}6 + 449{,}6 \Rightarrow V_B = 1\,300{,}6$ V.
Napon između tačaka A i B je $U_{AB} = V_A - V_B = -28{,}6$ V.

Ako jedno od četiri naelektrisanja uzmemo kao pokretno i obeležimo ga sa q (npr. $q = Q_4 = Q$), tada će preostala tri naelektrisanja u temenu gde se nalazi naelektrisanje q stvarati električni potencijal sa iznosom
$V' = Q/4\varepsilon\pi a + Q/4\varepsilon\pi\cdot a\sqrt{2} + Q/4\varepsilon\pi a = 2Q/4\varepsilon\pi a + Q/\sqrt{2}\cdot 4\cdot\varepsilon\pi a = Q/2\varepsilon\pi a + Q/\sqrt{2}\cdot 4\varepsilon\pi a = 449{,}6 + 159{,}44 \Rightarrow$
$V' = 609{,}04$ V.
Izvršeni rad je jednak $A = (V' - 0)\cdot q = 609{,}04\cdot 0{,}5\cdot 10^{-9} = 304{,}7\cdot 10^{-9}$ J.

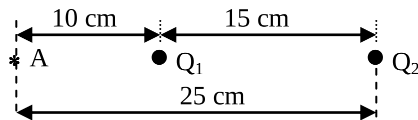
4.49. -----



Potencijal tačke koja se nalazi tačno na sredini između Q_1 i Q_2 iznosi ($r_1 = r_2 = r/2 = 2{,}5$ cm)
$V = Q_1/4\varepsilon\pi r_1 + Q_2/4\varepsilon\pi r_2 = (Q_1 + Q_2)/4\cdot\varepsilon\pi\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2} \Rightarrow$
$V = (-3 + 1{,}5)\cdot 10^{-9}/4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2} \Rightarrow$
$V = -539{,}55$ V.

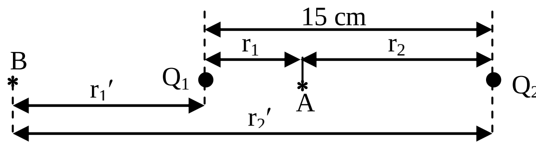
Tačka A će biti na nultom potencijalu kada je $V_1' + V_2' = V' = 0 \Rightarrow Q_1/4\varepsilon\pi r_1' + Q_2/4\varepsilon\pi r_2' = 0 \Rightarrow$
$Q_1/r_1' = -Q_2/r_2' \Rightarrow r_1'/r_2' = -Q_1/Q_2 = 3\cdot 10^{-9}/1{,}5\cdot 10^{-9} = 2 \Rightarrow r_1' = 2r_2'$
Kako je $r_1' + r_2' = 5$ cm $\Rightarrow 2r_2' + r_2' = 5 \Rightarrow r_2' = 5/3$ cm; $r_1' = 10/3$ cm.
Potencijal će biti jednak nuli i u tački B ako je $V_1'' + V_2'' = V_B = 0 \Rightarrow Q_1/4\varepsilon\pi r_1'' + Q_2/4\varepsilon\pi r_2'' \Rightarrow$
$r_1''/r_2'' = 2 \Rightarrow r_1'' = 2r_2''$. Tačka B se nalazi iza naelektrisanja Q_1 i Q_2 i to sa one strane naelektrisanja koje je manje (manje rastojanje – isti potencijali), dakle bliže naelektrisanju Q_2.
Kako je u ovom slučaju $r_1'' = r_2'' + r \Rightarrow 2r_2'' = r_2'' + 5 \Rightarrow r_2'' = 5$ cm; $r_1'' = 10$ cm.
Da li postoji još neka tačka u okolini naelektrisanja u kojem je potencijal jednak nuli ?

4.50. -----



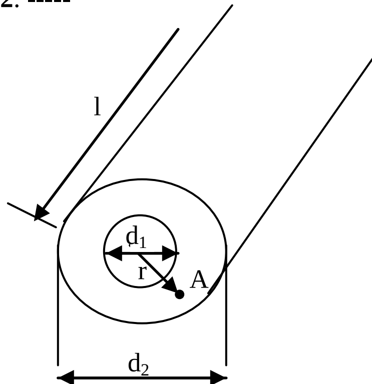
$V_A = 0 \Rightarrow Q_1/4\varepsilon\pi r_1 + Q_2/4\varepsilon\pi r_2 \Rightarrow Q_1/r_1 = -Q_2/r_2 \Rightarrow$
$-Q_1/Q_2 = r_1/r_2 = 2/5 \Rightarrow Q_2/Q_1 = -5/2 = -2{,}5$.
Kako je Q_1/Q_2 negativan broj, pa sledi da naelektrisanja moraju biti raznoimena (jedno pozitivno a drugo negativno i obrnuto).

4.51. -----



Za $V_A = 0$ V $\Rightarrow Q_1/Q_2 = r_1/r_2 \Rightarrow$
$r_2/r_1 = Q_2/Q_1 = 2 \Rightarrow r_2 = 2r_1$.
Kako je $r_1 + r_2 = 15$ cm $\Rightarrow$
$r_1 + 2r_1 = 15$ cm $\Rightarrow r_1 = 5$ cm,
odnosno $r_2 = 10$ cm.
Za $V_B = 0$ V $\Rightarrow Q_1/r_1' = Q_2/r_2'$
$\Rightarrow r_2'/r_1' = Q_2/Q_1 = 2 \Rightarrow r_2' = 2r_1'$.
$r_1' + 15 = r_2' \Rightarrow r_1' + 15 = 2r_1' \Rightarrow$
$r_1' = 15$ cm; $r_2' = 30$ cm.
NAPOMENA! Vidi zadatak 4.49.

4.52. -----

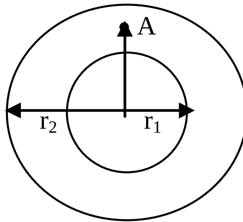


$r_1 = d_1/2 = 3$ mm; $r_2 = d_2/2 = 4{,}5$ mm.
$\mathbf{U = (Q/2\varepsilon\pi l)\cdot ln (r_2/r_1)} \Rightarrow Q = U\cdot 2\varepsilon\pi l / \ln (r_2/r_1)$;
$\mathbf{E = E_1 = Q/2\varepsilon\pi r_1 l = U / r_1\cdot ln (r_2/r_1)} \Rightarrow$
$E = 450 / 3\cdot\ln 1{,}5 = 450 / 3\cdot 0{,}405 = 370{,}37$ V/m.

4.53. ----- Jačina električnog polja za tačku A (vidi sliku u predhodnom zadatku) je $E = \varepsilon \cdot D$, jer je $\varepsilon = D/E$. Na rastojanju od 2,2 mm od centra koaksijalnog provodnika jačina polja je:
$E = D/\varepsilon_o\varepsilon_r = 6\cdot10^{-6}/8{,}854\cdot10^{-12}\cdot5{,}5 = 123\ 210{,}9$ V/m.
Ovu jačinu polja stvara samo unutrašnji provodnik (valjak), pa sledi: $E = E_1 = D/\varepsilon_o\varepsilon_r = Q/S\cdot\varepsilon_o\varepsilon_r = Q/\varepsilon_o\varepsilon_r\cdot2r\pi\cdot l$.
Napon između cilindričnih provodnika iznosi: $\mathbf{U = (Q/2\varepsilon\pi l)ln\ r_2/r_1} \Rightarrow Q = U\cdot2\varepsilon\pi l / \ln (r_2/r_1) \Rightarrow$
$E = U / r\cdot\ln (r_2/r_1) \Rightarrow r \ln (r_2/r_1) = U / E = 800 / 123\ 210{,}9 = 0{,}0065 \Rightarrow \ln (r_2/r_1) = 0{,}0065 / 2{,}2\cdot10^{-3} = 2{,}95$.
$r_2/r_1 = 19{,}1 \Rightarrow r_2 = 19{,}1\cdot r_1 = 19{,}1\cdot10^{-3}$ m $= 19{,}1$ mm $\Rightarrow d_2 = 2r_1 = 38{,}2$ mm.
Maksimalna jačina polja se nalazi na površini unutrašnjeg provodnika, tj. kada ja $r = r_1$. Ona je jednaka :
$\mathbf{E_m = U / r_1\cdot ln\ (r_2/r_1)} = 800 / 10^{-3}\cdot \ln (19{,}1\cdot10^{-3}/1\cdot10^{-3}) = 800 / 10^{-3}\cdot2{,}95 = 271\ 186$ V/m $= 271{,}168$ V/mm.

NAPOMENA! Prirodni logaritam od nekog broja se može odrediti: 1) direktno na digitronu (kalkulatoru), 2) pomoću logaritamskih tablica. Treba znati da pored prirodnog logaritma postoji i dekadski. Kod prirodnog je osnova broj **e** koji je jednak: **e = 2,71828**, dok je kod dekadskog osnova **10**. Kada treba da odredimo broj iz kojeg se izračunao logaritam (inverzna operacija), postupak je inverzan (unazad). Pored direktnog određivanja vrednosti logaritma od nekog broja na kalkulatoru i obrnuto, treba poznavati i sledeće matematičke operacije:
$\ln x = y \Rightarrow \ln_e x = y \Rightarrow a = e^x$.
Iste su operacije sa prelaskom na dekadski logaritam.
Navedene operacije govore da se logaritmovanje može rešiti i eksponencijalnim računanjem.

4.54. -----



$r_1 = R_1/2 = 5$ mm; $r_2 = R_2/2 = 6$ mm; $r = (r_1 + r_2) / 2 = 5{,}5$ mm
Jačina polja u datoj tački (tačka A; vidi sliku) iznosi:
$\mathbf{E = U\cdot r_1\cdot r_2 / r^2\cdot(r_2 - r_1)} = 363\cdot5\cdot10^{-3}\cdot6\cdot10^{-3} / 5{,}5\cdot10^{-3}\cdot(6 - 5)\cdot10^{-3}$
$\Rightarrow E = 360$ V/m.

4.55. ----- $r_1 = R_1/2 = 6$ mm; $r_2 = R_2/2 = 9$ mm.
$E = U\cdot r_1\cdot r_2 / r_1^2\cdot(r_2 - r_1) \Rightarrow U = E\cdot r_1^2\cdot(r_2 - r_1) / r_1\cdot r_2 = 300\cdot10^3\cdot(6\cdot10^{-3})^2\cdot((9 - 6)\cdot10^{-3})^2 / 6\cdot10^{-3}\cdot9\cdot10^{-3} = 600$ V.

4.56. -----

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a\sqrt{2}} = \frac{100\cdot10^{-12}}{0{,}3\sqrt{2}\cdot12{,}56\cdot8{,}854\cdot10^{-12}} = 2{,}12[V];$$

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon a} = \frac{100\cdot10^{-12}}{0{,}3\cdot12{,}56\cdot8{,}854\cdot10^{-12}} = 3[V];$$

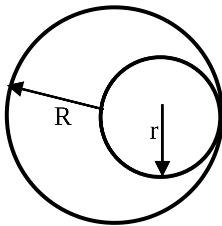
$$A = (V_B - V_A)\cdot Q_1 = (3 - 2{,}12)\cdot1\cdot10^{-12} = 0{,}878\cdot10^{-12}[J] = 0{,}878[pJ].$$

5.1. ----- $V_1 = V_2 \Rightarrow Q_1/4\varepsilon\pi r_1 = Q_2/4\varepsilon\pi r_2 \Rightarrow Q_1/Q_2 = r_1/r_2 = 2/3 \Rightarrow Q_2 = 1{,}5Q_1$
Ukupna količina naelektrisanja nakon dodira se rasporedi na obe kuglice, pa je $Q = Q_1 + Q_2 = Q_1 + 1{,}5Q_1 \Rightarrow$ $Q_1 = Q/2{,}5 = 12$ nC; $Q_2 = 18$ nC.
$V_1 = V_2 = Q_1/4\varepsilon\pi r_1 = 5\,395{,}4$ V.

5.2. ----- a) $V_1 = Q_1/4\varepsilon\pi r_1 = 2\,997{,}4$ V; b) $V_2 = Q_2/4\varepsilon\pi r_2 \Rightarrow Q_2 = V_2 \cdot 4\varepsilon\pi r_2 = 2\cdot10^{-8}$ C;
c) Nakon njihovog spajanja potencijali se izjednače, pa je $V_1' = V_2' \Rightarrow Q_1'/Q_2' = r_1/r_2 \Rightarrow Q_1' = 1{,}5Q_2'$.
Ukupna količina naelektrisanja je $Q = Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \Rightarrow 1{,}5Q_2' + Q_2' = 1\cdot10^{-8} + 2\cdot10^{-8} = 3\cdot10^{-8}$ C $\Rightarrow$ $Q_2' = 1{,}2\cdot10^{-8}$ C; $Q_1' = 1{,}8\cdot10^{-8}$ C; $V_1' = V_2' = V' = Q_1'/4\varepsilon\pi r_1 = 5\,395{,}4$ V.
d) Potencijalna energija je $W_p' = V'\cdot Q = V'\cdot(Q_1' + Q_2') = 5\,395{,}4\cdot3\cdot10^{-8} = 16{,}186\cdot10^{-5}$ J. Stvarna energija je jednaka polovini potencijalne (srednja vrednost), pa je $W' = W_p'/2 = Q\cdot V'/2 = 8{,}09\cdot10^{-5}$ J.
e) Pre spajanja kuglica energija kuglica je bila $W = V_1Q_1/2 + V_2Q_2/2 = 2\,997\cdot10^{-8}/2 + 9000\cdot2\cdot10^{-8}/2 \Rightarrow$ $W = 10{,}5\cdot10^{-5}$ J.
Razlika između početne energije i energije na kraju predstavlja rad (utrošenu energiju) električnih sila i on je jednak $A = W - W' = 10{,}5\cdot10^{-5} - 8{,}09\cdot10^{-5} = 2{,}41\cdot10^{-5}$ J.

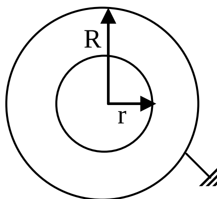
5.3. ----- $V_A' = V_B' \Rightarrow Q_A'/r_1 = Q_B'/r_2 = 2/3 \Rightarrow Q_B' = 1{,}5Q_A'$.
Energije kuglica nakon razdvajanja je $W_B' = V_B'Q_B'/2$; odnosno $W_A' = V_A'Q_A'/2 = V_B'Q_B'/2\cdot1{,}5 = W_B'/1{,}5 \Rightarrow$ $W_A' = 0{,}4/1{,}5 = 0{,}267$ J.
Ukupna energija je $W' = W_A' + W_B' = 0{,}667$ J.
Iz ukupne energije koja iznosi $W' = V_A'Q_A'/2 + V_B'Q_B'/2 = V_A'\cdot(Q_A' + Q_B')/2 \Rightarrow Q_A' + Q_B' = 2\cdot W'/V_A' \Rightarrow$ $Q_A' + Q_B' = 2\cdot0{,}667/485{,}6\cdot10^3 = 2{,}75\cdot10^{-6}$ C.
Kako su ova naelektrisanja nastala od naelektrisanja kuglice A , sledi: $Q_A = Q_A' + Q_B' = 2{,}75\cdot10^{-6}$ C $= 2{,}75$ μC.

5.4. -----



$Q = V\cdot4\varepsilon\pi r = 300\cdot4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}14\cdot0{,}1 = 3{,}34\cdot10^{-9}$ C $= 3{,}34$ nC.
Nakon dodira obe kugle se ponašaju kao jedan provodnik (isti potencijal). Ukupna količina naelektrisanja će se sada rasporediti samo po površini vanjske kugle, što znači da na unutrašnjoj kugli nema naelektrisanja. Sada će naelektrisanje Q stvarati potencijal na površini vanjske, koji je ujedno jednak potencijalu u kugli a samim tim i potencijalu unutrašnje kugle od $V = Q/4\varepsilon\pi R = 3{,}34\cdot10^{-9}/4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}14\cdot0{,}15 = 200$ V.

5.5. -----



Metalna kugla stvara količinu naelektrisanja pre okruženja oklopom od $Q = V\cdot4\varepsilon\pi r = 600\cdot4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}14\cdot0{,}1 = 6{,}67\cdot10^{-9}$ C $= 6{,}67$ nC.
Okruženjem metalne kugle provodnom ljuskom, naelektrisanje Q (koje se nalazi na površini sa vanjske strane kugle) svojim električnim poljem indukuje istu količinu naelektrisanja na oklopu, i to: sa njegove unutrašnje strane $-q$ naelektrisanje, a sa vanjske $+q$ naelektrisanje. Dakle, $|Q| = |q_1|$.
Predhodno naelektrisanje Q indukuje sa unutrašnje strane ljuske naelektrisanje $-q$, da bi ono izazvalo indukciju naelektrisanja $+q$ sa spoljašnje strane ljuske.

Kako je ljuska sa vanjske strane uzemljena, njeno će se naelektrisanje $+q$ neutralisati sa zemljom (bilo da ono pređe na zemlju, ili sa zemlje dođe ista količina naelektrisanja ali suprotnog predznaka na površinu kugle). Dakle, sistem je ostao sa dva naelektrisanja, i to: sa Q (na površini metalne kugle) i $-q$ (na površini ljuske sa njene unutrašnje strane).
Naelektrisanje $-q$ na površini ljuske, a samim tim i u svim tačkama unutar nje stvara potencijal koji iznosi: $V' = -\,q/4\varepsilon\pi R = -\,6{,}67\cdot10^{-9}/4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}14\cdot0{,}2 = -\,300$ V.
Ukupni potencijal metalne kugle jednak je zbiru potencijala kojeg stvaraju u kugli oba naelektrisanja, te je: $V_K = V + V' = 600 + (-\,300) = 300$ V, gde je V potencijal kugle bez ljuske koji iznosi 600 V.

5.6. ----- $Q_\Sigma = 20 \cdot Q = 20 \cdot 10^{-10}$ C; $V = Q_\Sigma/4\varepsilon\pi a = 20 \cdot 10^{-10}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 359{,}69$ V.

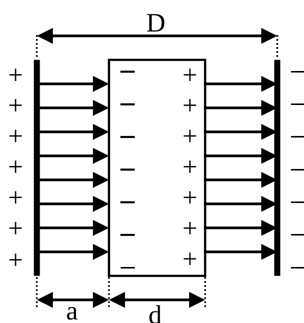
5.7. ----- $E = Q/4\varepsilon\pi a^2 \Rightarrow Q = E \cdot 4 \cdot \varepsilon\pi a^2 = (30 \cdot 10^3/10^{-2}) \cdot 4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 = 333{,}62 \cdot 10^{-8}$ C.
Da li je rešenje praktično moguće imajući u vidu da se i u samoj kugli nalazi određeni prostor (vazduh).

5.8. ----- $Q_1 = V_1 \cdot 4\varepsilon\pi r_1 = 100 \cdot 4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-3} = 11{,}12 \cdot 10^{-12}$ C = 11,12 pC.
$Q_\Sigma = 1000 \cdot 11{,}12 \cdot 10^{-12} = 11{,}12 \cdot 10^{-9}$ C = 11,12 nC.
Novonastala kap ima ima 1000 puta veću zapreminu od jedne kapljice, pa je:
$\mathcal{V} = 1000 \cdot \mathcal{V}_1 = 10^3 \cdot 4r^3\pi/3 = 10^3 \cdot 4 \cdot (10^{-3})^3 \cdot 3{,}14/3 = 4{,}19^{-6}$ m^3.
Kako je $\mathcal{V} = 4R^3\pi/3 \Rightarrow R^3 = 3 \cdot \mathcal{V}/4\pi = 3 \cdot 4{,}19 \cdot 10^{-6}/12{,}56 = 1 \cdot 10^{-6} \Rightarrow R = 10^{-2}$ m = 1 cm.
Potencijal velike kapi je $V = Q_\Sigma/4\varepsilon\pi R = 11{,}12 \cdot 10^{-9}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2} = 10 \cdot 10^3$ V = 10 KV.

5.9. ----- Zapremina sapunice je $\mathcal{V}_s = 4 \cdot (R+d)^3\pi/3 - 4R^3\pi/3 = 4 \cdot (2 \cdot 10^{-2} + 10^{-4} \cdot 10^{-2})^3\pi/3 - 4 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^3/3 \Rightarrow$
$\mathcal{V}_s = 4 \cdot (2 + 0{,}0001)^3 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}14/3 - 4 \cdot 2^3 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}14/3 = 5{,}02 \cdot 10^{-9}$ m^3.
Kada se sapunica pretvori u jednu kapljicu zapremina ostaje ista. Kako je zapremina kapljice $\mathcal{V}_K = 4r'^3\pi/3 \Rightarrow$
$r'^3 = 3\mathcal{V}_K/4\pi = 3 \cdot 5{,}02 \cdot 10^{-9}/12{,}56 = 1{,}2 \cdot 10^{-9} \Rightarrow r' = 1{,}06 \cdot 10^{-3}$ m = 1,06 mm.
Kako je potencijal sapunice $V = Q/4\varepsilon\pi(R+d) \Rightarrow Q = V \cdot 4\varepsilon\pi \cdot (R+d) = 10^3 \cdot 4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot (2 \cdot 10^{-2} + 10^{-6}) \Rightarrow$
$Q = 2{,}225 \cdot 10^{-9}$ C, što je ujedno naelektrisanje i sapunice i kapljice .
Potencijal kapljice iznosi $V_K = Q/4\varepsilon\pi r' = 2{,}225 \cdot 10^{-9}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}06 \cdot 10^{-3} = 18\,875$ V = 18,875 KV.

5.10. ----- Mala naelektrisana lopta svojim naelektrisanjem Q (sa spoljašnje strane površine) stvara radijalno električno polje. Usled toga na većoj (spoljašnjoj) lopti dolazi do indukovanja (električna indukcija) naelektrisanja, i to : sa unutrašnje strane negativnog naelektrisanja $-q$, a sa spoljašnje strane $+q$ .Apsolutne vrednosti ovih naelektrisanja su jednake. Polje je prisutno između dveju lopti, kao i sa spoljašnje strane veće lopte. Na potencijal i manje i veće lopte utiče njeno naelektrisanje Q, zatim naelektrisanje $-q$ sa unutrašnje strane veće lopte i $+q$ sa vanjske strane veće lopte.
Potencijal na većoj lopti iznosi:
$V_V = Q/4\varepsilon\pi a - q/4\varepsilon\pi a + q/4\varepsilon\pi a = Q/4\varepsilon\pi a = 2 \cdot 10^{-12}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1 = 0{,}18$ V.
Očito je da potencijal na spoljašnjoj lopti stvara naelektrisanje unutrašnje lopte, jer potencijal koji stvara $-q$ sa unutrašnje strane lopte i $+q$ sa spoljašnje strane veće lopte se međusobno poništava (isto udaljenost od centra lopte i ista količina naelektrisanja ali suprotnih predznaka). Ovo važi za sve slučajeve bez obzira za debljinu zida d.
Dakle, potencijal vanjske lopte je za sva tri slučaja jednak $V_V = 0{,}18$ V.
Potencijal unutrašnje lopte iznosi:
$V_u = Q/4\varepsilon\pi b - q/4\varepsilon\pi \cdot (a - d) + q/4\varepsilon\pi a$. Prvi član jednačine je posledica naelektrisanja manje lopte Q, drugi posledica naelektrisanja veće lopte $-q$ sa unutrašnje strane i treći član posledica naelektrisanja veće lopte $+q$ sa vanjske strane.
Za $d = 0 \Rightarrow V_u' = 2 \cdot 10^{-12}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2} = 1{,}8$ V;
Za $d = 1$ cm $\Rightarrow$
$V_u'' = 2 \cdot 10^{-12}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-12}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-12}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1 \Rightarrow$
$V_u'' = 1{,}8 - 0{,}2 + 0{,}18 = 1{,}78$ V.
Za $d = 5$ cm $\Rightarrow V_u''' = 1{,}8 - 2 \cdot 10^{-12}/4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot (10 - 5) \cdot 10^{-2} + 0{,}18 = 1{,}8 - 0{,}34 + 0{,}18 = 1{,}64$ V.

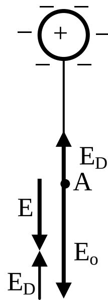
5.11. -----



Pre unošenja provodne ploče jačina električnog polja je bila jednaka $E = Q/\varepsilon S = 5\cdot10^{-8}/8{,}854\cdot10^{-12}\cdot5\cdot10^{-2} = 11{,}29\cdot10^{4}$ V/m.
Unošenjem provodne ploče u električno polje na njoj se indukuje ista količina naelektrisanja koja je jednaka količini naelektrisanja naelektrisane ploče, ali suprotnih predznaka (dejstvo elektrostatičkih sila). Usled toga broj električnih linija ostaje nepromenjen, tj. jačina električnog polja je ostala ista, dakle $E = 11{,}29\cdot10^{4}$ V/m.
U samoj nenaelektrisanoj ploči (kao i na naelektrisanim) nema jačine električnog polja, slično električnom polju u naelektrisanoj provodnoj kugli (Faradejev kavez).

Napon između naelektrisanih ploča pre unošenja provodne nenaelektrisane ploče je iznosio $U = E\cdot D = 1129$ V.
Unošenjem treće ploče napon se deli na dva pada napona (sa leve i sa desne strane).
Sa leve strane napon iznosi $U_1 = E\cdot a = 11{,}29\cdot10^{4}\cdot2\cdot10^{-3} = 225{,}8$ V;
A sa desne strane $U_2 = E\cdot(D - a - d) = 11{,}29\cdot10^{4}\cdot(10 - 5 - 2)\cdot10^{-3} = 338{,}7$ V.
Između naelektrisanih ploča sada je napon jednak $U_{12} = U_1 + U_2 = 564{,}5$ V; ili $U_{12} = E\cdot(D - d) = 564{,}5$ V.
Kako treća ploča nema uticaja na električno polje, tada njenim uzemljenjem ništa se ne menja u električnom polju (u trećoj ploči nema električnog polja kako pre uzemljenja, tako i posle njenog uzemljenja).

6.1.



a) Jačina električnog polja u tački A (rezultantno polje) jednaka je razlici polja E_o kojeg stvara naelektrisanje kuglice Q i polja E_D kojeg čini indukovano naelektrisanje u dielektriku (parafinu).

Da nema parafina polje bi bilo jednako
$E_o = Q/4\varepsilon_o\pi r^2 = 10.10^{-9}/4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}05^2 \Rightarrow E_o = 35\ 969{,}2$ V/m.
Naelektrisanje kuglice će izazvati polarizaciju parafina (dielektrični pomak – dipolovi), a samim tim indukovana količina naelektrisanja Q_d (koja će biti uvek suprotnog smera u odnosu na naelektrisanje Q) u tački A stvara jačinu električnog polja E_d inteziteta:
$E_d = Q_D/4\varepsilon_o\pi r^2 = Q/4\cdot\varepsilon_o\varepsilon_r\pi r^2 = E_o/\varepsilon_r$, jer je
$\varepsilon_r = E_o/E_d = (Q/4\varepsilon_o\pi r^2) / (Q_d/4\varepsilon_o\pi r^2) = Q/Q_d$.
Dakle, jačina polja u tački A je $E_A = E_o - E_d = E_o - E_o/\varepsilon_r = 35\ 969{,}2 - 17\ 984{,}6 \Rightarrow$
E = 17 984,6 V/m.

b) Količina inukovanog naelektrisanja u dielektriku iznosi $Q_d = Q/\varepsilon_r = 5\cdot 10^{-9}$ C = 5 nC.
[ili $E_d = Q_d/4\varepsilon_o\pi r^2 \Rightarrow Q_d = E_d\cdot 4\varepsilon_o\pi r^2 = 5\cdot 10^{-9}$ C]
[NAPOMENA! Ova dva naelektrisanja (Q i Q_d) se u dodirnoj površini delomično međusobno ponište, te ostane rezultantno naelektrisanje Q_r , koje i stvara rezultantno polje E. Rezultantno naelektrisanje se nalazi na dodirnoj površini i ono iznosi $Q_r = Q - Q_d \Rightarrow E = Q_r/4\varepsilon_o\pi r^2 = (Q - Q_d)/4\varepsilon_o\pi r^2$. Rešenje je isto.]

6.2. ----- Kuglica stvara jačinu polja u vakuumu $E_o = Q/4\varepsilon_o\pi r^2 \Rightarrow Q = E_o\cdot 4\varepsilon_o\pi r^2 = 3{,}56\cdot 10^{-12} = 3{,}56$ pC.
Potapanjem kuglice u ulje dolazi do polarizacije ulja (električna indukcija), pa se izdvoji količina naelektrisanja Q_d koja stvara jačinu polja: $E_d = Q_d/4\varepsilon_o\pi r^2 = Q/4\varepsilon_o\varepsilon_r\pi r^2 = E_o/\varepsilon_r = 20/2{,}2 = 9{,}09$ V/m.
Rezultantno (ukupno) polje iznosi $E = E_o - E_d = 10.91$ V/m.
Na dodirnoj (zajedničkoj) površini naelektrisanje Q_d se neutrališe sa isto tolikom količinom naelektrisanja Q, jer su suprotnog predznaka, te ostane rezultantno naelektrisanje koje iznosi $Q_r = Q - Q_d$. Ovo rezultantno naelektrisanje i stvara rezultantnu jačinu polja, pa sledi:
$E = Q_r/4\varepsilon_o\pi r^2 \Rightarrow Q_r = E\cdot 4\varepsilon_o\pi r^2 = 10{,}91\cdot 4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 0{,}04^2 = 1{,}941\cdot 10^{-12}$ C = 1,941 pC.
Površinska gustina naelektrisanja (rezultantno naelektrisanje) jednaka je:
$\sigma = Q_r/S = Q_r/4R^2\pi = 1{,}941\cdot 10^{-12}/4\cdot 0{,}01^2\cdot 3{,}14 = 1{,}545\cdot 10^{-9}$ C/m^2 = 1,545 nC/m^2.

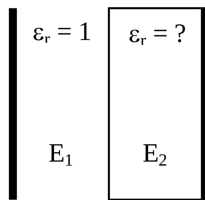
6.3. ----- Rezultantna količina naelektrisanja (dodirna površina) iznosi ($\sigma_r = Q_r/S$):
$Q_r = \sigma_r\cdot S = \sigma_r\cdot 4r^2\pi = 3\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot(0{,}5\cdot 10^{-2})^2\cdot 3{,}14 = 0{,}942\cdot 10^{-12}$ C = 0,942 pC.
Jačina polja (rezultantna) je $E = Q_r/4\varepsilon_o\pi r^2 = 0{,}942\cdot 10^{-12}/4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot(0{,}5\cdot 10^{-2})^2 = 338{,}83$ V/m.
Kako je $E = E_o - E_d = E_o - E_o/\varepsilon_r = Q/4\varepsilon_o\pi r^2 - Q/4\varepsilon_o\varepsilon_r\pi r^2 = Q\cdot(1 - 1/\varepsilon_r) / 4\varepsilon_o\pi r^2 \Rightarrow Q = E\cdot 4\varepsilon_o\pi r^2/(1 - 1/\varepsilon_r) \Rightarrow$
$Q = E\cdot 4\varepsilon_o\pi r^2\cdot\varepsilon_r / (\varepsilon_r - 1) = 338{,}83\cdot 4\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot(0{,}5\cdot 10^{-2})^2\cdot 3 / (3 - 1) = 1{,}413\cdot 10^{-12}$ C = 1,413 pC.

6.4. ----- $\sigma_o = Q_o/S \Rightarrow Q_o = \sigma_o\cdot S \Rightarrow E_o = Q_o/\varepsilon_o S = \sigma_o/\varepsilon_o = 0{,}2\cdot 10^{-6}/8{,}854\cdot 10^{-12} = 22\ 588{,}66$ V/m.
Unošenjem parafina u kondenzator u parafinu (dielektriku) će doći do indukovanog naelektrisanja Q_d koje će stvarati svoje električno polje E_d. El. polje parafina jednako je: $E_d = Q_d/\varepsilon_o S = Q_o/\varepsilon_o\varepsilon_r S = E_o/\varepsilon_r = 11\ 294{,}33$ V/m.
Gustina polarizovanog naelektrisanja na parafinu je $\sigma_d = Q_d/S = E_d\,\varepsilon_o = 0{,}1\cdot 10^{-6}$ C/m^2 = 0,1 μC/m^2.

6.5. ----- a) Rezultantno polje je: $E = E_o - E_d \Rightarrow Q/\varepsilon_o S = Q_o/\varepsilon_o S - Q_o/\varepsilon_o\varepsilon_r S \Rightarrow Q/S = Q_o/S - Q_o/\varepsilon_r S \Rightarrow$
$\sigma = \sigma_o - \sigma_d = \sigma_o - \sigma_o/\varepsilon_r = \sigma_o\cdot(\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r \Rightarrow \sigma_o = \sigma\cdot\varepsilon_r / (\varepsilon_r - 1) = 20\cdot 10^{-9}\cdot 2{,}5 / (2{,}5 - 1) = 33{,}33\cdot 10^{-9}$ C/m^2.
b) Kada se dielektrik izvuče jačina polja iznosi: $E_o = \sigma_o / \varepsilon_o = 33{,}33\cdot 10^{-9} / 8{,}854\cdot 10^{-12} = 3\ 764{,}78$ V/m.

6.6. ----- Jačina el. polja pre ubacivanja stakla je iznosila: $E_o = D / \varepsilon_o = 60\cdot 10^{-9} / 8{,}854\cdot 10^{-12} = 6\ 776{,}6$ V/m.
Ploče su na međusobnom rastojanju: $d = U/E_o = 12/6\ 776{,}6 = 1{,}77\cdot 10^{-3}$ m = 1,77 mm.
Ubacivanjem stakla između ploča jačina polja se smanji na vrednost: $E' = U'/d = 1{,}5/1{,}77\cdot 10^{-3} = 847{,}1$ V/m.
Reletivna dielektrična konstanta stakla je: $\varepsilon_r = E_o / E' = 6\ 776{,}6 / 847{,}1 = 8$.

6.7. -----



Ubacivanjem materijalnog dielektrika u ½ električnog polja nastaju dva električna polja različitog inteziteta. U vazduhu je jačina polja $E_1 = 1{,}5 \cdot E_o$, što je dato u podatku. Za materijalni dielektrik jačina polja je jednaka: $E_2 = Q/\varepsilon_o\varepsilon_r S = E_1/\varepsilon_r$. (NAPOMENA! Količina naelektrisanja je ista za obe sredine, bez obzira što je sada ona promenjena u odnosu na početno stanje.)
Dakle, $E_2 = E_1/\varepsilon_r = 1{,}5 \cdot E_o / \varepsilon_r$.
Kako je $U = E_o \cdot d$ (kond. bez materijalnog dielektrika), odnosno :
$U = U_1 + U_2 \Rightarrow E_o \cdot d = E_1 d_1 + E_2 d_2 = 1{,}5 \cdot E_o \cdot d/2 + 1{,}5 \cdot E_o \cdot d/2 \cdot \varepsilon_r \Rightarrow$
$1 = 0{,}75 + 0{,}75 / \varepsilon_r \Rightarrow \varepsilon_r = 3$.

6.8. ----- a) i b) $A = Q_p \cdot U$; $U = E \cdot d = (Q / \varepsilon_o\varepsilon_r \cdot S) \cdot d = 20 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}275 \cdot 10^{-3} / 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 30 \cdot 16 \cdot 10^{-4} = 60$ V.
$A = 60 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-12} = 6 \cdot 10^{-12}$ J = 6 pJ.
Kada je naelektrisanje pozitivno, njega će pomerati električno polje od pozitivne ploče ka negativnoj, samim tim to polje će obaviti rad od 6 pJ. Da bi se to isto naelektrisanje q_p prenelo sa negativne na pozitivnu ploču treba na njega da deluje spoljna sila koja je veća od sile električnog polja. U ovom slučaju su prisutne dve sile: sila električnog polja i spoljna sila. Te dve sile su suprotnog smera, pa je rezultanta jednaka njihovoj razlici.
Za isti utrošeni rad spoljna sila treba da je dva puta veća od sile električnog polja, kako bi rezultanta ostala ista. Kada bi odstranili uticaj električnog polja, tada bi se utrošio isti rad (ista sila), pri pomeranu naelektrisanja od negativne ploče ka pozitivnoj (smer je suprotan).

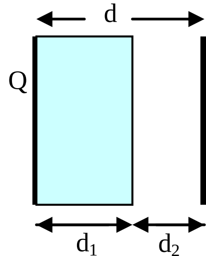
c) $U = U_1 + U_2 = E \cdot d_1 + E \cdot d_2$; $E = U / d = 60 / 1{,}275 \cdot 10^{-3} = 47\,058{,}82$ V/m.
$U_1 = E \cdot d_1 = 47{,}059$ V;
Kako je $U_1 = V_p - V_A \Rightarrow 47{,}059 = 12 - V_A \Rightarrow V_A = -35{,}059$ V.

7.1. ----- a) 368,92 pF; b) 1 918,37 pF = 1,91837 nF.

7.2. ----- $Q = 2{,}4\cdot10^{-6}$ C; $E = Q/\varepsilon_o S \Rightarrow S = Q/\varepsilon_o E = 0{,}045\ m^2 = 450\ cm^2$; $E = E/d \Rightarrow d = U/E = 0{,}4$ mm.

7.3. ----- a) Kapacitivnost C je ista (ne zavisi od napona), a opterećenje Q se dva puta poveća.
b) Kapacitivnost je ostala nepromenjena, dok se količina naelektrisanja smanjila dva puta.

7.4. -----



Izdvojena (zajednička) količina naelektrisanja na površinama obeju sredina je ista (redna veza kondenzatora), i iznosi Q.
Kako je $C_1 = Q/U_1$, $C_2 = Q/U_2 \Rightarrow C_1/C_2 = U_2/U_1 = (\varepsilon_o\varepsilon_r\cdot S/d_1) / (\varepsilon_o S/d_2) \Rightarrow$
$U_2 = \varepsilon_r\cdot d_2\cdot U_1 / d_1$.
Ukupni napon je jednak $U = U_1 + U_2 = U_1 + \varepsilon_r\cdot d_2\cdot U_1/d_1 \Rightarrow$
$1\,500 = U_1\cdot(1 + 6\cdot0{,}2/0{,}3) \Rightarrow U_1 = 900$ V; $U_2 = 600$ V.
Jačine električnog polja su:
– za dielektrik sa $\varepsilon_r = 6$: $E_1 = U_1/d_1 = 900/1{,}8\cdot10^{-3} = 500\cdot10^3$ V/m = 0,5 KV/mm
– za vazduh ($\varepsilon_r = 1$): $E_2 = U_2/d_2 = 600/0{,}2\cdot10^{-3} = 3\,000\cdot10^3$ V/m = 3 KV/mm.

7.5. ----- $C_1 = \varepsilon_o\varepsilon_{r1}S/d_1$; $C_2 = \varepsilon_o\varepsilon_{r2}S/d_2$; $C_1 / C_2 = \varepsilon_{r1}\cdot d_2 / \varepsilon_{r2}\cdot d_1 = (Q/U_1) / (Q/U_2)$;
Za $d_1 = d_2 \Rightarrow U_2 / U_1 = \varepsilon_{r1} / \varepsilon_{r2} = 1/4 \Rightarrow U_1 = 4U_2$.
$U_1 + U_2 = U \Rightarrow 4U_2 + U_2 = 10$ KV $\Rightarrow U_2 = 2$ KV; $U_1 = 8$ KV.

7.6. ----- $E = Q/4\varepsilon\pi r^2 \Rightarrow r^2 = Q/4\varepsilon\pi\cdot E = 9 \Rightarrow r = 3$ m; $V = Q/4\varepsilon\pi r = Er = 6$ V; $C = Q/V = 0{,}333$ nC.

7.7. ----- $C = \varepsilon_o S/d \Rightarrow S = Cd/\varepsilon_o = 1{,}694\ m^2 \Rightarrow r^2\pi = 1{,}694 \Rightarrow r^2 = 0{,}54\ m^2 \Rightarrow r = 0{,}73$ m = 73 cm.

7.8. ----- $C = 0{,}8\ \mu F$.

7.9. ----- $C = Q/V = Q / (Q/4\varepsilon\pi r) = 4\varepsilon_o\varepsilon_r\pi r = 4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot81\cdot3{,}14\cdot0{,}1 = 900\cdot10^{-12}$ F = 900 pF = 0,9 nF.

7.10. ----- $C = 4\varepsilon\pi R = 4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}14\cdot6\,370\cdot10^3 = 708\cdot10^{-6}$ F = 708 μF.

7.11. ----- Q = UC = 50 mC.

7.12. ----- $U = Q/C = 5\,000$ V = 5 KV; $C = \varepsilon_o S/d$, $C_1 = \varepsilon_o S/d_1$, a kako je $d_1 = 2d \Rightarrow C/C_1 = d_1/d = 2 \Rightarrow$
$C_1 = C/2 = 30$ pF. Kako je $U = Q/C$ i $U_1 = Q/C_1 \Rightarrow U_1/U = C/C_1 = 2 \Rightarrow U_1 = 2U = 10$ KV..
Povećenjem rastojanja dva puta smanjuje se kapacitet kondenzatora dva puta (C je obrnuto srazmerno sa d), dok se napon na kondenzatoru poveća za dva puta (U je srazmerno sa d) .

7.13. ----- $C = (n - 1)\cdot\varepsilon_o\varepsilon_r S/d = 99\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot4\cdot120\cdot10^{-4}/0{,}2\cdot10^{-3} = 2{,}1\cdot10^{-7}$ F = 210 nF.

7.14. ----- $C = \varepsilon S/d$, $C_1 = \varepsilon S_1/d_1$. Za $S_1 = S/2$ i $d_1 = 3d \Rightarrow C_1 = (\varepsilon\cdot S/2) / 3d = \varepsilon S/6d = (\varepsilon S/d) / 6 = C/6$.
Kapacitet će se smanjiti za šest puta.

7.15. ----- C nepromenjen; **7.16.** ----- C se poveća za četiri puta.

7.17. ----- $S = 1{,}74\ m^2$; **7.18.** ----- d = 1,79 mm; **7.19.** ----- $S = ab = 5{,}65\ m^2 \Rightarrow b = S/a = 112{,}94$ m.

7.20. ----- $S = r^2\pi / 2 = 1{,}57\cdot10^{-2}\ m^2$,
Maksimalni kapacitet se dobije kada su pokretne ploče uvučene potpuno (100%) u nepokretne. Tada je
$C_{max} = \varepsilon_o\varepsilon_r\cdot(n - 1)\cdot S / d = 8{,}854\cdot10^{-12}\cdot12\cdot1{,}57\cdot10^{-2} / 0{,}5\cdot10^{-3} = 3{,}3362\cdot10^{-9}$ F = 3,3362 nF.
Okretanjem pokretnih pločica za 120° aktivna površina se smanji na trećinu ($S' = S/3$), samim tim i kapacitet se srazmerno smanji. Dakle, $C' = \varepsilon_o\varepsilon_r\cdot(n - 1)\cdot S' / d = C / 3 = 1{,}112$ nC.

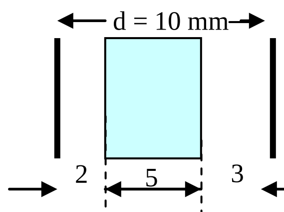
7.21. ----- $E = U/l = (3\,900 + 9\,100) / 5\cdot10^{-3} = 2\,600\cdot10^3$ V/m = 2,6 KV/mm.
$E = U_1/d_1 \Rightarrow d_1 = U/E_1$; $U_1 = V_1 - 0 = 3\,900$ V; $d_1 = 3{,}9\cdot10^3/2{,}6\cdot10^6 = 1{,}5\cdot10^{-3}$ m = 1,5 mm.

7.22. ----- $C_1 = \varepsilon_o\varepsilon_{r1} S/d_1$; $C_2 = \varepsilon_o\varepsilon_{r2}S/d_2$; $C_1/C_2 = \varepsilon_{r1}d_2/\varepsilon_{r2}d_1 = 2\cdot2/6\cdot2 = 1/3 = U_2/U_1 \Rightarrow U_1 = 3U_2$.
Kako je $U_1 + U_2 = U \Rightarrow 3U_2 + U_2 = 10$ KV $\Rightarrow U_2 = 2{,}5$ KV; $U_1 = 7{,}5$ KV.

7.23. ----- $C_1 = \varepsilon_o\varepsilon_{r1}S/d_1$, $C_2 = \varepsilon_o\varepsilon_{r2}S/d_2$, $C_3 = \varepsilon_o\varepsilon_{r3}S/d_3$;
$C_1/C_2 = U_2/U_1 = \varepsilon_{r1}d_2/\varepsilon_{r2}d_1 = 0{,}5 \Rightarrow U_2 = 0{,}5U_1$; $C_1/C_3 = U_3/U_1 = \varepsilon_{r1}d_3/\varepsilon_{r3}d_1 = 0{,}25 \Rightarrow U_3 = 0{,}25U_1$.
Iz drugog Kir. zakona $U_1 + U_2 + U_3 = U \Rightarrow U_1 + 0{,}5U_1 + 0{,}25U_1 = 5$ KV $\Rightarrow U_1 = 5/1{,}75 = 20/7$ KV;
$U_2 = 10/7$ KV i $U_3 = 5/7$ KV.
Jačine polja su: $E_1 = U_1/d_1 = 10/7$ KV/mm; $E_2 = U_2/d_2 = 10/10{,}5$ KV/mm i $E_3 = U_3/d_3 = 5/7$ KV/mm.
Količina naelektrisanja kod redne veze je ista, pa je: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$. Kako je $E_1 = Q_1/\varepsilon_o\varepsilon_{r1}S_1 \Rightarrow$
$Q_1 = Q = E_1\cdot\varepsilon_o\varepsilon_{r1}S = 2{,}528\cdot10^{-7}$ C.
Ukupni kapacitet kola iznosi: $C = Q/U = 2{,}528\cdot10^{-7}/5\cdot10^3 = 50{,}59\cdot10^{-12}$ F = 50,59 pF.
Čitaocu nije problem da izračuna pojedinačne kapacitete ($C_1 = Q/U_1$; $C_2 = Q/U_2$ i $C_3 = Q/U_3$).

7.24. ----- $C = \varepsilon S/d$; $C_1 = \varepsilon S/d_1$; za $d_1 = 1{,}2d \Rightarrow C_1 = \varepsilon S/1{,}2d = 0{,}833\varepsilon S/d = 0{,}833C$.
Promena kapaciteta iznosi $\Delta C = C_1 - C = 0{,}833C - C = -\,0{,}167C$. Dakle, kapacitet se smanji za 16,7 %.

7.25. -----



Pre ubacivanja treće ploče kapacitet je iznosio: $C = \varepsilon_oS/d = 44{,}27$ pF.
Ubacivanjem treće ploče dužina električnih linija se prepolovi, tj rastojanje između ploča iznosi $d' = 10 - 5 = 5$ mm (u metalnoj ploči nema električnog polja – Faradejev kavez), pa je kapacitet. $C' = \varepsilon_oS/d' = 2C = 88{,}54$ pF.
Zadatak se može rešiti i preko redne veze dvaju kondenzatora, jer provodna ploča pravi kondenzatore: $C_1 = \varepsilon_oS/d_1 = 221{,}35$ pF i $C_2 = \varepsilon_oS/d_2 = 147{,}57$ pF.
$C = C_1\cdot C_2 / (C_1 + C_2) = 88{,}54$ pF.
Električno polje u vazduhu se neće promeniti, jer je $E_o = Q / \varepsilon_oS$, dakle ne zavisi od dužine električnih linija.

7.26. ----- $C = (n - 1)\cdot\varepsilon_o\varepsilon_rS/d = 2{,}17\cdot10^{-9}$ F = 2,17 nF; $E = U/d \Rightarrow U_m = E_m\cdot d = (150\cdot10^3/10^{-2})\cdot3\cdot10^{-3} \Rightarrow$
$U_m = 45\cdot10^3$ V = 45 KV.

7.27. ----- $U_{AB} = 0$; $U_{BC} = E\cdot r_{BC} = (100/10^{-2})\cdot40\cdot10^{-3} = 400$ V; $U_{CA} = -\,U_{AC} = -\,U_{BC} = -\,400$ V;
$U = E\cdot r = 10\,000\cdot(5 + 40 + 5)\cdot10^{-3} = 10\cdot50 = 500$ V.

7.28. ----- Kod koncentričnih kugli, koje su naelektrisane sa Q i – Q naelektrisanjem, napon između površina veće i manje kugle jednak je potencijalu manje kugle (potencijal veće kugle jednak nuli).
Dakle, $U = V' - V'' = V' = Q\cdot(r_2 - r_1) / 4\varepsilon\pi r_1r_2$.
Kako je kapacitet : $C = Q/U \Rightarrow$ $\mathbf{C = 4\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r\,\pi\,r_1\,r_2 / (r_2 - r_1)}$ ... Vidi potencijal koncentričnih kugli.
$C = 4\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot4\cdot3{,}14\cdot20\cdot10^{-2}\cdot30\cdot10^{-2} / (30\cdot10^{-2} - 20\cdot10^{-2}) = 267\cdot10^{-12}$ F = 267 pF.
Konačno, napon je jednak: $U = Q/C = 0{,}6\cdot10^{-6} / 267\cdot10^{-12} = 2\,247{,}2$ V = 2,2472 KV.

7.29. ----- Napon kod koaksijalnog provodnika jednak je $U = (Q / 2\varepsilon\pi l) \ln (r_2/r_1)$. Kako je $C = Q/U \Rightarrow$
$\mathbf{C = 2\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r\,\pi\,l / \ln (r_2 / r_1)}$ $\Rightarrow \ln (r_2/r_1) = 2\varepsilon_o\varepsilon_r\pi l / C = 2\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot3{,}3\cdot3{,}14\cdot10^3 / 0{,}15\cdot10^{-6} = 1{,}223 \Rightarrow$
$r_2/r_1 = 3{,}4 \Rightarrow r_2 = 3{,}4\cdot r_1 = 3{,}4$ mm. Debljina izolacije iznosi $d' = r_2 - r_1 = (3{,}4 - 1)$ mm = 2,4 mm.

[NAPOMENA! Određivanje prirodnog logaritma od nekog broja se direktno računa na kalkulatoru (digitronu). Isti je slučaj kod inverzne radnje, tj. kada se zna logaritam od nekog broja a treba odrediti taj broj (inverzni postupak). Pored digitrona rešenje se može odrediti pomoću logaritamskih tablica.
Pored prirodnog logaritma postoji i dekadski logaritam. Prirodni logaritam ima bazu **e = 2,71828**, dok dekadski bazu 10. Osnovne jednačine su: $\ln_e a = x \Rightarrow a = e^x$; odnosno, $\log_{10} b = y \Rightarrow b = 10^y$.
Postupak računanja dekadskog logaritma je isti kao i prirodnog.
Za naš primer sledi $r_2 / r_1 = e^x \Rightarrow r_2 / r_1 = 2{,}71828^{1{,}223} = 3{,}4$.

7.30. ----- $C = 2\varepsilon\pi l / \ln(2h/r_o) = 2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 10^{3} / \ln(2\cdot 2/10^{-3}) = 111{,}21\cdot 10^{-9}/ \ln 4\,000 \Rightarrow$
$C = 111{,}21\cdot 10^{-9}/ 8{,}294 = 13{,}4\cdot 10^{-9}$ F = 13,4 nF.

7.31. ----- $\mathbf{C = \varepsilon\pi l / \ln[(d - r_o)/r_o]}$; $S = r_o^2\pi \Rightarrow r_o^2 = S/\pi = 16\cdot 10^{-6}/3{,}14 = 5{,}09\cdot 10^{-6}\ m^2 \Rightarrow$
$r_o = 2{,}26\cdot 10^{-3}$ m = 2,26 mm.
$C = 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 10^{3} / \ln[(2 - 2{,}26\cdot 10^{-3})/2{,}26\cdot 10^{-3}] = 27{,}8\cdot 10^{-9} / \ln 883{,}96 = 27{,}8\cdot 10^{-9}/6{,}784 \Rightarrow$
$C = 4{,}096\cdot 10^{-9}$ F = 4,096 nF.

7.32. ----- Za $d >> r_o \Rightarrow \mathbf{C = \varepsilon\pi l / \ln(d/r_o)}$; $C_1 = \varepsilon\pi l_1 / \ln(d'/r_o)$; $C_2 = \varepsilon\pi l_2 / \ln(d''/r_o)$.
Kako je $C_1 = C_2 \Rightarrow \varepsilon\pi l_1 / \ln(d'/r_o) = \varepsilon\pi l_2 / \ln(d''/r_o) \Rightarrow l_1 / \ln(d'/r_o) = l_2 / \ln(d''/r_o) \Rightarrow$
$100 \ln(d'/r_o) = 300 \ln(d''/r_o) \Rightarrow \ln(d'/r_o) = 3 \ln(d''/r_o) \Rightarrow \ln(d'/r_o) = \ln(d''/r_o)^3 \Rightarrow d'/r_o = (d''/r_o)^3 \Rightarrow$
$d'/d''^3 = r_o/r_o^3 \Rightarrow \mathbf{d'/d''^3 = 1/r_o^2}$.

7.33. ----- $C = \varepsilon S/d = \varepsilon\cdot a\cdot b/d$; $C_1 = \varepsilon\cdot[(a/k)\cdot(b/k)]/(d/k) = \varepsilon\cdot a\cdot b/k\cdot d = C/k$.
Kapacitet se smanjio za **k** puta , gde je k broj koji govori za koliko su se puta povećale sve tri dimenzije.

7.34. ----- $\mathbf{C = 2\varepsilon\pi l / \ln(2h/r_o)}$; $S = r_o^2\pi \Rightarrow r_o^2 = S/\pi \Rightarrow r_o = 1{,}785$ mm.
$C = 2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ 3{,}14\cdot 10\cdot 10^{3} / \ln(2\cdot 4/1{,}785\cdot 10^{-3}) = 556{,}03\cdot 10^{-9} / \ln 4\,482 = 556{,}03\cdot 10^{-9}/8{,}41 \Rightarrow$
$C = 66{,}12\cdot 10^{-9}$ F = 66,12 nF.

7.35. ----- r = 2r / 2 = 1,25 mm ; $C = 2\varepsilon\pi l / \ln(2h/r_o) \Rightarrow l = C\cdot\ln(2h/r_o)/2\varepsilon\pi \Rightarrow$
$l = 43\cdot 10^{-9}\cdot\ln(2\cdot 6{,}5/1{,}25\cdot 10^{-3}) / 2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14 = 43\cdot 10^{-9}\cdot\ln 10\,400 / 6{,}28\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12} \Rightarrow$
$l = 43\cdot 10^{3}\cdot 9{,}25 / 6{,}28\cdot 8{,}854 = 7{,}153\cdot 10^{3}$ m = 7,153 km.

7.36. ----- Kapacitivnost smotanog kondenzatora je približno dva puta veća od razvijenog. To je zbog toga što prilikom namotavanja aluminijskih traka u rolnu obe trake se moraju izolovati (sa dve papirne trake), kako bi se izbegla međusobna kratka veza. Usled toga, traka A i traka B čine jedan kondenzator, a istovremeno traka B čini sa trakom A drugi kondenzator. Na ovaj način je aktivna površina kondenzatora duplo veća (paralelna veza dvaju kondenzatora).
Dakle, kapacitet namotane rolne iznosi: $C = 2\cdot\varepsilon_o\varepsilon_r S/d \Rightarrow S = C\cdot d / 2\cdot\varepsilon_o\cdot\varepsilon_r = 10\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}05\cdot 10^{-3} / 2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot\pi$
$S = 0{,}0081\ m^2 \Rightarrow S = a\cdot l \Rightarrow l = S/a = 0{,}0081/3\cdot 10^{-2} = 0{,}27$ m = 27 cm.

7.37. ----- Ubacivanjem provodne ploče u kondenzator rastojanje između ploča se smanji na dužinu:
$d' = d - d_p \Rightarrow C' = \varepsilon S/d' = \varepsilon S/(d - d/3) = \varepsilon S/(3d - d)/3 = 3\varepsilon S/2d = (3/2)\cdot\varepsilon S/d = 1{,}5\cdot C$.
Unošenjem metalne ploče kapacitet se poveća za 50% (1,5 puta). Jačina električnog polja je ostala ista.(vidi zadatak 7.25).

7.38. ----- a) $C_e = C_4 + (C_1 + C_2 + C_3)\cdot C_5 / (C_1 + C_2 + C_3 + C_5) = 58{,}1\ \mu F$;
b) $Q_5 = Q_{1235} = U\cdot C_{1235} = 3{,}048\cdot 10^{-3}$ C; $U_5 = Q_{1235}/C_5 = 3{,}048\cdot 10^{-3}/50 = 60{,}96$ V.

7.39. ----- $1/C = 1/C_1 + 1/C_{23} + 1/C_4 \Rightarrow 1/C_1 = 1/1{,}92 - 1/10 - 1/8 = 568/1\,920 \Rightarrow C_1 = 3{,}38\ \mu F$.

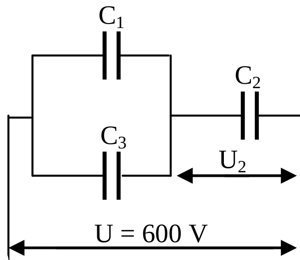
7.40. ----- $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3$; $Q = Q_1 = U_1C_1 = 150\cdot 3\cdot 10^{-9} = 450\cdot 10^{-9}$ C = 450 nC;
$C = Q/U \Rightarrow 1/C = U/Q = 340/450\cdot 10^{-9} = 34\cdot 10^{9}/45 \Rightarrow$
$34\cdot 10^{9}/45 = 1/3\cdot 10^{-9} + 1/5\cdot 10^{-9} + 1/C_3 \Rightarrow 1/C_3 = (34/45 - 1/3 - 1/5)\cdot 10^{9} = 10^{9}\cdot(34 - 15 - 9)/45 \Rightarrow$
$1/C_3 = 10\cdot 10^{9}/45 \Rightarrow C_3 = 45/10\cdot 10^{-9} = 4{,}5\cdot 10^{-9}$ F = 4,5 nF.

7.41. ----- $U_1 = (3/4)U_2 = 0{,}75U_2$. Kako je $U_1 + U_2 = U \Rightarrow 0{,}75U_2 + U_2 = 140 \Rightarrow U_2 = 80$ V; $U_1 = 60$ V.
Kapaciteti iznose: $C_1 = Q/U_1 = 40\cdot 10^{-6}$ F = 40 μF; $C_2 = Q/U_2 = 30\cdot 10^{-6}$ F = 30 μF.

7.42. ----- $U_1 = Q_1/C_1 = 150$ V; $U_2 = U_3 = U - U_1 = 50$ V; $Q_2 = U_2\cdot C_2 = 400\cdot 10^{-6}$ C = 400 μC.
$Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow Q_3 = 200\cdot 10^{-6}$ C = 200 μC; $C_3 = Q_3/U_3 = 4\cdot 10^{-6}$ F = 4 μF.

7.43. ----- Kondenzatori moraju biti u rednoj vezi.
$C_2 = C_1 \cdot C_3 / (C_1 + C_3) = 450 \cdot C_1 / (450 + C_1) = 90 \Rightarrow C_1 = 112{,}5$ pF.

7.44. -----



$U_1 = U_3 = U_{13} = U - U_2 = 240$ V.
$Q = Q_2 = U_2 C_2 = 360 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 2\,160 \cdot 10^{-6}$ C = 2 160 μC.
$Q_1 = U_1 C_1 = 240 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 720 \cdot 10^{-6}$ C = 720 μC.
$Q = Q_1 + Q_3 \Rightarrow Q_3 = Q - Q_1 = 1\,440 \cdot 10^{-6}$ C = 1 440 μC.
$C_3 = Q_3/U_3 = 1\,440 \cdot 10^{-6} / 240 = 6 \cdot 10^{-6}$ F = 6 μF.

7.45. ----- $S = 4{,}52 \cdot 10^{-2}\ m^2 = 452\ cm^2$.

7.46. ----- C = 2,1 μF; U_1 = 140 V; U_2 = 60 V. Napon U_1 je veći od 100 V, te se zbog toga ova veza ne sme priključiti na napon od 200 V, kako ne bi došlo do proboja prvog kondenzatora, a nakon toga i drugog.

7.47. ----- Kondenzatori mogu da se vežu pojedinačno. U tom slučaju imamo dve mogućnosti, tj. kapacitet od 3 μF ili od 2 μF.
Redna veza:
a) C_1 i $C_2 \Rightarrow C_{12}$ = 1,2 μF; b) C_2 i $C_3 \Rightarrow C_{23}$ = 1 μF i c) C_1, C_2 i $C_3 \Rightarrow C_{123}$ = 0,75 μF.
Paralelna veza:
a) C_1 i $C_2 \Rightarrow C_{12}$ = 5 μF; b) C_2 i $C_3 \Rightarrow C_{23}$ = 4 μF i c) C_1, C_2 i $C_3 \Rightarrow C_{123}$ = 7 μF.
Mešovita veza: C_1 i C_2 u rednoj vezi i njima paralelno $C_3 \Rightarrow C_e$ = 3,2 μF.
Čitaocu se preporučuje da po vlastitom izboru odabere još neku kombinaciju u mešovitoj vezi. Za sve ove kombinacije čitalac će veoma lako nacrtati odgovarajuću šemu.

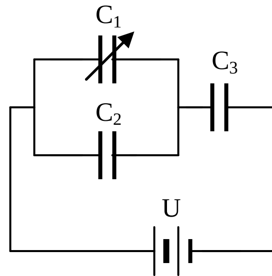
7.48. ----- C_3 = 20/11 [μF].

7.49. ----- a) $C_e = 2C \cdot C / (2C + C) = 2C/3$; b) $C_e = 2C \cdot 2C / (2C + 2C) = C$;
c) Za sve zatvorene prekidače $\Rightarrow C_e = 3C \cdot 3C / (3C + 3C) = 3C/2$.

7.50. ----- $C_1 : C_4 = U_4 : U_1 = 1:8 \Rightarrow U_1 = 8U_4$; $C_2 : C_4 = U_4 : U_2 = 2:8 \Rightarrow U_2 = 4U_4$
$C_3 : C_4 = U_4 : U_3 = 4:8 \Rightarrow U_3 = 2U_4$
Kako je $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = U \Rightarrow 8U_4 + 4U_4 + 2U_4 + U_4 = U \Rightarrow 15U_4 = 1\,500 \Rightarrow U_4 = 100$ V $\Rightarrow$
U_1 = 800 V; U_2 = 400 V; U_3 = 200 V.
Kapaciteti kondenzatora iznose:
$C_1 = Q/U_1$ = 15 nF; $C_2 = Q/U_2$ = 30 nF; $C_3 = Q/U_3$ = 60 nF i $C_4 = Q/U_4$ = 120 nF.

7.51. ----- $C_1 : C_2 : C_3 = 10 : 20 : 40 = U_3 : U_2 : U_1 \Rightarrow$
$U_3 : U_1 = 10 : 40 \Rightarrow U_1 = 4U_3$; $U_2 : U_1 = 2 : 4 \Rightarrow U_1 = 2U_2$.
Iz navedenih relacija vidimo da je napon U_1 najveći, a to znači da će kondenzator kapaciteta C_1 biti u najvećoj opasnosti (ako dođe do proboja prvo bi on probio). Usled toga na njemu je dozvoljen maksimalni napon od $U_1 = U_d$ = 1 000 V. U tom slučaju ostali naponi imaju sledeće vrednosti: U_2 = 500 V i U_3 = 250 V.
Ukupni napon na koji se sme priključiti ova veza iznosi:
$U = U_1 + U_2 + U_3 = 1\,000 + 500 + 250 = 1\,750$ V.

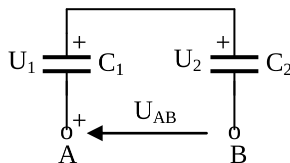
7.52. .....



Povećanjem kapaciteta C_1 povećava se kapacitet paralelne veze (C_{12}), Kako je $C_{12} : C_3 = U_3 : U_{12}$, našpon na paralelnoj vezi (U_{12}) opada. To znači da će pri maksimalnom C_1 napon biti najmanji, odnosno napon na C_3 je najveći, jer je $U_{12} + U_3 = U$. Dakle, u ovom slučaju ($C_1 = C_{max}$): $U_3 = U_d = 300$ V; $U_{12} = U_1 = U_2 = U - U_3 = 180$ V.
Obrnuto, smanjivanjem C_1, smanjuje se C_{12}, a to dovodi do porasta U_{12}.
Za $C_1 = C_{min} \Rightarrow U_{12} = U_1 = U_2 = U_d = 300$ V; $U_3 = U - U_{12} = 180$ V.

Za ($C_1 = C_{max}$): $U_3 = 300$ V; $U_1 = U_2 = 180$ V $\Rightarrow Q_{12} = Q = Q_3 = U_3C_3 = 72$ nC; $Q_2 = U_2C_2 = 14{,}4$ nC $\Rightarrow$ $Q_1 = Q - Q_2 = 57{,}6$ nC. Iz $Q_1 = U_1C_1 \Rightarrow C_1 = C_{max} = Q_1/U_1 = 320$ pC.
Za ($C_1 = C_{min}$): $U_1' = U_2' = 300$ V; $U_3' = 180$ V $\Rightarrow Q_2' = U_2'C_2 = 24$ nC; $Q' = Q_3' = U_3'C_3 = 43{,}2$ nC $\Rightarrow$ $Q_1' = Q' - Q_2' = 19{,}2$ nC. Kapacitet C_1 iznosi: $C_1' = C_{min} = Q_1'/U_1' = 19{,}2 \cdot 10^{-9} / 300 = 64$ pF.
Kondenzator C_1 se sme menjati u opsegu od 64 pF do 320 pF, tj: **$64\ \text{pF} \le C_1 \le 320\ \text{pF}$.**

4.53. ----- **Kada je S otvoreno:**



$Q_1 = Q_2 = U \cdot C_{12} = U \cdot C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2) = 60$ nC.
$U_1 = Q_1/C_1 = 100$ V; $U_2 = Q_2/C_2 = 300$ V.
$U_{AB} + U_1 - U_3 = 0 \Rightarrow U_3 = U_{AB} + U_1 = 300$ V.
$U_3 + U_4 = U \Rightarrow U_4 = U - U_3$ 0 100 V.
$Q_4 = Q_3 = U_3C_3 = 180$ nC; $C_4 = Q_4/U_4 = 1\,800$ pF $= 1{,}8$ nF.

Kada je S zatvoreno: $C_{13} = C_1 + C_3 = 1\,200$ pF; $C_{24} = C_2 + C_4 = 2\,000$ pF.
$C_e' = C_{13} \cdot C_{24} / (C_{13} + C_{24}) = 750$ pF.
Ukupna količina naelektrisanja jednaka je $Q' = U \cdot C_e' = 400 \cdot 750 \cdot 10^{-12} = 300 \cdot 10^{-9}$ C = 300 nC.
$U_{13}' = Q'/C_{13} = 300 \cdot 10^{-9} / 1\,200 \cdot 10^{-12} = 250$ V.

7.54. ----- **S_1 zatvoreno; S_2 otvoreno :**
$C_1 : C_2 = U_2 : U_1 = 40 : 60 \Rightarrow U_2/U_1 = 4/6 \Rightarrow U_1 = 1{,}5U_2$;
$U_1 + U_2 = U \Rightarrow 1{,}5U_2 + U_2 = 1\,000 \Rightarrow U_2 = 400$ V, $U_1 = 600$ V.
S_1 otvoreno; S_2 zatvoreno :
$Q'_2 = U_2C_2 = 24$ nC. Kako su C_2 i C_3 sada jedini u vezi (paralelna veza) ukupna količina naelektrisanja se se rasporedi na Q_2' i Q_3'. Pošto je $C_2 = C_3 \Rightarrow Q_2' = Q_3' = Q'_2/2 = 12$ nC.
Naponi su jednaki: $U_2' = U_3' = Q_2'/C_2 = 12 \cdot 10^{-9} / 60 \cdot 10^{-12} = 200$ V.

7.55. ----- $U_1 : U_2 = C_2 : C_1 = 1 : 2 \Rightarrow U_2 = 2U_1$. **7.56.** ----- $Q_1 : Q_2 = C_1 : C_2 = 2 \Rightarrow Q_1 = 2Q_2$.

7.57. ----- Kolo nije zatvoreno (C_2 je neopterećen), pa je $Q_2 = 0 \Rightarrow U_2 = 0$.

7.58. ----- C_1 i C_2 čine paralelnu vezu, pa je $U_1' = U_2'$. Ukupna količina naelektrisanja se raspodeli na pojedinačne, tj. na Q_1' i Q_2'. Pošto su kapaciteti međusobno jednaki ($C_1 = C_2$) i količine naelektrisanja na njima će biti jednake (jer je $U_1' = U_2'$). Dakle, $Q_1' = Q_2' = Q/2 \Rightarrow U_1' = U_2' = Q_1'/C_1 = Q/2C_1 = U_1/2$.
Napon na kondenzatoru C_1 nakon uključivanja sklopke S opadne na polovinu svoje vrednosti (za dva puta).

7.59. ----- Pre zatvaranja sklopke **S** naponi U_1 je bio jednak ukupnom naponu (nema pada napona na otporniku R – nema struje u kolu). Nakon zatvaranja sklopke S, grana sa kondenzatorom C_1 je i dalje u istom režimu rada (isti napon mreže U). Takođe i na kondenzatoru C_2 vlada napon U. Dakle: $U = U_1$, pre uključenja S, a posle uključenja sklopke S: $U = U_1 = U_2$. Napon **U_1 je ostao nepromenjen**.

7.60. ---- Pre uključenja sklopke S: $Q = Q_1 = = U \cdot C_1$; a nakon uključenja S: $Q' = U \cdot (C_1 + C_2) = 2UC_1 = 2Q$.
Ukupna količina naelektrisanja se povećala za dva puta.

7.61. ---- Pošto su kondenzatori u rednoj vezi ista im je količina naelektrisanja, pa je: $Q_1 : Q_2 = 1$ ($Q_1 = Q_2$).

7.62. ----- Pre zatvaranja sklopke: $Q_1 = U_1 \cdot C = 120 \cdot C$; $Q_2 = U_2 \cdot C = 40 \cdot C$.
Zatvaranjem sklopke, kondenzatori su u paralelnoj vezi. Ukupna količina naelektrisanja sada iznosi:
$Q' = Q_1 + Q_2 = 160 \cdot C$.
Ukupni napon je: $U_1' = U_2' = Q'/C_e = Q'/2C_1 = 160 \cdot C/2 \cdot C = 80$ V.

7.63. ----- Pre zatvaranja sklopke S količina naelektrisanja je iznosila: $Q = Q_1$. Nakon zatvaranja sklopke S C_1 i C_2 su u paralelnoj vezi (isti su im naponi), pa će se ukupna količina naelektrisanja Q rasporediti na oba kondenzatora, i to: $Q_1' = Q_2' = Q/2$ (jer je $C_1 = C_2$). Dakle, opterećenje kondenzatora kapaciteta C_1, nakon zatvaranja sklopke S, se smanji za dva puta (50%).

7.64. ----- $Q = UC_e \Rightarrow$ Kod paralelne veze: $Q_p = U \cdot (C_1 + C_2)$, dok je kod redne: $Q_r = U \cdot C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$.
$Q_p : Q_r = U \cdot (C_1 + C_2) : U \cdot C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 4{,}5 \Rightarrow C_1 + C_2 = 4{,}5 \cdot C_1 C_2 / (C_1 + C_2) \Rightarrow$
$(C_1 + C_2)^2 = 4{,}5 C_1 C_2 \Rightarrow (5 + C_2)^2 = 4{,}5 \cdot 5 \cdot C_2 \Rightarrow C_2^2 + 10C_2 + 25 - 22{,}5C_2 = 0 \Rightarrow C_2^2 - 12{,}5C_2 + 25 = 0$.
Rešenjem kvadratne jednačine: $C_2^2 - 12{,}5C_2 + 25 = 0 \Rightarrow \mathbf{C_{2(1/2)} = \dfrac{12{,}5 \pm \sqrt{12{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1}} \Rightarrow$

$C_{2\,(1)} = 10\ \mu F$; $C_{2\,(2)} = 2{,}5\ \mu F$.

NAPOMENA! Kvadratna jednačina uvek ima dva rešenja. Ona se rešava pomoću sledeće relacije (mada može i na drugi način): $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0} \Rightarrow \mathbf{x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$ .... rešenja kvadratne jednačine.
Za jedno rešenje umesto znaka $\pm$ uzima se predznak ″+″ a za drugo rešenje predznak ″ – ″ .

7.65. ----- a) $C_1C_2 / (C_1 + C_2) = 5/6\ \mu F$; $C_{34} = C_3C_4 / (C_3 + C_4) = 6/5\ \mu F$.
$C_{1234} = C_{12} + C_{34} = 61/30\ \mu F$; $C_e = C_{1234} \cdot C_5 / (C_{1234} + C_5) = 244/181\ \mu F \cong 1{,}348\ \mu F$.
b) $Q = Q_5 = U \cdot C_e = 269{,}61 \cdot 10^{-6}$ C $= 269{,}61\ \mu C$; $U_5 = Q_5/C_5 = 67{,}403$ V; $U_{1234} = U - U_5 = 132{,}597$ V;
$Q_1 = Q_2 = U_{1234} \cdot C_{12} = 110{,}497 \cdot 10^{-6}$ C $= 110{,}497\ \mu C$; $Q_3 = Q_4 = U_{1234} \cdot C_{34} = 159{,}116 \cdot 10^{-6}$ C $= 159{,}116\ \mu C$;
$U_1 = Q_1/C_1 = 110{,}497$ V; $U_2 = Q_2/C_2 = 22{,}099$ V; $U_3 = Q_3/C_3 = 79{,}558$ V; $U_4 = Q_4/C_4 = 53{,}039$ V;
c) Pošto je $U_1 > 100$ V, doći će do proboja C_1. Nakon njegovog proboja, nastaje novo kolo (omesto C_1 napraviti kratku vezu) čija je ekvivalentna kapacitivnost jednaka C_e'.
$C_{234}' = C_2 + C_{34} = 6{,}2 \cdot 10^{-6}$ F $= 6{,}2\ \mu F$; $C_e' = C_5 \cdot C_{234}' / (C_5 + C_{234}') = 2{,}431\ \mu F$.
Količine naelektrisanja, u ovom trenutku, su jednake:
$Q' = Q_5' = U \cdot C_e' = 486{,}275 \cdot 10^{-6}$ C $= 486{,}275\ \mu C$; $U_5' = Q_5'/C_5 = 121{,}569$ V; $U_{12}' = U_{34}' = U_{1234}' = 78{,}431$ V.
Kako je $U_5' > 100$ V, dolazi do proboja C_5. Nakon proboja C_5, novi ekvivalentni kapacitet veze iznosi:
$C_e'' = C_{234}' = 6{,}2\ \mu F$. Na kondenzatoru C_2 sada će delovati napon izvora, pa je $U_2'' = U = 200$ V.
Količine naelektrisanja su: $Q_{34}'' = Q_3'' = Q_4'' = U \cdot C_{34} = 240 \cdot 10^{-6}$ C $= 240\ \mu C$.
Naponi na C_3 i C_4 su jednaki: $U_3'' = Q_3''/C_3 = 120$ V; odnosno, $U_4'' = Q_4''/C_4 = 80$ V.
Zbog toga što su naponi U_2'' i U_3'' veći od 100 V dolazi do istovremenog proboja oba ova kondenzatora.
Na kraju je ostao samo kondenzator kapaciteta C_4 na kojem će sada vladati napon od $U_4''' = U = 200$ V, što će proizvesti i njegovo probijanje.

7.66. ----- a) $C_e = 1{,}5\ \mu F$;
b) $C_{1234} : C_5 = U_5 : U_{1234} = 2 : 6 \Rightarrow U_{1234} = 3U_5$.
Napon na kondenzatoru C_4 je ujedno napon na ekvivalentnoj vezi C_1, C_2, C_3 i C_4, tj. $U_4 = U_{1234}$. Ovaj napon je jednak: $U_4 = U_1 + U_2 + U_3 = 3U_5$. Iz ovog izraza vidi se da je napon U_4 najveći, a samim tim kondenzator sa kapacitetom C_4 je u najvećoj opasnosti po pitanju njegovog proboja. Usled toga, za U_4 se uzima maksimalno dozvoljeni napon, te je: $U_4 = U_d = 10$ V. Pošto je $U_4 = 3U_5 \Rightarrow U_5 = U_4/3 = 10/3$ V.
Ukupni napon na koji se sme priključiti data veza je :
$U = U_{1234} + U_5 = 10 + 10/3 = 40/3$ V.

7.67. ----- a) $C_1C_2 / (C_1 + C_2) = 6{,}16\ \mu F$; $C_1 + C_2 = 25\ \mu F \Rightarrow C_1C_2/25 = 6{,}16 \Rightarrow C_1 = 154/C_2$.
Uvrštavanjem C_1 u jednačinu $C_1 + C_2 = 25$ i njenim daljim sređivanjem dobije se kvadratna jednačina:
$C_2^2 - 25C_2 + 154 = 0$. Rešenjem ove kvadratne jednačine (videti zadatak 7.64.) nastaju sledeća dva rešenja:
$C_{2\,(1)} = 14\ \mu F \Rightarrow C_{1(1)} = 25 - C_{2(1)} = 11\ \mu F$.... prvo rešenje, i
$C_{2(2)} = 11\ \mu F \Rightarrow C_{1(2)} = 25 - C_{2(2)} = 14\ \mu F$... drugo rešenje.
Iz oba ova rešenja se vidi da je kapacitet jednog kondenzatora 11 μF, a drugog 14 μF (nije bitno koji je C_1 a koji C_2).

b) – kod redne veze: $Q_1 : Q_2 = 1$, jer je $Q_1 = Q_2 = Q$
– kod paralelne veze ($U_1 = U_2 = U$): $Q_1 = Q_2 = UC_1 : UC_2 = C_1 : C_2 \Rightarrow Q_1 : Q_2 = 11 : 14$.

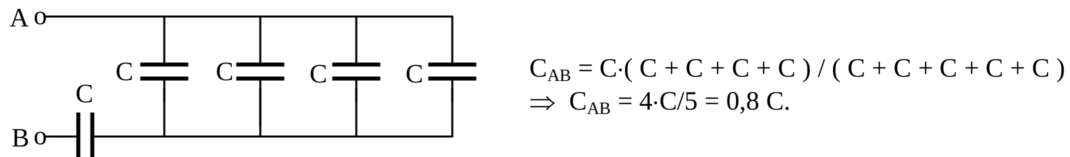
c) – za rednu vezu: $U_1 : U_2 = Q/C_1 : Q/C_2 = C_2 : C_1 \Rightarrow U_1 : U_2 = 14 : 11$;
– za paralelnu vezu ($U_1 = U_2$): $U_1 : U_2 = 1$.

7.68. ----- a) $C_{23} = C_2C_3 / (C_2 + C_3) = 5/6\ \mu F$; $C_{45} = C_4C_5 / (C_4 + C_5) = 6/5\ \mu F$.
$C_{2345} = C_{23} + C_{45} = 61/30\ \mu F$; $C_e = C_1 \cdot C_{2345} / (C_1 + C_{2345}) = 244/181\ \mu F = 1{,}348\ \mu F$.
b) $Q = U \cdot C_e = 269{,}61\ \mu C$; $U_{2345} = Q/C_{2345} = 132{,}295$ V;
$Q_4 = Q_5 = Q_{45} = U_{2345} \cdot C_{45} = 158{,}754\ \mu C$; $U_4 = Q_4/C_4 = 79{,}377$ V.
c) $Q_2 = Q_3 = Q_{23} = U_{2345} \cdot C_{23} = 110{,}246\ \mu C$.
d) $U_1 = Q/C_1 = 67{,}403$ V; $U_2 = Q_2/C_2 = 110{,}246$ V; $U_3 = Q_3/C_3 = 22{,}049$ V;
$U_4 = Q_4/C_4 = 79{,}377$ V; $U_5 = Q_5/C_5 = 52{,}918$ V.

Dolazi do proboja C_2, jer je $U_2 > 100$ V. Ako umesto C_2 načinimo kratku vezu (proboj), ekvivalentni kapacitet nove veze će iznositi: $C_e' = C_1 \cdot (C_3 + C_{45}) / (C_1 + C_3 + C_{45}) = 2{,}431\ \mu F$.
Ukupna količina naelektrisanja u ovom slučaju je: $Q' = U \cdot C_e' = 486{,}275\ \mu F$. Napon na prvom kondenzatoru sada je: $U_1' = Q'/C_1 = 121{,}569$ V. Kako je napon na prvom kondenzatoru veći od 100 V ($U_1' > 100$ V) on će proizvesti proboj kondenzatora kapaciteta C_1 (dok je $U_{345}' = U - U_1' < 100$ V).
Nakon proboja i C_1 (predhodno je probio C_2), ekvivalentna kapacitivnost iznosi: $C'' = C_3 + C_{45} = 6{,}2\ \mu F$.
U ovom trenutku napon na kondenzatoru kapaciteta C_3 jednak je ukupnom naponu, dakle, $U_3'' = U = 200$ V.
Opterećenja četvrtog i petog kondenzatora su: $Q_4'' = Q_5'' = Q_{45}'' = U \cdot C_{45} = 240\ \mu C$. Naponi na tim kondenzatorima su: $U_4'' = Q_4''/C_4 = 120$ V; odnosno $U_5'' = Q_5''/C_5 = 80$ V.
Zbog napona U_3'' i U_4'' koji su veći od 100 V ($U_3, U_4'' > 100$ V) nakon proboja C_2 i C_1, istovremeno probijaju kondenzatori kapaciteta C_3 i C_4.
Na kraju je ostaje kondenzator C_5, na kojem sada deluje napon, $U_5''' = U = 200$ V, koji će i njega probiti.

7.69. ----- Na otporu R_1 i R_2 nema napona (pada napona), jer u stacionarnom stanju kroz kolo ne teče nikakva količina naelektrisanja (samim tim ni električna struja). Otpore možemo izostaviti i umesto njih načiniti kratku vezu ($U_{R1} = U_{R2} = 0$), a to znači da su C_2 i C_3 paralelno vezani. Na C_2 i C_3 deluje napon izvora, pa je njihova količina naelektrisanja jednaka:
$Q_2 = E \cdot C_2$; $Q_3 = E \cdot C_3$; dok je $Q_1 = 0 \cdot C_1 = 0$.

7.70. -----

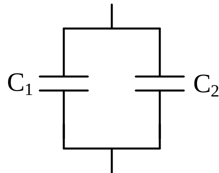


$C_{AB} = C \cdot (C + C + C + C) / (C + C + C + C + C)$
$\Rightarrow C_{AB} = 4 \cdot C/5 = 0{,}8$ C.

7.71. ----- Pre proboja kapacitet je iznosio: $C = (C_1 + C_2) \cdot C_3 / (C_1 + C_2 + C_3) = 1{,}5\ \mu F$.
Količina naelektrisanja na C_3 jednaka je ukupnoj količini naelektrisanja: $Q_3 = Q = U \cdot C = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot U$.
Nakon proboja $C_2 \Rightarrow$ ekvivalentni kapacitet je: $C' = C_1C_3 / (C_1 + C_3) = 0{,}75\ \mu F$.
Količina naelektrisanja na C_3 ujedno i ukupna količina naelektrisanja je: $Q_3' = Q' = U \cdot C' = 0{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot U$.
Kako je $Q_3' / Q_3 = 0{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot U / 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot U = ½ \Rightarrow Q_3' = Q_3/2$
Promena količine naelektrisanja je: $\Delta Q = Q_3' - Q_3 = Q_3/2 - Q_3 = -Q_3/2 = -0{,}5\ Q_3$.
Dakle, količina naelektrisanja Q_3 opadne za dva puta (50 %).

7.72. ----- $C_1 : C_2 = 2 = U_2 : U_1 \Rightarrow U_2 = 2U_1 \Rightarrow U_1 = U_2/2$.
Kako je napon U_2 veći od napona U_1, kritičan je kondenzator sa kapacitetom C_2. Zbog toga se za U_2 uzima maksimalno dozvoljena vrednost, tj $U_2 = U_d = 100$ V. Sledi, $U_1 = U_2/2 = 50$ V.
Ukupni napon na ovoj rednoj vezi maksimalno može da iznosi: $U_m = U_1 + U_2 = 150$ V.

7.73. ----- Kada je prekidač u položaju 1, sledi:
$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 \Rightarrow C = 1\mu F$; $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q = U \cdot C_e = 5 \cdot 10^{-3}$ C = 5 mC.
Naponi na kondenzatorima su: $U_1 = Q_1/C_1 = 2{,}5$ KV; $U_2 = Q_2/C_2 = 5/3$ KV; $U_3 = Q_3/C_3 = 5/6$ KV.
Prebacivanjem prekidača u položaj 2, sledi:
C_1 i C_2 su u paralelnoj vezi, dok je C_3ostao samostalan (svi kondenzatori su isključeni od napona U).
Kondenzator sa kapacitetom C_3 je zadržao svoju količinu naelektrisanja, tj. $Q_3' = Q_3 = 5$ mC.



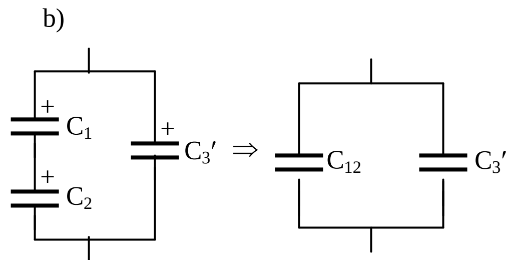
Kondenzatori C_1 i C_2 čine rezultantno polje koje iznosi:
$Q_{12}' = Q_1 - Q_2 = 0$, jer su Q_1 i Q_2 istog inteziteta ali suprotnih predznaka.
Naponi na C_1 i C_2 su: $U_1' = U_2' = 0$ V.

Prebacivanjem prekidača iz položaja 1 u položaj 2 , nastaju sledeće promene napona:
$\Delta U_1 = U_1' - U_1 = 0 - 2{,}5 = - 2{,}5$ KV (napon opao na nulu);
$\Delta U_2 = U_2' - U_2 = 0 - 5/3 = - 5/3$ KV (napon opao na nulu);
$\Delta U_3 = U_3' - U_3 = 0$, jer na ovom kondenzatoru nema promene napona (ostala je ista količina naelektrisanja).
Promene naelektrisanja su: $\Delta Q_1 = Q_1' - Q_1 = 5$ mC; $\Delta Q = Q_2' - Q_2 = 5$ mC i $\Delta Q_3 = Q_3' - Q_3 = 0$.

7.74. ----- a) $C_2 : C_3 = 3 : 2 = U_3 : U_2 \Rightarrow U_3 = 1{,}5U_2 \Rightarrow U_2 = U_3/1{,}5 = 1\,200/1{,}5 = 800$ V.
$U_1 = U_{BA} = V_B - V_A = = 2\,000$ V = 2 KV. Tačka B je na najvećem potencijalu, pa je: $U_2 = U_{BC} = V_B - V_C \Rightarrow$
$U_2 = 800$ V $\Rightarrow V_B - 800 = V_C \Rightarrow V_C = 1\,200$ V. ($U = U_1 = U_2 + U_3 \Rightarrow 800 + 1\,200 = 2\,000$ V).
b) Količine naelektrisanja su: $Q_1 = U_1C_1 = 20\ \mu C$; $Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_3 = Q - Q_1 = 24\ \mu C$.
Kapaciteti kondenzatora iznose: $C_2 = Q_2/U_2 = 30$ nF; $C_3 = Q_3/U_3 = 20$ nF;

7.75. ----- a) $Q_1 = Q_2 = U \cdot C_{12} = U \cdot C_1C_2 / (C_1 + C_2) = 60 \cdot 10^{-12}$ C = 60 pC; $Q_3 = UC_3 = 60 \cdot 10^{-12}$ C = 60 pC.
$U_1 = Q_1/C_1 = 10$ V; $U_2 = Q_2/C_2 = 20$ V; $U_3 = U = 30$ V.

b)



$C_{12} = C_1C_2 / (C_1 + C_2) = 2 \cdot 10^{-12}$ F = 2 pF;
$C_3' = \varepsilon S / d' = \varepsilon S / 2d = C_3/2 = 1 \cdot 10^{-12}$ F = 1 pF.
Kako su C_{12} i C_3' u paralelnoj vezi ($U_{12} = U_3'$), sledi da je ukupna količina naelektrisanja jednaka:
$Q' = Q_{12} + Q_3 = 120$ pC. Ova količina naelektrisanja se rasporedi na C_{12} i C_3' u sledećoj razmeri:
$Q_{12}' : Q_3' = C_{12} : C_3' = 2 \Rightarrow Q_{12}' = 2Q_3'$

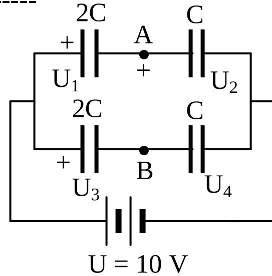
Ukupna količina naelektrisanja iznosi: $Q' = Q_{12}' + Q_3' = 120$ pF $\Rightarrow 2Q_3' + Q_3' = 120 \Rightarrow$
$Q_3' = 40$ pF, odnosno $Q_1' = Q_2' = Q_{12}' = 80$ pF.
Pojedinačni naponi na kondenzatorima sada iznose:
$U_1' = Q_1'/C_1 = 40/3$ V; $U_2' = Q_2'/C_2 = 80/3$ V; $U_3' = Q_3'/C_3' = 40$ V.

7.76. ----- $C' \cdot 24 / (C' + 24) = 6 \Rightarrow 24C' = 6C' + 6 \cdot 24 \Rightarrow C' = 8$ nF.
Kod redne veze kondenzatora istih kapaciteta, sledi: $1/C' = 1/C + 1/C + ... + 1/C = (1 + 1 + ... + 1) / C \Rightarrow$
$C' = C / (1 + 1 + ... + 1) = C/n$; gde je **n** broj kondenzatora u rednoj vezi.
Dakle, $C' = C/n \Rightarrow n = C/C' = 32/8 = 4$ kondenzatora.

7.77. ----- $C_R = C/3$; $C_p = 3C$; $C_R/C_P = (C/3) / 3C = 1/9$.

7.78. ----- $1/C_R = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 = 1/1 = 1$; $C_P = C_1 + C_2 + C_3 = 11$;
$1/C_2 + 1/C_3 = 1 - 1/2 = ½$; $C_2 + C_3 = 11 - 2 = 9$;
$(C_2 + C_3) / C_2C_3 = 1/2 \Rightarrow C_2C_3 = 2\cdot(C_2 + C_3) \Rightarrow C_2C_3 = 2\cdot 9 = 18 \Rightarrow C_2 = 18/C_3 \Rightarrow$
$18/C_3 + C_3 = 9 \Rightarrow C_3^2 - 9C_3 + 18 = 0$.
Rešenjem kvadratne jednačine dobiju se dva rešenja, i to: prvo $C_{3(1)} = 6\ \mu F$ i drugo $C_{3(2)} = 3\ \mu F$.
Na osnovu dobijenih rešenja sledi rešenje drugog kondenzatora $C_2 = 9 - C_3$, pa tako nastaju dva rešenja:
$C_{2(1)} = 9 - 6 = 3\ \mu F$, odnosno $C_{2(2)} = 9 - 3 = 6\ \mu F$.
Dakle, jedan kondenzator ima kapacitet od 6 μF, a drugi od 3 μF, i obrnuto (nije bitno koji je prvi a koji drugi kondenzator).

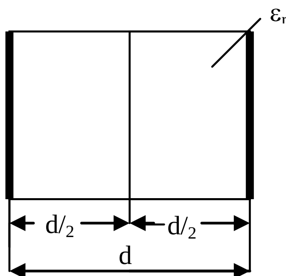
7.79. -----



$U_1 : U_2 = C : 2C \Rightarrow U_2 = 2U_1$; $U_4 : U_3 = 3C : C \Rightarrow U_4 = 3U_3$.
$U_1 + U_2 = U \Rightarrow U_1 + 2U_1 = 10\ V \Rightarrow U_1 = 10/3\ V$, odnosno
$U_4 + U_3 = U \Rightarrow 3U_3 + U_3 = 10\ V \Rightarrow U_3 = 2{,}5\ V$.
$U_{AB} + U_1 - U_3 = 0$ ... (Prvi kirhofov zakon).
$U_{AB} = U_3 - U_1 = 2{,}5 - 10/3 = -25/30\ V \Rightarrow U_{BA} = 25/30\ V$.

7.80. ----- $C_e = 11/5\ C$.

7.81. ----- Pre ubacivanja dielektrika kapacitet i jačina polja su iznosili: $C_o = \varepsilon_o S/d$; $E_o = Q/\varepsilon_o S = U/d$.
Nakon ubacivanja dielektrika, nastaju dva kondenzatora u rednoj vezi (u vazduhu i u dielektriku), čiji kapacitet iznosi: u vazduhu $C_o' = \varepsilon_o S/d_o' = \varepsilon_o S / (d/2) = 2\varepsilon_o S/d = 2C_o$, a u dielektriku $C_d = \varepsilon_o\varepsilon_r S / (d/2) = 2\cdot\varepsilon_r\cdot C_o$.
Ekvivalentni kapacitet je: $C' = C_o'\cdot C_d / (C_o' + C_d) = 2C_o\cdot 2\cdot\varepsilon_r\cdot C_o / (2C_o + 2\cdot\varepsilon_r\cdot C_o) = 4\cdot\varepsilon_r\cdot C_o^2 / 2C_o\cdot(1 + \varepsilon_r) \Rightarrow$
$C' = 2\varepsilon_r C_o / (\varepsilon_r + 1)$.



Količina naelektrisanja pre ubacivanja dielektrika je iznosila:
$Q_o = U\cdot C_o$, a posle unošenja dielektrika: $Q' = U\cdot C'$ ($Q = Q_o' = Q_d$).
Jačina polja u kondenzatoru je:

- pre ubacivanja dielektrika : $E_o = Q/\varepsilon_o S$,
- posle unošenja dielektrika (u vazdušnom delu): $E_o' = Q_o'/\varepsilon_o S$.

Kako je $E_o' : E_o = Q_o' : Q = U\cdot C' : U\cdot C_o = C' : C_o = 2\varepsilon_r C_o / (\varepsilon_r + 1) : C_o \Rightarrow$
$E_o' : E_o = 2\cdot\varepsilon_r : (\varepsilon_r + 1) = 1{,}5 \Rightarrow 2\varepsilon_r = 1{,}5\varepsilon_r + 1{,}5 \Rightarrow \varepsilon_r = 3$.

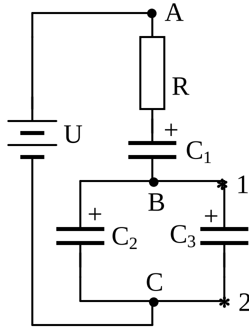
7.82. ----- Količina naelektrisanja na pločama kondenzatora je: $Q_o = U\cdot C_o = 10^{-2}\ C$, i ona će ostati ista i kada se izvor odstrani. Unošenjem dielektrika u kondenzator nastaju dva kondenzatora, i to:
– kondenzator sa vazdušnim dielektrikom: $C_1 = \varepsilon_o S_o/d = (1/2)\cdot\varepsilon_o S/d = C_o/2 = 50\ \mu F$ ($S_o = S/2$), i
– kondenzator sa materijalnim dielektrikom: $C_2 = \varepsilon_o\varepsilon_r\cdot S_o/d = \varepsilon_r\cdot C_1 = 200\ \mu F$.
Ovi kondenzatori su u paralelnoj vezi (ista razlika potencijala), pa je ukupni kapacitet jednak:
$C' = C_1 + C_2 = 250\ \mu F$.
Napon na pločama kondenzatora je: $U' = Q/C' = Q_o/C' = 10^{-2}/250\cdot 10^{-6} = 40\ V$.

7.83. ----- P u pol. 1:
$Q_1 = U\cdot C_1 = 3\cdot 10^3\cdot 5\cdot 10^{-6} = 15\cdot 10^{-3}\ C = 15\ mC$.
a) Prebacivanjem prekidača iz položaja 1 u položaj 2 količina naelektrisanja Q_1 će se rasporediti na C_1 i C_2 (koji su u paralelnoj vezi), u sledećoj razmeri: $Q_1' : Q_2' = U'C_1 : U'C_2 = C_1 : C_2 = 5 : 10 \Rightarrow Q_2' = 2Q_1'$.
Pošto je $Q = Q_1' + Q_2' \Rightarrow Q_1' + 2Q_1' = 15\ mC \Rightarrow Q_1' = 5\ mC$; $Q_2' = 10\ mC$.

b) Vraćanjem prekidača ponovo u položaj 1, na kondenzatoru kapaciteta C_1 ostaje ista količina opterećenja: $Q_1'' = Q_1 = 15$ mC ($Q_1'' = U \cdot C_1$), koju uspostavlja napon na tom kondenzatoru (napon izvora).

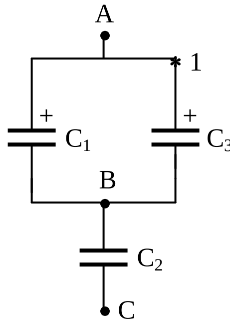
Ponovnim prebacivanjem prekidača u položaj 2, kondenzatori su u paralelnoj vezi i imaju ukupnu količinu naelektrisanja koja je jednaka zbiru količina naelektrisanja koja se nalaze na pojedinačnim kondenzatorima, tj: $Q_\Sigma'' = Q_1'' + Q_2' = 15 + 10 = 25$ mC. Ova ukupna količina naelektrisanja će se rasporediti na kondenzatore C_1 i C_2 uz sledeću razmeru: $Q_1''' : Q_2''' = C_1 : C_2 = 5 : 10 \Rightarrow Q_2''' = 2Q_1''' \Rightarrow Q_1''' + 2Q_1''' = 25$ mC $\Rightarrow$ Q_1''' 25/3 mC; $Q_2''' = 50/3$ mC.

7.84. -----



Kada je kolo zatvoreno, ekvivalentni kapacitet iznosi:
$C_e = (C_2 + C_3) \cdot C_1 / (C_2 + C_3 + C_1) = 11 \cdot 5 / (11 + 5) = 3{,}4375\ \mu F$.
Pri stacionarnom stanju nema struje u kolu (otporniku), odnosno količine naelektrisanja su u stanju mirovanja (statična). Kako na otporniku nema napona ($U_R = IR = 0$), umesto njega možemo nacrtati kratku vezu (npr. osigurač).
Ukupna količina naelektrisanja je : $Q = Q_1 = U \cdot C_e = 1{,}03125$ mC.
Napon na paralelnoj vezi C_2 i C_3 je $U_{23} = Q / C_{23} = 1{,}03125 \cdot 10^{-3} / 11 \cdot 10^{-6}$
$\Rightarrow U_{23} = 93{,}75$ V $\Rightarrow Q_2 = U_{23} \cdot C_2 = 281{,}25\ \mu C$; $Q_3 = U_{23} \cdot C_3 = 750\ \mu C$.

Isključenjem prekidača i prebacivanjem C_3 na tačke A i B, nastaje sledeća slika:



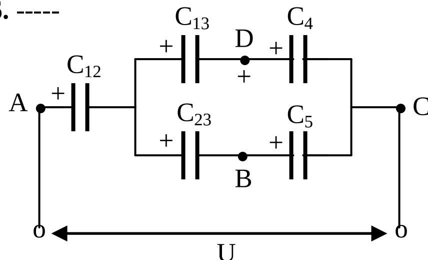
C_1 i C_3 su u paralelnoj vezi, pa je ukupna količina naelektrisanja sada na njima: $Q_{13}' = Q_1 + Q_3 = 1\,781{,}25\ \mu C$. Ova količina naelektrisanja će se rasporediti na C_2 i C_3 u u sledećoj proporciji: $Q_1' : Q_3' = C_1 : C_3 = 5/8 \Rightarrow$ $Q_1' = 0{,}625 Q_3'$. Pošto je $Q_{13}' = Q_1' + Q_3' \Rightarrow 0{,}625Q_3' + Q_3' = 1\,781{,}25\ \mu C$ $\Rightarrow Q_3' = 1\,096{,}15\ \mu C$; $Q_1' = 685{,}1\ \mu C$.

Naelektrisanje na drugom kondenzatoru (C_2) je ostalo nepromenjeno, tj: $Q_2' = Q_2 = 281{,}25\ \mu C$.

Naponi iznose: $U_{13}' = U_1' = U_3' = Q_1' \cdot C_1 = 137$ V; $U_2' = U_2 = Q_2/C_2 = 94$ V.
Napon između tačaka A i C je : $U_{AC}' = U_{13}' + U_2' = 231$ V.

7.85. ----- Kada je prekidač bio u položaju a: $Q_1 = Q = U \cdot C_1 = 50$ mC.
Prebacivanjem prekidača iz položaja a u položaj b dolazi do novog kola u kojem je C_1 (kao izvor) paralelno vezan na rednu vezu C_2 i C_3. Ukupna količina naelektrisanja od 50 mC će se rasporediti na kondenzatore C_1 i C_{23} u odnosu : $Q_1' : Q_{23}' = C_1 : C_{23} = 10 : 15 \cdot 30 / (15 + 30) = 1 \Rightarrow Q_1' = Q_{23}'$.
Ukupna količina naelektrisanja pokriva i novu raspodelu, pa je: $Q_1' + Q_{23}' = Q \Rightarrow 2Q_1' = 50$ mC $\Rightarrow$
$Q_1' = 25$ mC; $Q_2' = Q_3' = Q_{23}' = 25$ mC.

7.86. -----



a) Kondenzatore C_1, C_2 i C_3 pretvoriti u zvezdu:
$C_{12} = C_1 + C_2 + C_1C_2/C_3 = 1 + 1 + 1/1 = 3\ \mu F$.
$C_{23} = C_{31} = C_{12} = 3\ \mu F$.
$C_{134} = C_{13} \cdot C_4 / (C_{13} + C_4) = 1{,}2\ \mu F$;
$C_{235} = C_{23} \cdot C_5 / (C_{23} + C_5) = 12/7\ \mu F$;
$C_p = C_{134} + C_{235} = 2{,}914\ \mu F$;
$C_e = C_{12} \cdot C_p / (C_{12} + C_p) = 1{,}478\ \mu F$.

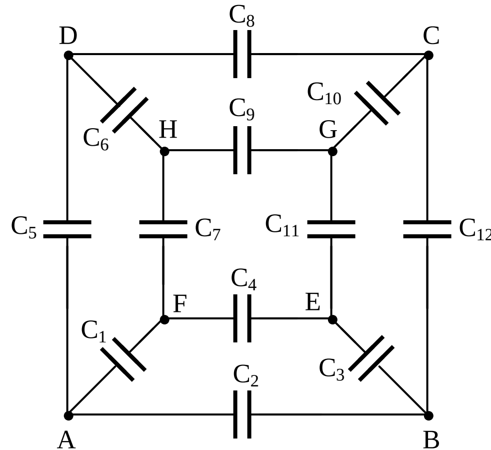
b) i c) $Q = U \cdot C_e = 1\,478\ \mu C = 1{,}478$ mC; $U_p = Q / C_p = 507{,}21$ V;
$Q_4 = Q_{13} = U_p \cdot C_{134} = 608{,}65\ \mu C$; $Q_5 = Q_{23} = U_p \cdot C_{235} = 869{,}5\ \mu C$; $U_4 = Q_4/C_4 = 304{,}325$ V;
$U_5 = Q_5/C_5$ 217,375 V.

$U_{DB} - U_4 + U_5 = 0 \Rightarrow U_{DB} = U_3 = 86{,}95$ V; $Q_3 = U_3 \cdot C_3 = 86{,}95$ μC; $Q_1 = Q_3 + Q_4 = 695{,}6$ μC; $Q_2 + Q_3 = Q_5 \Rightarrow Q_2 = Q_5 - Q_3 = 782{,}55$ μC; $U_3 = Q_3/C_3 = 86{,}95$ V; $U_1 = Q_1/C_1 = 695{,}6$ V i $U_2 = Q_2/C_2 = 782{,}55$ V.

7.87. ----- Pre ubacivanja drugog dielektrika kapacitet kondenzatora je iznosio C_1, a nakon ubacivanja drugog dielektrika kapacitet je: $C_1C_2 / (C_1 + C_2)$.
Kako je $C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)) = (1/3)C_1 \Rightarrow C_2 / (C_1 + C_2) = 1/3 \Rightarrow C_1 + C_2 = 3C_2 \Rightarrow C_1 = 2C_2 \Rightarrow C_1/C_2 = 2$.
$C_1 = \varepsilon_o\varepsilon_{r1}S/d_1$; $C_2 = \varepsilon_o\varepsilon_{r2}S/d_2$.
$C_1 : C_2 = \varepsilon_o\varepsilon_{r1}S/d_1 : \varepsilon_o\varepsilon_{r2}S/d_2 \Rightarrow \varepsilon_{r1} \cdot d_2 : \varepsilon_{r2} \cdot d_1 = 2 \Rightarrow 2\varepsilon_{r2} \cdot d_1 = \varepsilon_{r1} \cdot d_2 \Rightarrow$
$\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} \cdot d_2 / 2d_1 = 4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 20 / 6 = 3{,}333$.

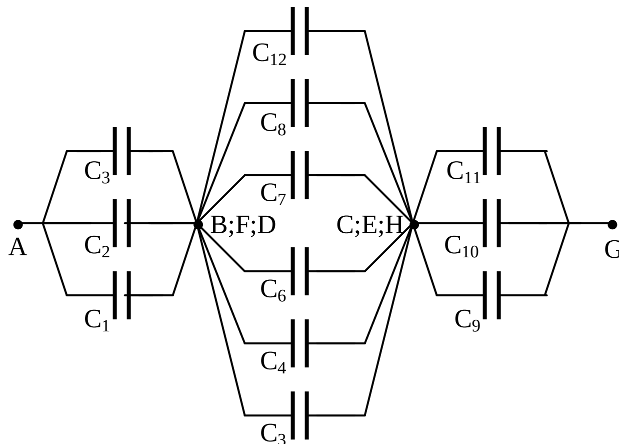
7.88. ----- Tačke M i N su na istom potencijalu, jer zbog simetrije isti su padovi napona na C , odnosno na 2C. Dakle, napon između tačaka M i N je jednak nuli, pa je sasvim svejedno koliki je kapacitet koji se priključi na ove dve tačke (na C′ naema nikakvog opterećenja). Zbog toga umesto C′ možemo uzeti kratku vezu ili ga potpuno isključiti iz kola (C′ nema uticaja na kolo). Ako C′ isključimo iz kola, kapacitet će iznositi:
$C_e = C \cdot 2C / (C + 2C) + C \cdot 2C / (C + 2C) = 2C / 3 + 2C / 3 = 4C / 3 = 40 / 3$ μF.
Čitaocu se preporučuje da reši zadatak tako što će umesto C′ napraviti kratku vezu.

7.89. ----- Datu kocku možemo nacrtati u vidu sledećeg kola (mreže):



Sl.7.89.

a) $C_{AG} = C_e = ?$
Zbog simetričnog opterećenja tačke B; F i D su na istom potencijalu ($V_B = V_A = V_D$). Isti je slučaj sa tačkama C, E i H ($V_C = V_E = V_H$).
Između tačaka A i B (F i D) spojeni su kondenzatori kapaciteta C_1, C_2 i C_5 (paralelna veza).
Između tačaka B (F i D) i C (E i H) vezani su kondenzatori kapaciteta C_3, C_4, C_6, C_7, C_8 i C_{12} (paralelno).
Između tačaka C (E i H) i G vezani su kondenzatori kapaciteta C_9, C_{10} i C_{11} (paralelno).
Na osnovu ovoga umesto navedene šeme (sl.7.89.) se može predstaviti ekvivalentnom slikom (sl.7.89.a).

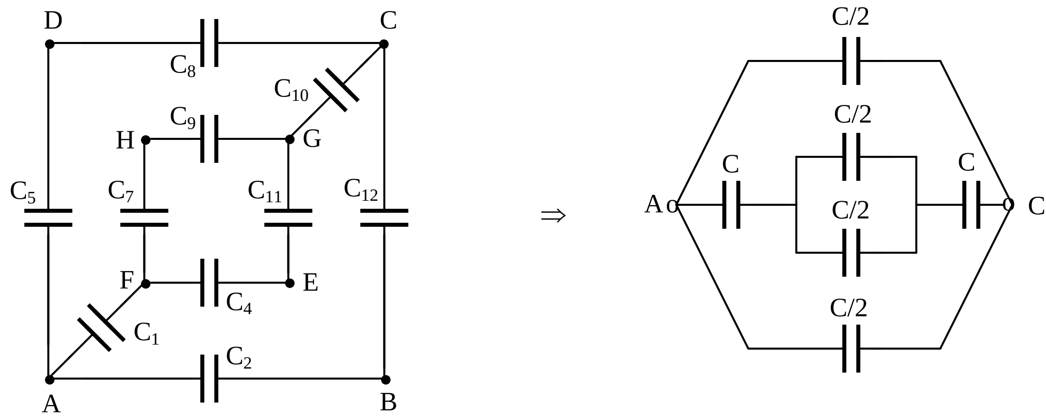


Sl.7.89.a)

$1/C_e = 1/3C + 1/6C + 1/3C \Rightarrow$
$1/C_e = (2 + 1 + 2) / 6C = 5 / 6C \Rightarrow$

$C_e = C_{AG} = 6C/5 = 1{,}2C$.

b) $C_e' = C_{AC}$. U ovom slučaju zbog simetrije (vidi sliku 7.89.) tačke D, B, H i E su na istom potencijalu. To znači da kondenzatore vezane između tih tačaka možemo izbaciti (nemaju nikakvog uticaja). Kada to uradimo dobije se slika 7.89. b.

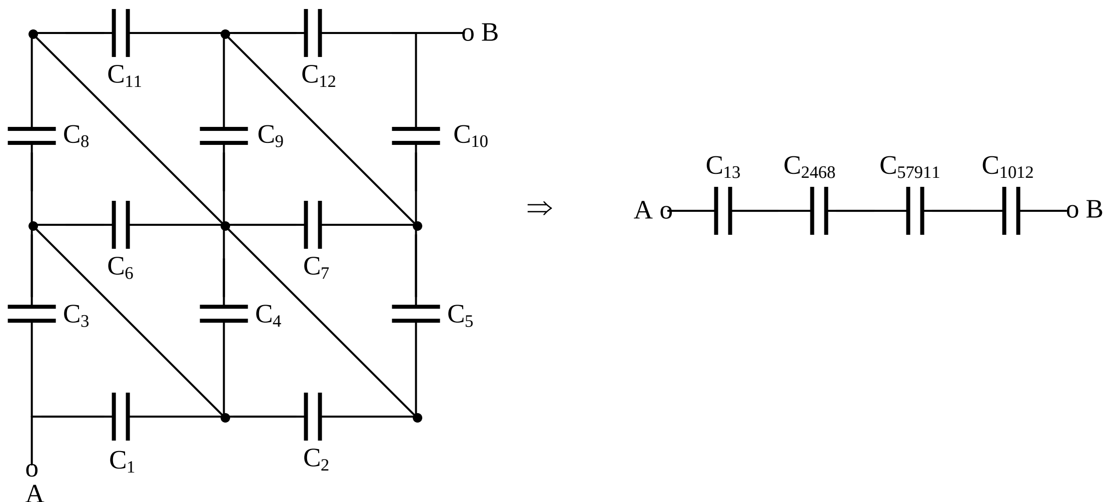


Sl.7.89.b)

$C_{AC} = C/2 + C/3 + C/2 = 3C/6 + 3C/6 + 2C/6$

$C_e' = C_{AC} = 4C/3.$

7.90. ----- Ako tačke istog potencijala kratko spojimo (odredimo na osnovu simetrije) zadata slika se može transformisati u sl.7.90.



Sl.7.90.

$C_{13} = C_1 + C_3 = 2C;$

$C_{2468} = C_2 + C_4 + C_6 + C_8 = 4C;$

$C_{57911} = C_5 + C_7 + C_9 + C_{11} = 4C;$

$C_{1012} = C_{10} + C_{12} = 2C;$

$1/C_e = 1/2C + 1/4C + 1/4C + 1/2C \;\Rightarrow$

$1/C_e = (2 + 1 + 1 + 2) / 4C = 3/2C \;\Rightarrow$

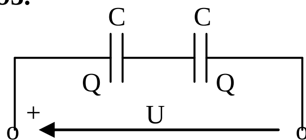
$C_e = 2C/3.$

7.91. ----- $U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon \frac{S}{d}} = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon \cdot S} = k \cdot d \Rightarrow$ Napon će se linearno smanjiti sa smanjenjem rastojanja d.

7.92. ----- $C_1 \parallel C_2 \Rightarrow C_{12} = C_1 + C_2 = 6$ [nF] ; C_{12} je redno sa $C_4 \Rightarrow C_{124} = \frac{C_{12} \cdot C_4}{C_{12} + C_4} = 2[nF]$;

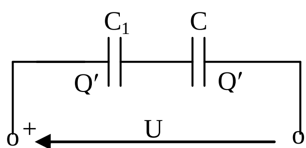
$C_{124} \parallel C_3 \Rightarrow C_{AB} = C_{124} + C_3 = 9$ [nF].

7.93. -----



Pre unošenja dielektrika:

$$C_e = \frac{C \cdot C}{C + C} = 20[pF] \Rightarrow Q = U \cdot C_e = 100 \cdot 20 \cdot 10^{-12} = 2[nC]$$



Posle unošenja dielektrika:

$$C_1 = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r \cdot C = 3 \cdot 40 = 120[pF]$$

$$C_e' = \frac{C_1 \cdot C}{C_1 + C} = \frac{\varepsilon_r \cdot C \cdot C}{\varepsilon_r \cdot C + C} = \frac{\varepsilon_r C^2}{C(\varepsilon_r + 1)} = \frac{\varepsilon_r \cdot C}{\varepsilon_r + 1} = \frac{3 \cdot 40}{4} = 30[pF]$$

Nakon unošenja dielektrika u kolu (na kondenzatorima) se nalazi količina naelektrisanja koja je jednaka:

$$Q' = U \cdot C_e' = 100 \cdot 30 \cdot 10^{-12} = 3 \cdot 10^{-9}[C] = 3[nC].$$

Kroz kolo će, nakon unošenja dielektrika, proteći količina naelektrisanja koja je jednaka razlici količine naelektrisanja na početku (pre unošenja dielektrika) i na kraju (posle unošenja dielektrika). Ona je jednaka:

$$\Delta Q = Q' - Q = 1 \text{ [nC]}.$$

7.94. ----- Pre kratke veze: $I = \frac{E}{R + r}$.

Kada se E kratko spoji ukupna struja sada je jednaka struji kratkospojenog generatora i iznosi:

$$I' = I_{KS} = \frac{E}{r} = 3I \Rightarrow I = \frac{E}{3r}.$$

Kako je: $E = IR + Ir$ (iz prve jednačine) $\Rightarrow$ napon na otporniku R iznosi:

$$U_R = IR = E - Ir = E - \frac{E}{3r} \cdot r = E - \frac{E}{3} = \frac{2}{3} E.$$

$U_1 = \frac{Q_C}{C} = \frac{Q}{C}, \ldots U_2 = \frac{Q_{2C}}{2C} = \frac{Q}{2C}$, jer je kod redne veze kondenzatora isto opterećenje ($Q_C = Q_{2C}$)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{Q}{C}}{\frac{Q}{2C}} = 2 \Rightarrow U_1 = 2U_2$$

$$U_R = \frac{2}{3} E = U_1 + U_2 = 3U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{2}{9} E = 2[V]$$

$$U_1 = 2U_2 = \frac{4}{9E} = 4[V].$$

8.1. ----- 90 mJ.

8.2. ----- a) $C = \varepsilon_o S/d = 10{,}6248 \cdot 10^{-12}$ F = 10,6248 pF;
$U = Q/C = 150{,}59 \cdot 10^3$ V = 150,59 KV; $W = Q \cdot U/2 = 120{,}76 \cdot 10^{-3}$ J = 120,76 mJ.
b) $C' = \varepsilon_o \varepsilon_r S/d = 5 \cdot 10{,}6248 \cdot 10^{-12} = 53{,}124 \cdot 10^{-12}$ F = 53,124 pF;
$U = Q/C' = 30{,}1182 \cdot 10^3$ V = 30,1182 KV; $W = Q \cdot U/2 = 24{,}095 \cdot 10^{-3}$ J = 24,095 mJ.

8.3. ----- $W = Q \cdot U/2 \Rightarrow Q = 2W/U = 2 \cdot 125 \cdot 10^{-3}/2{,}5 \cdot 10^3 = 100 \cdot 10^{-6}$ C = 100 μC;
$C = Q/U = 0{,}04 \cdot 10^{-6}$ F = 0,04 μF = 40 nF; $C : C_1 = \varepsilon S/d : \varepsilon S/d_1 = d_1 : d$;
a) $C : C_1 = d_1 : d = d/3 : d = 1/3 \Rightarrow C_1 = 3C = 3 \cdot 0{,}04 \cdot 10^{-6} = 0{,}12 \cdot 10^{-6}$ F = 0,12 μF = 120 nF;
b) $U_1 = Q/C_1 = 100 \cdot 10^{-6}/0{,}12 \cdot 10^{-6} = 833{,}33$ V;
c) $W_1 = Q \cdot U_1/2 = 41{,}67 \cdot 10^{-3}$ J = 41,67 mJ.
Promena energije iznosi: $\Delta W = W_1 = W = -83{,}33$ mJ. Dakle, energija je opala za 83,33 mJ.

8.4. ----- $U = Q/C = 20$ V; $U_1 = Q/C_1 = 30$ V; $W = QU/2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ J; $W_1 = QU_1/2 = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ J = 1,8 mJ.
Promena energije je: $\Delta W = W_1 - W = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ J = 0,6 mJ.
Pošto je energija kondenzatora porasla neka spoljašnja sila je morala izvršiti određenu radnju (A = 0,6 mJ) na osnovu koje je približilo ploče kondenzatora na d/3.

8.5. ----- $U = Q/C = 200$ V;
a) $W = QU/2 = 400 \cdot 10^{-6}$ J = 400 μJ;
b) $C' = \varepsilon S/d' = \varepsilon S/2d = C/2 = 0{,}01$ μF. Količina naelektrisanja je ostala ista, pa sledi: $U' = Q/C' = 400$ V;
c) $W' = QU'/2 = 800 \cdot 10^{-6}$ J = 800 μJ;
d) $\Delta W = W' - W = 400 \cdot 10^{-6}$ J = 400 μJ.

8.6. ----- $C_1 = \varepsilon_o S/d_1 = 424{,}992 \cdot 10^{-12}$ F = 424,992 pF; $Q_1 = U_1 C_1 = 849{,}984 \cdot 10^{-9}$ C = 849,984 nC;
Nakon udvostručenog rastojanja kapacitet iznosi: $C_2 = \varepsilon_o S/2d = C_1/2 = 212{,}496 \cdot 10^{-12}$ F = 212,496 pF;
Sada je napon na C_2: $U_2 = Q/C_2 = 4\,000$ V = 4 KV (količina naelektrisanja je u oba slučaja ista);
Jačina polja kod C_2 iznosi: $E_2 = U_2/d_2 = 4\,000/2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^5$ V/m = 0,4 KV/mm;
Energija kondenzatora C_2 je: $W_2 = U_2 Q/2 = 1\,670 \cdot 10^{-6}$ J $= 1{,}67 \cdot 10^{-3}$ J = 1,67 mJ.

8.7. ----- $C = \varepsilon_o \varepsilon_r S/d = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ F = 0,2 μF; $C_o = \varepsilon_o S/d = C/\varepsilon_r = 0{,}2 \cdot 10^{-6}/5 = 0{,}04 \cdot 10^{-6}$ F = 0,04 μF.
Kako je količina naelektrisanja ostala ista, sledi: $Q = UC = U_o C_o \Rightarrow U_o = U \cdot C/C_o = U \cdot \varepsilon_r = 500 \cdot 5 = 2\,500$ V;
$W_o = Q \cdot U_o/2 = U_o^2 \cdot C/2 = 125 \cdot 10^{-3}$ J = 125 mJ.

8.8. ----- $Q_1 = U_1 C_1 = 8 \cdot 10^{-9}$ C = 8 nC; $W_1 = Q_1 U_1/2 = 160 \cdot 10^{-9}$ J = 160 nJ;
Unošenjem materijalnog dielektrika kapacitet iznosi: $C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_r S/d = \varepsilon_r \cdot C_1 = 800$ pF;
Pošto je napon ostao nepromenjen, $U_1 = U_2 = U = 40$ V $\Rightarrow Q_2 = U_2 \cdot C_2 = 32 \cdot 10^{-9}$ C = 32 nC;
$W_2 = Q_2 U_2/2 = 640 \cdot 10^{-9}$ J = 640 nJ.

8.9. ----- a) $C_e = C/5 = 4$ μF; $W = QU/2 = U^2 C_e/2 = 115{,}2 \cdot 10^{-3}$ J = 115,2 mJ;
b) $C_e' = 5 \cdot C = 100$ μF; $W' = U^2 C_e'/2 = = 2{,}88$ J.

8.10. ----- $W_1 : W_2 = U_1^2 C_1/2 : U_2^2 C_2/2 = U_1^2 C_1 : U_2^2 C_2 = 8 \Rightarrow U_1^2 C_1 = 8 U_2^2 C_2 \Rightarrow (U_1/U_2)^2 = 8C_2/C_1 \Rightarrow$
$8C_2/C_1 = 2^2 \Rightarrow C_2/C_1 = 4/8 \Rightarrow C_1 = 2C_2 = 2 \cdot 10$ μF = 20 μF.
$Q = Q_1 = U_1 C_1 = Q_{23} = U_{23} \cdot (C_2 + C_3)$. Kako je $U_{23} = U_2 = U_3 \Rightarrow U_1 : U_2 = Q_1/C_1 : Q_{23} / (C_2 + C_3) = 2 \Rightarrow$
$(C_2 + C_3) : C_1 = 2 \Rightarrow C_2 + C_3 = 2C_1 \Rightarrow C_3 = 2C_1 - C_2 = 2 \cdot 20 - 10 = 30$ μF.

8.11. ----- $W = QU/2 = Q^2/2C$; $W' = Q^2/2C'$; $W' : W = = Q^2/2C' : Q^2/2C = C : C'$;
$C : C' = \varepsilon S/d : \varepsilon S/d' = d' : d$; $W' : W = d' : d = 2 \Rightarrow W' = 2W$.
Energija kondenzatora se poveća za dva puta.
(NAPOMENA! Povećanjem rastojanja između ploča kondenzatora uz stalnu količinu naelektrisanja, tj stalnu jačinu polja: $E = Q/\varepsilon_o S$, napon srazmerno raste, jer je $U = Ed$).

8.12. -----
a) $Q = UC = 10$ mC. Kako je kod paralelne veze (napon isključen i vezan C_2) $C_e = C_1 + C_2 = 80$ μF.
Sada je napon na kondenzatorima: $U' = Q/C_e = 125$ V.
b) Pre vezivanja C_2: $W_1 = QU/2 = 1$ J; nakon vezivanja C_2: $W_2 = QU'/2 = 0{,}625$ J.

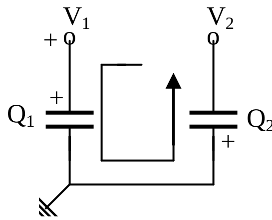
8.13. ----- Energija sa kojom raspolože kondenzator iznosi: $W = QU/2 = 4{,}5$ J. Sva ova energija se u vidu toplote utroši na proboj kondenzatora. To znači da je tokom proboja energija kondenzatora sa 4,5 J pala na 0.

8.14. ----- $C_1 = 20$ nF; $C_2 = 40$ nF (videti zadatak 8.10.).

8.15. ----- $C = \varepsilon_o\varepsilon_r S/d = 70{,}832\cdot10^{-12}$ F = 70,832 pF.
Energija kondenzatora je: $W = QU/2 = U^2C/2 = 8{,}85\cdot10^{-6}$ J = 8,85 μJ. Prilikom proboja ova energija se sva pretvori u toplotnu energiju (varnica).

8.16. ----- $W = U^2C/2 = 0{,}9\cdot10^{-6}$ J = 0,6 μJ.

8.17. -----



Pre spajanja gornjih ploča energija svakog od kondenzatora je iznosila:
$W_{1o} = Q_1U_1/2 = U_1^2C_1 = 100^2\cdot2\cdot10^{-6} = 10^{-2}$ J = 10 mJ;
$W_{2o} = Q_2U_2/2 = U_2^2C_2 = 50^2\cdot0{,}5\cdot10^{-6}/2 = 625\cdot10^{-6}$ J = 0,625 mJ;
Ukupna energija je jednaka zbiru energija svih kondenzatora, bez obzira na vezu i kojeg su smera naelektrisanja, pa je :
$W_o = W_{1o} + W_{2o} = 10{,}625$ mJ.
Količine naelektrisanja su iznosile (pre spajanja neuzemljenih ploča):
$Q_1 = U_1C_1 = 200\cdot10^{-6}$ C = 200 μC; $Q_2 = U_2C_2 = 25\cdot10^{-6}$ C = 25 μC.
Nakon spajanja gornjih ploča (neuzemljenih), kondenzatori su paralelno vezani, pa je: $C_e' = C_1 + C_2 \Rightarrow C_e' = 2{,}5\cdot10^{-6}$ F = 2,5 μF.

Ukupna količina naelektrisanja je. $Q' = Q_1 - Q_2 = 175\cdot10^{-6}$ C = 175 μC (Q_1 i Q_2 su suprotnih smerova).
Napon na kondenzatorima nakon spajanja neuzemljenih ploča je: $U_1' = U_2' = U' = Q'/C_e' = 70$ V.
Ukupna energija sada iznosi: $W' = Q'U'/2 = 6{,}125\cdot10^{-3}$ J = 6,125 mJ.
Razlika između energija kondenzatora na početku (pre spajanja neuzemljenih ploča) i na kraju predstavlja količinu toplote koja se oslobodi prilikom spajanja neuzemljenih ploča (gornjih) kondenzatora. Ona je jednaka: $W_J = W - W' = 10{,}625 - 6{,}125 = 4{,}5$ mJ.

8.18. ----- a) $Q_1 = UC_1 = 120\cdot10^{-6}$ C = 120 μC. Kako je Q_1 ukupna količina naelektrisanja i kod paralelne veze, sledi: $U' = Q'/C_e' = Q_1 / (C_1 + C_2) = 120\cdot10^{-6} / (2 + 4)\cdot10^{-6} = 20$ V.
b) $W_1 = Q_1'U1'/2 = U_1'^2C_1/2 = 400\cdot10^{-6}$ J = 0,4 mJ; $W_2' = U_2'^2C_2/2 = 800\cdot10^{-6}$ J = 0,8 mJ.

8.19. ----- $C_e = Q/Q = Q_1/U = 60\cdot10^{-6}/20 = 3\cdot10^{-6}$ F = 3 μF;
$C_e = C_1\cdot(C_2 + C_3) / (C_1 + C_2 + C_3) = 3 \Rightarrow C_1\cdot(C_2 + C_3) = 3\cdot (C_1 + C_2 + C_3 \Rightarrow$
$6\cdot (2 + C_3) = 3\cdot(6 + 2 + C_3) \Rightarrow C_3 = 4\cdot10^{-6}$ F = 4 μF;
$U_1 = Q_1/C_1 = 10$ V; $U_{23} = U - U_1 = 10$ V; $Q_2 = U_2\cdot C_2 = 20\cdot10^{-6}$ C = 20 μC; $Q_3 = U_3C_3 = 40\cdot10^{-6}$ C = 40 μC;
Energije iznose: $W_1 = Q_1U_1/2 = 300\cdot10^{-6}$ J = 300 μJ; $W_2 = Q_2U_2/2 = 100\cdot10^{-6}$ J = 100 μJ;
$W_3 = Q_3U_3/2 = 200\cdot10^{-6}$ J = 200 μJ.
Ukupna energija iznosi: $W = W_1 + W_2 + W_3 = 600$ μJ (ili: $W = QU/2$, što se ostavlja čitaocu da proveri).

8.20.----- $C = \varepsilon_o\varepsilon_r S/d = \varepsilon_r \cdot C_o \Rightarrow C_o = C/\varepsilon_r = 0{,}2\cdot10^{-6}/5 = 0{,}04\cdot10^{-6}$ F = 0,04 μF. Kapacitet kondenzatora bez materijalnog dielektrika iznosi $C_o = 0{,}04$ μF. Približivanjem ploča kondenzatora na udaljenost $d' = d/3$ kapacitet se menja i on sada iznosi: $C_o' = \varepsilon_o S/d' = \varepsilon_o S / (d/3) = 3\varepsilon_o S/d = 3\cdot0{,}04\cdot10^{-6} = 0{,}12\cdot10^{-6}$ F = 0,12 μF.

Energija kondenzatora na početku je iznosila: $W = U^2C/2 = 25\cdot10^{-3}$ J = 25 mJ,
a na kraju: $W' = Q'\cdot U'/2$.

Količina naelektrisanja, koja ostaje ista (sa dielektrikom i bez njega) jednaka je: $Q = U\cdot C \Rightarrow$
$Q = Q' = 500\cdot 0{,}2\cdot10^{-6} = 100\cdot10^{-6}$ C = 100 μC.

Napon nakon izvlačenja dielektrika i primicanja ploča iznosi: $U' = Q'/C' = 100\cdot10^{-6}/0{,}12\cdot10^{-6} = 833{,}33$ V.
Energija kondenzatora, na kraju, je jednaka: $W' = Q'U' = 100\cdot10^{-6}\cdot833{,}33 = 41{,}667\cdot10^{-3}$ J = 41,667 mJ.
Promena energije iznosi: $\Delta W = W' - W = 16{,}667$. Kako je krajnja energija veća od početne, sledi da je neka sila spolja izvršila određeni rad (energiju) na osnovu koje je izvršeno pomeranje ploče . To povećanje energije u stvari je rad koji se utroši da bi se te ploče približile na rastojanje d/3.

8.21. ----- Pre uvlačenja dielektrika količina naelektrisanja je iznosila: $Q = UC = 800\cdot10^{-6}$ C = 800 μC, a energija kondenzatora : $W = QU/2 = 160\cdot10^{-3}$ J = 160 mJ.

Posle uvlačenja dielektrika poveća se kapacitet, i on iznosi: $C' = \varepsilon_o\varepsilon_r S/d = \varepsilon_r\cdot C_o = 4\cdot2\cdot10^{-6} = 8\cdot10^{-6}$ F = 8 μF.
Kako je napon ostao isti, količina naelektrisanja se poveća i sada iznosi: $Q' = U\cdot C' = 3\,200\cdot10^{-6}$ C = 3 200 μC.
Nakon uvlačenja dielektrika energija kondenzatora je: $W' = Q'U/2 = 640\cdot10^{-3}$ J = 640 mJ.

8.22. ----- Na početku: $C = \varepsilon_o S/d = 867{,}7\cdot10^{-12}$ F = 867,7 pF; $W = U^2C/2 = 10{,}85\cdot10^{-3}$ J = 10,85 mJ;
$E = U/d = 10^6$ V/m = 1 KV/mm.

Na kraju: $C' = \varepsilon_o S/d' = \varepsilon_o S/2d$; jer je $d' = 2d \Rightarrow C' = C/2 = 433{,}85\cdot10^{-6}$ F = 433,85 μF;
$W' = U^2C'/2 = W_1/2 = 5{,}425\cdot10^{-3}$ J = 5,425 mJ; $E' = U/d' = U/2d = E/2 = 0{,}5\cdot10^6$ V/m = 0,5 KV/mm.

8.23. ----- $U_m = E_m\cdot d = 10\cdot10^6\cdot0{,}08\cdot10^{-3} = 800$ V; $C = \varepsilon_o\varepsilon_r S/d \Rightarrow \varepsilon_r = C\cdot d / \varepsilon_o S = 2{,}26$.

8.24. ----- $E_m = U_m/d \Rightarrow d = U_m/E_m = 0{,}1$ mm; $C = (n - 1)\cdot\varepsilon_o\varepsilon_r S/d = 3\cdot8{,}854\cdot10^{-12}\cdot6\cdot4{,}8\cdot10^{-4}/0{,}1\cdot10^{-3} \Rightarrow$
$C = 764{,}99\cdot10^{-12}$ F = 764,99 pF.

8.25. ----- $U_m = E_m\cdot d = 120\cdot10^3$ V = 120 KV.

8.26. ----- Vezivanjem C_3 paralelno na C_2 ekvivalentna kapacitivnost iznosi:
$C_e' = C_1\cdot(C_2 + C_3) / (C_1 + C_2 + C_3) = 3\cdot(4 + 5) / (3 + 4 + 5) = 2{,}25$ nF.

Ukupna količina naelektrisanja iznosi: $Q' = U\cdot C_e' = 2{,}7\cdot10^{-6}$ C = 2,7 μC. Napon na kondenzatoru C_1 sada iznosi: $U_1' = Q'/C_1 = 900$ V. Ovaj napon ($U_1' = 900$ V) je proizveo proboj kondenzatora C_1.

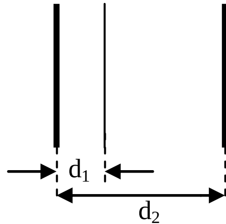
8.27. ----- Da nema fabričke greške dizvoljeni napon bi iznosio: $U_d = E_m\cdot d = 50\cdot10^5\cdot0{,}3\cdot10^{-3} = 1\,500$ V.
Zbog navedene greške (manje rastojanje) napon na papiru iznosi: $U_p' = E_m\cdot d_p' = 50\cdot10^5\cdot0{,}25\cdot10^{-3} = 1\,250$ V.
Zbog dveju sredina (papir i vazduh) koje su složene redno, imamo dve jačine električnog polja, i to:
– za vazduh: $E_{mo} = Q/\varepsilon_o S$; i – papir: $E_{mp}' = Q/\varepsilon_o\varepsilon_r S$ (zbog redne veze količina naelektrisanja je jednaka).
Deleći navedena dva polja, sledi: $E_{mo} : E_{mp}' = \varepsilon_r \Rightarrow E_{mp}' = E_{mo} / \varepsilon_r = 3\cdot10^6/4 = 0{,}75\cdot10^6$ V/m.
Sada je napon na papiru (sa greškom) $U_p' = E_{mp}'\cdot d_p' = 0{,}75\cdot10^6\cdot0{,}25\cdot10^{-3} = 187{,}5$ V.
Napon na vazdušnom delu kondenzatora iznosi: $U_o' = E_{mo}\cdot d_o = 3\cdot10^6\cdot0{,}05\cdot10^{-3} = 150$ V.
Ukupni napon, koji se sme priključiti na ovakav kondenzator iznosi:
$U_d' = U_p' + U_o' = 337{,}5$ V.
Da se izvući zaključak da je napon vazdušnom delu kondenzatora U_o' taj koji uslovljava ukupni napon. Napon U_o' ne sme biti veći od 150 V, jer bi se vazdušni deo kondenzatora probio (javlja se varničenje), što nije slučaj sa naponom U_p'.

8.28. ----- a) $U_m = E_m\cdot d = 30\cdot10^3$ V = 30 KV; $k = U_m/U_d \Rightarrow U_d = U_m/3 = 10\cdot10^3$ V = 10 KV;
b) $W = U^2C/2 = (10\cdot10^3)^2\cdot5\cdot10^{-6} / 2 = 250$ J;
c) $W_m = U_m^{\,2}C/2 = (30\cdot10^3)^2\cdot5\cdot10^{-6} / 2 = 2\,250$ J; $W_m : W = 2\,250 : 250 = 9$.

8.29. ----- $W = U^2C/2 = 1{,}6$ J.

8.30. ----- $W = U^2C / 2 \Rightarrow C = 2W/U^2 = 2\cdot 100 / 800^2 = 313\cdot 10^{-6}$ F = 313 μF.

8.31. -----



$S' = 50\cdot 50\ cm^2 = 25\cdot 10^2\ cm^2 = 25\cdot 10^{-2}\ m^2 = 0{,}25\ m^2$.
Na početku kapacitet kondenzatora je iznosio:
$C_1 = \varepsilon_o S/d_1 = 2{,}2135\cdot 10^{-9}$ F.
Količina naelektrisanja je: $Q = U\cdot C_1 = 553{,}375\cdot 10^{-9}$ C = 553,375 nC. Ova količina naelektrisanja je ista i kada se napon isključi a ploče kondenzatora udalje na d_2. U ovom slučaju kapacitet iznosi:
$C_2 = \varepsilon_o S/d_2 = \varepsilon_o S/3d = C_1/3 \Rightarrow C_2 = 0{,}7378\cdot 10^{-9}$ F.
Na samom početku energija kondenzatora je bila:
$W_1 = QU_1/2 = 69{,}172\cdot 10^{-6}$ J; a na kraju:
$W_2 = Q\cdot U_2/2 = Q^2/2C = 207{,}525\cdot 10^{-6}$ J.

Rad koji se utroši da bi se ploče našle na rastojanju d_2 ($d_2 = 3d_1$) je jednak razlici između krajnje i početne energije kondenzatora. Njega obavlja neka spoljašnja sila, i jednak je:

$$A = W_2 - W_1 = 138{,}353\cdot 10^{-6}\ J = 138{,}353\ \mu J.$$

8.32. ----- Gustina energije je : $w = W/V = \varepsilon\cdot E^2/2$ (vidi gustinu energije) $\Rightarrow$
$w = 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot(3\cdot 10^6)^2 / 2 = 39{,}843\ J/m^3$.
Kako je gustine hemijske energije date smeše $w_S = 0{,}5\ J/cm^3 = 0{,}5\ J / (10^{-2})^3\ m^3 = 0{,}5\cdot 10^6\ J/m^3$.
$w_S / w = 12\ 550$. Dakle gustina energija date smeše je za 12 550 puta veća od maksimalne gustine energije koju može da sadrži vazduh.

8.33. ----- $E = Q/\varepsilon_o S \Rightarrow Q = E\cdot\varepsilon_o\cdot S = 265{,}62\cdot 10^{-}$ C = 265,62 nC;
Sila između ploča kondenzatora iznosi: $F = Q^2 / 2\varepsilon_o S = (265{,}62\cdot 10^{-9})^2 / 2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 100\cdot 10^{-4} = 0{,}39843$ N.
Ova sila je privlačna jer su ploče raznoimeno naelektrisane.

8.34. ----- $E = U / d = 75\cdot 10^3$ V/m; $E = Q / \varepsilon_o S \Rightarrow Q = E\cdot\varepsilon_o S = 3{,}3203\cdot 10^{-9}$ C = 3,3203 nC;
$F = Q^2 / 2\varepsilon_o S = 1{,}245\cdot 10^{-4}$ N.

8.35. ----- Izvršeni rad se može odrediti na dva načina: 1. razlikom energija; 2. Kulonovom silom ($A = F\cdot s$).
Pošto je $E = Q / \varepsilon_o S = \sigma / S \Rightarrow \sigma = Q / S \Rightarrow Q = \sigma\cdot S = [2\cdot 10^{-15}/ (10^{-2})^2]\cdot 2\ 000\cdot 10^{-4} = 4\cdot 10^{-12}$ C = 4 pC;
$F = Q^2 / 2\varepsilon_o S = (4\cdot 10^{-12})^2 / 2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 2\ 000\cdot 10^{-4} = 4{,}518\cdot 10^{-12}$ N = 4,518 pN,
Sila F pri pomeranju jedne ploče na putu Δd (dužina) utroši rad, koji iznosi::

$$A = F\cdot\Delta d = 4{,}518\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3} = 2{,}259\cdot 10^{-15}\ J.$$

8.36. ----- $E_d = U_m / d = 40\cdot 10^6$ V/m = 40 KV/mm.

8.37. ----- $d = U_m / E_d = 1{,}2$ mm.

8.38. ----- $w_m = \varepsilon\cdot E_m^2/2 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 8\cdot(150\cdot 10^6)^2/2 = 8{,}854\cdot 4\cdot 150^2 = 796{,}86\cdot 10^3\ J/m^3 = 796{,}86\ kJ/m^3$.

8.39. ----- $E = E_m / k = 25\cdot 10^6/5 = 5\cdot 10^6$ V/m; $w = \varepsilon E^2 / 2 = \varepsilon_o\varepsilon_r E^2 / 2 = 774{,}725\ J/m^3$.

8.40. ----- $W = QU / 2 = 100$ J; $P = W / t = 100 / 10^{-3} = 100\ 000$ W = 100 KW.

8.41. ----- $W = QU / 2 = Q^2 / 2C = 4$ J; $P = W / t = 4 / 0{,}1 = 40$ W.

8.42. ----- $C_2 = C_3 = 4C \Rightarrow U_2 = U_3 = \frac{U}{2}$; $(U = U_2 + U_3)$; $U_1 = U$.

$$W_1 = \frac{1}{2}Q_1U_1 = \frac{1}{2}U_1^{\,2}C_1 = \frac{1}{2}U^2C$$

$$W_2 = \frac{1}{2}Q_2U_2 = \frac{1}{2}U_2^{\,2}C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{2}\right)^2 \cdot 4C = \frac{1}{2}U^2C;$$

$$W_3 = \frac{1}{2}Q_3U_3 = \frac{1}{2}U_3^{\,2}C_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{2}\right)^2 \cdot 4C = \frac{1}{2}U^2C$$

$$W_1 = W_2 = W_3 = \frac{1}{2}U^2C$$

ODGOVOR: Energija na svim kondenzatorima je jednaka.

R E Š E N J A :
∗ E L E K T R O K I N E T I K A ∗

1.1.1.----- 1 800 C; **1.1.2**. ----- 3 h; **1.1.3**. ----- $16\cdot10^4$ A/m^2; **1.1.4**. ----- 75 h;

1.1.5. a) $Q = It = 5$ C; $Q = nq_e \Rightarrow n = Q/q_e = 5/1{,}6\cdot10^{-19} = 3{,}125\cdot10^{19}$ elektrona.
b) $v = J/NQ = J/Nq_e = I/S\cdot Nq_e = 5/2{,}5\cdot10^{-2}\cdot8{,}5\cdot10^{22}\cdot1{,}6\cdot10^{-19} = 5/340 = 0{,}0147$ [cm/s].

1.1.6.----- a) 144 C; b) $1{,}415\cdot10^4$ KA/m^2.

1.1.7. $I' = 1{,}03\ I$; $J = I/S$; $J' = I'/S' \Rightarrow J'/J = (I'/S')/(I/S)$, Kako je $J = J' \Rightarrow I'/S' = I/S \Rightarrow S' = I'S/I$
$S' = 1{,}03\cdot I/S = 1{,}03\cdot S$. Presek treba da se poveća za 1,03 puta, tj za 3%.

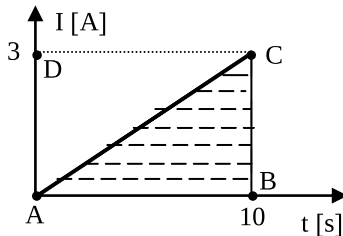
1.1.8. ----- $Q = It/2 = 3\cdot10/2 = 15$ C. Pogledaj zadatak 1.1.15.

1.1.9. ----- 5 A/mm^2; 3,125 A/mm^2; 2 A/mm^2; **1.1.10**. ----- 9,6 A/mm^2; **1.1.11**. ----- 3 A;

1.1.12. ----- 375 s; **1.1.13**. ----- $N = It/q \Rightarrow n = N/t = I/q = 6{,}25\cdot10^{19}$ elektrona/s.

1.1.14. ----- $N = 1875\cdot10^{17}$;

1.1.15. -----



Pri stalnoj struji I količina naelektrisanja iznosi : Q = It. Kada bi ta struja bila konstantno 3 A koliina naelektrisanja bi iznosila $3\cdot10 = 30$ C (površina pravougaonika ABCD). Kako se struja menja linearno po pravcu AC (od 0 do 3A), ukupna količina naelektrisanja jednaka je površini trougla ABC, koja je jednaka polovini povrčine pravougaonika ABCD . To je ista količina naelektrisanja koju bi istvarila struja od 1,5 A (srednja vrednost) u vremenu 10 s. Dakle, količina naelektrisanja (površina išrafiranog trougla) iznosi: $Q = It/2 = 3\cdot10/2 = 15$ C.

1.1.16. ----- $S = (d/2)^2\pi = 3{,}14$ mm^2 $= 3{,}14\cdot10^{-2}$ cm^2, $v = I/SNq_e \Rightarrow$
$v = 2$ [A] / $3{,}14\cdot10^{-2}$ [cm^2]$\cdot8{,}5\cdot10^{22}$ [cm^{-3}] $\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$ [As] = 0,0047 [cm/s] = $4{,}7\cdot10^{-3}$ [cm/s].

1.1.17. ----- $v = 1{,}16\cdot10^{-4}$ m/s.

1.1.18. ----- $v = J/NQ \Rightarrow J = vNQ = vNq_e = 3\cdot10^{-4}$[ms^{-1}]$\cdot8{,}5\cdot10^{28}$[m^{-3}]$\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$[As] = $40{,}8\cdot10^5$ [A/m^2].

1.1.19. ----- $J = vNQ \Rightarrow v = J/NQ = 2{,}2\cdot10^{-4}$[m/s] $\Rightarrow I = JS = 2{,}36$ [A].

1.1.20. ----- $J = I / S = I / a^2\pi = 5{,}09\cdot10^6$ [A/m^2].

1.1.21. ----- Vektor gustine električne struje u dielektriku je konstantan, a intezitet ovoga vektora iznosi: $J = I / S = 1{,}67\cdot10^{-4}$ A/m^2. Linije vektora gustine električne struje su normalne na ploče (elektrode) kondenzatora (jer su to i linije električnog polja).

1.1.22. ----- $v = J/NQ \Rightarrow J = vNQ = 1{,}2$[ms^{-1}]$\cdot10^6$[m^{-3}]$\cdot 10^{-16}$[As] = $1{,}2\cdot10^{-10}$ [Am^{-2}] ,
$I = JS = 1{,}2\cdot10^{-10}$[Am^{-2}]$\cdot1\cdot10^{-4}$[m^2] = $1{,}2\cdot10^{-14}$ [A] .

1.1.23. ----- $N = 6{,}25\cdot10^{18}$ elektrona.

1.2.1. ----- 1 800 C; **1.2.2.** ----- 500 V; **1.2.3.** ----- 210 V; **1.2.4.** ----- 6 V; **1.2.5.** ----- 833,33 C;

1.2.6. ----- 1,7 V; **1.2.7.** ----- E = W/Q = 7,5 V; **1.2.8.** ----- 50 C; **1.2.9.** ----- 0,05 V/m;

1.2.10. ----- 0,37 mV/m; **1.2.11.** ----- $38{,}7 \cdot 10^{-6}$ V/cm;

1.2.12. ----- a) $F = E \cdot q_e = m_e \cdot a \Rightarrow a = F/m_e = E \cdot q_e/m_e = (U/l) \cdot (q_e/m_e) = 1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}/9{,}1 \cdot 10^{-31} \Rightarrow$
$a = 0{,}1758 \cdot 10^{12}$ m/s^2 ;
b) $l = a \cdot t^2 / 2 \Rightarrow t^2 = 2l / a = 11{,}377 \cdot 10^{-12} \Rightarrow t = 3{,}373 \cdot 10^{-6}$ s ,
Elektron dobija ubrzanje trenutno.

1.2.13. ----- a) E = U/d = 400 V/m;
b) $F = E \cdot q_e = 400 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 0{,}64 \cdot 10^{-16}$ N;
c) $F = m_e \cdot a \Rightarrow a = F/m_e = 0{,}64 \cdot 10^{-16}/9{,}11 \cdot 10^{-31} = 0{,}7 \cdot 10^{14}$ m/s^2
e) $v_1 = 0$; $U \cdot q_e = m_e \cdot v_2^2/2 \Rightarrow v_2^2 = 2 \cdot q_e \cdot U/m_e = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 20/9{,}11 \cdot 10^{-31} = 7{,}03 \cdot 10^{12} \Rightarrow$
$v_2 = 2{,}65 \cdot 10^6$ m/s;
d) $v_2 = a \cdot t \Rightarrow t = v_2/a = 2{,}65 \cdot 10^6/0{,}7 \cdot 10^{14} = 3{,}79 \cdot 10^{-8}$ s;
f) $W = m_e \cdot v_2^2/2 = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 7{,}03 \cdot 10^{12}/2 = 32{,}02$ J

1.3.1. ----- 0,1458 Ω; **1.3.2.** ----- 15,96 mm^2; **1.3.3.** ----- 320 Ω;

1.3.4. ----- $R = \rho l/S = 1/G \Rightarrow S = G \cdot l \cdot \rho = 0{,}1925 \cdot 100 \cdot 0{,}13 = 2{,}5025$ mm^2 $= r^2 \cdot \pi \Rightarrow r^2 = S/\pi$
$r^2 = 2{,}5025/3{,}14 = 0{,}797 \Rightarrow r = 0{,}893$ mm $\Rightarrow d = 2 \cdot r = 2 \cdot 0{,}893 = 1{,}785$ mm;

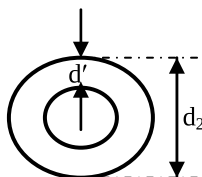
1.3.5. ----- 0,3626 Ω; **1.3.6.** ----- 0,7 Ω, 1,428 S; **1.3.7.** ----- 255 Ω; **1.3.8.** ----- 2,5 km;

1.3.9. ----- 9,65 mm^2; **1.3.10.** ----- 0,0284 Ωmm^2/m, dakle, radi se o aluminijumu;

1.3.11. ----- $l_{kon} = 25$ m; $l_{hrom} = 11{,}36$ m; $l_{cek} = 8{,}92$ m; **1.3.12**. ----- $0{,}146 \cdot 10^{-3}$ Ω;

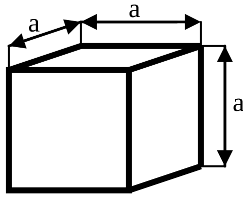
1.3.13. ----- $S = d^2\pi/4 = 0{,}5^2 \cdot 3{,}14/4 = 0{,}196$ mm^2,
$l = N \cdot d\pi = 100 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}14 = 15{,}386$ m;
$R = \rho l/S = 1{,}45 \cdot 15{,}386/0{,}196 = 113{,}825$ Ω;

1.3.14. -----



$S = (d_2 + 2d')^2\pi / 4 - d_2^2\pi / 4 = 1962{,}5 - 1256 = 706{,}5$ mm^2 ,
$R = \rho l/S = 0{,}0175 \cdot 30 / 706{,}5 = 0{,}000743\ \Omega = 743 \cdot 10^{-6}\ \Omega$;

1.3.15. -----



$R = \rho l/S = \rho \cdot a / a \cdot a = \rho / a \Rightarrow \rho = R \cdot a = 0{,}208 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$
$\rho = 0{,}208 \cdot 10^{-6}\ \Omega m = 0{,}208\ \Omega mm^2/m$ (Napomena! l je u m a S u m^2),
$R' = \rho l'/S' \Rightarrow l'/S' = R'/\rho = 1[\Omega] / 0{,}208 \cdot 10^{-6}[\Omega m] = 4{,}807 \cdot 10^6\ m^{-1}$;
$l' = 4{,}807 \cdot 10^6\ [m^{-1}] \cdot S\ [m^2]$; $V = S' \cdot l' = (10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3 \Rightarrow$
$S' \cdot (4{,}807 \cdot 10^6 \cdot S') = 10^{-6}\ m^3 \Rightarrow S'^2 = 10^{-6} / 4{,}807 \cdot 10^6 = 0{,}208 \cdot 10^{-12} \Rightarrow$
$S' = 0{,}456 \cdot 10^{-6}\ [m^2] = 0{,}456\ [mm^2]$;
$l' = 4{,}807 \cdot 10^6\ S' = 4{,}807 \cdot 10^6 \cdot 0{,}456 \cdot 10^{-6} = 2{,}192\ m$;

Površina S′ iznosi : $S' = d'^2 \cdot \pi / 4 \Rightarrow d'^2 = 4 \cdot S' / \pi = 0{,}581 \Rightarrow d' = 0{,}762\ mm \Rightarrow r' = d'/2 = 0{,}381\ mm$.
Konačna rešenja su: $l' = 2{,}192\ m$; $S' = 0{,}456\ mm^2$; $d' = 0{,}762\ mm$; $r' = 0{,}381\ mm$.

1.3.16. ----- 11 Ω;

1.3.17. ----$R_1 = R_2 \Rightarrow \rho_1 l_1/S_1 = \rho_2 l_2/S_2 \Rightarrow l_2/l_1 = \rho_1 \cdot S_2/\rho_2 S_1 = \rho_1 \cdot (d_2/2)^2 \cdot \pi / \rho_2 \cdot (d_1/2)^2 \cdot \pi = \rho_1 \cdot d_2^2/\rho_2 \cdot d_1^2 = 1$;

1.3.18. --- $\rho_1 l_1/S_1 = \rho_2 l_2/S_2 \Rightarrow l_1 = \rho_2 \cdot S_1 \cdot l_2 / \rho_1 \cdot S_2 = \rho_2 \cdot l_2 \cdot d_1^2 / \rho_1 \cdot d_2^2 = 0{,}0175 \cdot 10 \cdot 0{,}5^2 / 0{,}5 \cdot 0{,}1^2 = 7{,}85\ m$;

1.3.19. --- $l' = 3l = 300\ m$, $R = \rho \cdot l'/S' = \rho \cdot n \cdot l / S'$. Kako je zapremina ista , sledi: $V = S' \cdot l' = S \cdot l \Rightarrow$
$S' = S \cdot l/l' = 100 \cdot 0{,}1/300 = 0{,}1/3 \Rightarrow R = 0{,}5 \cdot 300 / (0{,}1/3) = 4\,500\ \Omega = 4{,}5\ K\Omega$;

1.3.20. --- a) $R_1 = \rho l_1/S_1 = 0{,}48 \cdot 1/1^2 \cdot \pi = 0{,}153\ \Omega$,
b) $R_2 = \rho l_2/S_2$, Kako je zapremina ista, sledi: $S_2 \cdot l_2 = S_1 \cdot l_1 \Rightarrow l_2 = S_1 \cdot l_1/S_2 = 1^2 \cdot \pi/0{,}04^2 \cdot \pi \Rightarrow$
$l_2 = 625\ m$, pa je $R_2 = 0{,}48 \cdot 625/0{,}04^2 \cdot \pi = 59\,713{,}38\ \Omega$,
c) $l_2 = 625\ m$, što je već izračunato pod b);

1.3.21. ----- $S = S_1 - S_2 = d_1^2 \cdot \pi/4 - d_2^2 \cdot \pi/4 = 176{,}625 - 94{,}985 = 81{,}64\ mm^2$
$R = \rho l/S = 0{,}017 \cdot 3/81{,}64 = 0{,}000625\ \Omega = 625 \cdot 10^{-6}\ \Omega$;

1.3.22. ----- $R_1 = 6{,}4 \cdot 10^{-6}\ \Omega$, $R_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \Omega$, $R_3 = 0{,}4 \cdot 10^{-6}\ \Omega$;

1.3.23. ----- $R \cong \rho l / S \cong \rho l / (S_1 + S_2)/2 \cong 2\rho \cdot c / (a + b) \cdot d$;

1.3.24. ----- $R = \rho l/S \cong \rho \cdot c / [(d^2 + b^2) \cdot \pi/2] \cong 2\rho \cdot c / (d^2 + b^2) \cdot \pi$;

1.3.25. ----- $\rho_k = 0{,}49\ \Omega mm^2/m$ (iz tabele),
$R = \rho l/S \Rightarrow l = RS/l = 40 \cdot 0{,}05^2 \cdot \pi / 0{,}49 = 0{,}641\ m = 641\ mm$,
Kako je obim jednog navojka jednak $D\pi = 15{,}7\ mm$, ukupni broj navojaka je:
$N = l / D\pi = 641 / 15{,}7 = 41$ navojak.
Ukupna dužina kalema iznosi: $l_k = (d + 0{,}025) \cdot N = = (0{,}025 + 0{,}1) \cdot 41 = 5{,}125\ mm$.
Dužina jezgra mora biti veća od dužine kalema ($l_j > 5{,}125\ mm$), kako bi se kalem mogao namotati (smestiti na jezgru). Pored kalema, na jezgru mora ostati izvesni prostor kako bi se moglo izvesti priključenje na sam kalem (tzv. priključci – izvodi).

1.3.26. ----- $d_1 / d_2 = \sqrt{\rho_1 / \rho_2}$;

2.1. ----- 62,76 Ω; **2.2.** ----- (1 455 °C + 15 °C) = 1 470 °C; **2.3.** ----- R_{20} = 4,22 Ω, R_{50} = 4,73 Ω, $R_{(-20)}$ = 3,54 Ω; **2.4.** ----- Δθ = 60 °C, θ_1 = 80 °C; **2.5.** ----- 3 260 m; **2.6.** ----- 79,4 Ω;

2.7. ----- 0,03136 $\Omega mm^2/m$; **2.8.** ----- 0,48 Ω; **2.9.** ----- ρ = 0,68 $\Omega mm^2/m$ ($\rho \cong 12\cdot\rho_o$);

2.10. ----- 12,096 Ω; **2.11.** ----- R_1 = 238,85 Ω, R = 191,08 Ω; **2.12.** ----- Δθ = 75 °C;

2.13. ----- θ_2 = 55,7 °C; **2.14.** ----- θ_2 = 57,5 °C; **2.15.** ----- 78 Ω; **2.16.** ----- 13,97 Ω, 17,16 Ω;

2.17. ----- 75,1 °C; **2.18.** ----- 52,88 Ω; **2.19.** ----- –0.101 1/°C, 0,379 S/cm;

2.20. ----- $R = R_{01} (1 + \alpha_1\cdot\Delta\theta) = R_{02} (1 + \alpha_2\cdot\Delta\theta) \Rightarrow 5\cdot(1 + 0{,}001\cdot\Delta\theta) = 4\cdot(1 + 0{,}0039\cdot\Delta\theta) \Rightarrow$
$\Delta\theta = 94{,}34\ °C \Rightarrow \Delta\theta = \theta - \theta_o \Rightarrow \theta = \Delta\theta + \theta_o = 94{,}34 + 20 = 114{,}34\ °C \Rightarrow$
$R = R_{01}(1 + \alpha\cdot\Delta\theta) = 5\cdot(1 + 0{,}001\cdot 94{,}34) = 5{,}47\ \Omega$;

2.21. ----- $R_2 = R_1 (1 + \alpha\cdot\Delta\theta) \Rightarrow \alpha = \dfrac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot \Delta\theta}$ = (32,4 – 25) / 25·(90 – 15) = 0,0039 1/°C,
$R_o = R_1[1 + \alpha\cdot(\theta_o - \theta_1)] = 25\cdot[1 + 0{,}0039\cdot(-15)] = 23{,}54\ \Omega$;

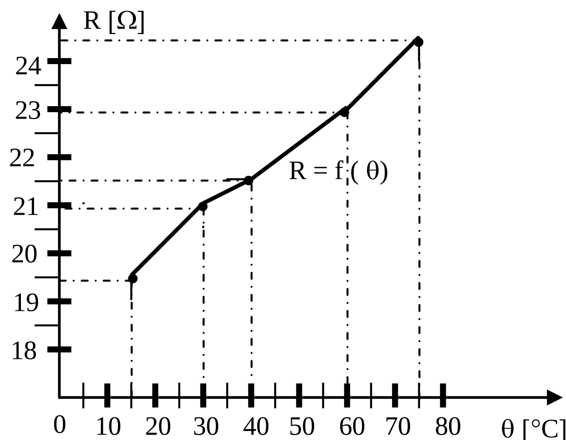
2.22. ----- $R = R_o[1 + \alpha (\theta - \theta_o) = R_o (1 + \alpha\cdot\theta)$, jer je θ_o = 0 °C,
$2R_o = R_o (1 + \alpha\cdot\theta_o) \Rightarrow 2 = 1 + \alpha\cdot\theta \Rightarrow \alpha\cdot\theta = 1 \Rightarrow \theta = 208{,}33\ °C$;

2.23. ----- $R_2 = R_1\cdot[1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)] \Rightarrow \alpha = (R_2 - R_1) / R_1 (\theta_2 - \theta_1) = 0{,}005$ 1/°C,
$R_3 = R_1\cdot[1 + \alpha (\theta_3 - \theta_1) \Rightarrow \theta_3 - \theta_1 = (R_3 - R_1) / \alpha\cdot R_1 = 400 \Rightarrow \theta_3 = 400 + \theta_1 = 400\ °C$;

2.24. ----- $R_o = R / (1 + \alpha\cdot\Delta\theta) = 10{,}62\ \Omega$, $R_o = \rho l/S \Rightarrow l = R_oS/\rho = 132{,}5$ m;

2.25. ----- 0,004 1/°C;

2.26. -----



Očito je, na osnovu dijagrama, da temperaturni koeficijent nije konstantan, jer dijagram nije u jednom pravcu.
- Za temperaturnu razliku: 30 – 15 = 15°C ⇒ ΔR = 20,9 – 19,6 = 1,3 Ω. To znači da je po 1°C ta promena 1,3/15 = 0,0867 Ω.
Na isti način se odredi promena otpora za preostale promene temperatura, pa se dobije:
- za temperaturnu promenu od 30°C na 40°C ⇒ ΔR = (21,6 – 20,9) / 10 = 0,07 Ω.
-od 40°C do 60°C ⇒ ΔR = (23,1 –21,6)/20 = 0,075Ω.
I konačno od 60°C do 75°C otpor se promeni za ΔR = (24,4 – 23,1) / 15 = 0,0867 Ω

Na osnovu navedenog vidimo da je najveća promena otpora po 1 °C u temperaturnom opsegu od 15 do 30 °C, kao i od 60 do 75 °C (0,0867), pa je u ovom opsegu i najveći temperaturni koeficijent (nagib pravca najveći). Najmanji temperaturni koeficijent je u temperaturnom opsegu od 30 do 40 °C , jer je tu promena otpora po 1 °C najmanja (0,07), samim tim i nagib pravca najmanji .

2.27. ----- $\rho_1 = \rho_o[1+\alpha\cdot(\theta_1 - \theta)]$, $\rho_2 = \rho_o[1+\alpha\cdot(\theta_2 - \theta_o)]$ $\Rightarrow$ $\rho_1/\rho_2 = [1+\alpha\cdot(\theta_1 - \theta_o)] / [1+\alpha\cdot(\theta_2 - \theta_o)]\Rightarrow$
Uzimajući za θ_o sobnu temperaturu (20 °C) sledi : $\rho_1 / \rho_2 = 1,984$;

2.28. ----- Poveća se za 20 %;

2.29. ----- $R_1 = R_o[1+\alpha\cdot(\theta_1 - \theta_o)]$ $\Rightarrow$ $50 = R_o(1+\alpha\cdot 15)$,
$R_2 = R_o[1+\alpha\cdot(\theta_2 - \theta_o)]$ $\Rightarrow$ $58 = R_0 (1+ \alpha\cdot 55)$,
Rešenjem ovih dveju jednačina sa dve nepoznate (R_o i α) sledi rešenje: $\alpha = 0,0043$ 1/°C;

2.30. ----- $R = R_{1o}(1+ \alpha_1\cdot\Delta\theta) + R_{2o}(1+ \alpha_2\cdot\Delta\theta)$, $\alpha_1 = \alpha_{Cu}$, a $\alpha_2 = \alpha_u$

Da bi ukupni otpor ostao konstantan (250 Ω), tada se uticaj temperature kompenzira (poništava). To znači da se istovremeno bakarnom otporniku porastom temperature otpor povećava, a ugljenom otporniku otpor smanjuje. Ove promene su jednake, pa sledi:

$$R_{1o}\cdot\alpha_1\cdot\Delta\theta + R_{2o}\cdot\alpha_2\cdot\Delta\theta = 0 \Rightarrow R = R_{1o} + R_{2o} = 250\ \Omega;$$

$R_{1o}\cdot\alpha_1 = R_{2o}\cdot\alpha_2$ $\Rightarrow$ $0.00427\cdot R_{1o} = - 0,0008\cdot R_{2o}$ $\Rightarrow$ $R_{20} = 5,3375\cdot R_{1o}$ $\Rightarrow$ $R_{1o} + 5,3375\cdot R_{20} = 250$ $\Rightarrow$
Konačna rešenja su $R_{10} = R_{Cuo} = 39,45\ \Omega$ i $R_{2o} = R_{uo} = 210,55\ \Omega$;

3.1.1. ----- 12 V; **3.1.2.** ----- 77,59 m; **3.1.3.** ----- $2\cdot10^{-2}$ S; **3.1.4**. ----- 10 A; **3.1.5.** ----- 3 A;

3.1.6.----- 40 V;

3.1.7. ----- $R = U/I = U_1/I_1 = (U + \Delta U)/(I + \Delta I) = (U + R\Delta I)/(I + \Delta I)$,
$\Delta U = R\Delta I \Rightarrow \Delta I = \Delta U/R = 30/10 = 3$ A, $I_1 = I + \Delta I \Rightarrow I = I_1 - \Delta I = 13 - 3 = 10$ A,
$U = IR = 10\cdot10 = 100$ V;

3.1.8. ----- $R_1 = U/I_1 = 142,7/8,62 = 16,55$ A,
$R_1 = R_o[1+\alpha(\theta_1 - \theta_o)] \Rightarrow R_o = 14,27\ \Omega, \Rightarrow I_o = U/R_o = 142,7/14,27 = 10$ A;

3.1.9. ----- $R_o = U/I = 100/10 = 10\ \Omega$, $R_1 = U/I_1 = 100/9,2 = 10,87\ \Omega$,
$R_1 = R_o[1 + \alpha(\theta_1 - \theta_o)] \Rightarrow \Delta\theta = \theta_1 - \theta_o = 22,31$ °C $\Rightarrow \theta_1 = 22,31 + \theta_o = 42,31$ °C;

3.1.10. ----- Obim jednog navojka iznosi $l_o = D\cdot\pi = 8\pi$. Ukupna dužina kalema je jednaka $l = N\cdot l_o \Rightarrow$
$l = 500\cdot8\cdot\pi = 4000\pi$ cm $= 40\pi$ m, Kako je površina $S_o = d^2\pi/4 = 0,2^2\pi/4 = 10^{-2}\pi$ mm$^2 \Rightarrow$
$R_o = \rho_o\cdot l/S = 0,0175\cdot40\pi/0,01\pi = 70\ \Omega$,
$R_1 = R_o[1+\alpha(\theta_1 - \theta_o)] = 70[1+0,0037\cdot(60 - 40)] = 80,36\ \Omega \Rightarrow$
$I = U/R = 12,06/80,36 = 0,15$ A = 150 mA;

3.1.11. ----- 21 V; 3.1.12. ----- 213 V;

3.1.13. ----- $R_p = U_p/I = 2,8/20 = 0,14\ \Omega$, $R_p = \rho l/S \Rightarrow S = \rho l/R_p = 0,0175\cdot200 / 0,14 = 35$ mm^2;

3.1.14. ----- $S = 15,4$ mm^2, a kako je standard 16 mm^2 uzima se presek $S_{Cu} = 16$ mm^2.

3.1.15. ----- $U = E - E_K = 12 - 9 = 3$ V $\Rightarrow R = U / I = 3 / 15 = 0,2\ \Omega$.

3.1.16. ------$R_e = R_g + R$, kada je P uključen
$R_e = U_i / I = 20 / 1,9 = 10,526\ \Omega$, $R = U_2 / I \Rightarrow I = U_2 / R = 19 / 10 = 1,9$ A $\Rightarrow$
$R_g = R_e - R = 0,526\ \Omega$;

3.1.17. ----- Kada je P uključen $\Rightarrow I_2 = I_{KS} = E / R_g = 120$ A $\Rightarrow E = 120\cdot R_g$,
a kada je P isključen $\Rightarrow E = I_1\cdot(R_g + R) \Rightarrow 120 R_g = 2,4\cdot(R_g + R) \Rightarrow R_g = 0,98\ \Omega$.

3.1.18. ----- a) Pad napona na generatoru iznosi : $U_g = E - U = 250 - 220 = 30$ V. Kako je $U_g = I\cdot R_g \Rightarrow$
$I = U_g / R_g = 30 / 0,2 = 150$ A;
b) $I_{KS} = E / R_g = 250 / 0,2 = 1\ 250$ A.

3.1.19. ----- Pri praznom hodu I = 0, a izmereni napon od 100 V je ujedno ems generatora ($E_i = 100$ V). Kako je pri uključenju otpornika od 1 KΩ napon pao na 50 V sledi da je preostalih 50 V otpalo na taj isti otpornik. U tom slučaju struja u kolu će iznositi (Omov zakon) I = U/R = 50/1000 = 50 mA.

3.1.20. ----- a) 125 Ω, b) 1 375 Ω.

3.1.21. ----- Da. To će se postići tako što se izmeri ems E izvora i struja kratkog spoja I_{KS} (kada je u kolu priključen samo otpor izvora R_i). Ems E izmeriti voltmetrom u režimu praznog hoda (potrošač isključen). Nakon toga , izvor kratko spojimo preko idealnog ampermetra, čime se meri struja kratkog spoja izvora. Kako je u režimu kratkog spoja uzvora u kolu bio prisutan samo otpor izvora R_i sledi: $\mathbf{R_i = E / I_{KS}}$.

3.1.22. ----- $R_1 = E / I_1 = 6 / 1 = 6\ \Omega$, $R_2 = E / I_2 = 6 / 0,85 = 7,06\ \Omega$,
$R_2 = R_1[1 + \alpha\cdot (\theta_2 - \theta_1)] \Rightarrow \alpha = (R_2 - R_1) / R_1\cdot(\theta_2 - \theta_1) = (7,06 - 6) / 6\cdot(40 - 0) \Rightarrow$
$\alpha = 0,0044$ 1/°C $\Rightarrow R_3 = R_1[1 + \alpha\cdot(\theta_3 - \theta_1)] = 6\cdot[1 + 0,0044\cdot(80 - 0)] = 8,112\ \Omega \Rightarrow$
$I_3 = E / R_3 = 6 / 8,112 = 0,74$ A.

3.1.23. ----- $P = E\,I_2 \Rightarrow I_2 = P / E = 60 / 6 = 10$ A, $R_2 = E / I_2 = 6 / 10 = 0{,}6\ \Omega$;
$R_2 = R_1[\,1 + \alpha\cdot(\theta_2 - \theta_1)] \Rightarrow R_1 = 0{,}5\ \Omega$; $R_1 = \rho_1 l / S \Rightarrow l = R_1\cdot S / \rho_1$; $S = d^2\pi / 4 \Rightarrow$
$S = 0{,}2^2\pi / 4 = 0{,}0314$ mm^2; $l = 0{,}5\cdot 0{,}0314 / 0{,}06 = 0{,}262$ m = 262 mm

3.2.1. ----- 90,84 Ω, 0,011 S; 3.2.2. ----- 10,47 m;

3.2.3. ----- $P = U\cdot I = U^2 / R \Rightarrow R = U^2 / P = 220^2 / 40 = 1\,210\ \Omega$,
Kako je $R = R_o[\,1 + \alpha\cdot(\theta - \theta_o)] \Rightarrow R_o = 110{,}8\ \Omega$,
Jačine struje iznose: $I = P / U = 40 / 220 = 0{,}18$ A, odnosno $I_o = U / R_o = 220 / 110{,}8 = 1{,}99$ A.
Iz dobivenih rešenja sledi da je struja na sobnoj temperaturi I_o jedanaest puta veća od struje na radnoj temperaturi I ($I_o / I \cong 11$).

3.2.4. ----- a) P = 26,4 KW ; b) ΔU = 17 V ; c) U = 237 V ; P = 28,45 KW ;

3.2.5. ----- a) 27 A ; b) 108 A/mm^2 ; c) 8,15 Ω ; 5 832 W ;

3.2.6. ----- 25 Ω; **3.2.7**. ----- 3,33 V; **3.2.8**. ----- 300 mA; 666,67 Ω ; **3.2.9**. ----- η = 87% ;

3.2.10. ----- 4,4 KW; 22 KW ; **3.2.11**. ----- 42,86 Ω ;

3.2.12. ----- $I = Q/t$; $W = I^2Rt = (Q/t)^2Rt = Q^2R/t = 40^2\cdot 10 / 20\cdot 60 = 13{,}333$ J ;

3.2.13. ----- $Q = n\cdot q_e = 18\cdot 10^{25}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19} = 28{,}8\cdot 10^6$ C; $W = I^2Rt = Q^2R / t \Rightarrow R = W\cdot t / Q^2$
$R = 800\cdot 6 / (28{,}8\cdot 10^6)^2 = 5{,}787\cdot 10^{-12}\ \Omega$,
$R = \rho_{Fe}\cdot l / S \Rightarrow l = R\cdot S / \rho_{Fe} = 5{,}787\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}5 / 0{,}0853 = 169{,}61\cdot 10^{-12}$ m ;

3.2.14. ----- $A = F\cdot l = 49{,}05\cdot 10^3\cdot 3 = 147{,}15\cdot 10^3$ J ;
$A = P_m\cdot t \Rightarrow P_m = A / t = 147{,}15\cdot 10^3 / 10 = 14\,715$ W ;

3.2.15. ----- $P_g = 3\,450$ W; $P_m = 3\,270$ W; $P_p = 180$ W ; **3.2.16**. ----- 7 dinara ;

3.2.17. ----- iznad 23,86 mm^2 (standard 25 mm^2); **3.2.18.** ----- 6,195 Ω;

3.2.19. ---- $P_k = \eta\cdot P = 6{,}8$ KW; **3.2.20**. ----42,3984 KWh; **3.2.21**.--- U = 253,6 V; $P_{iz} = 30{,}432$ KW;

3.2.22. ----- $P = UI = U^2 / R$; $P' = U'^2 / R'$; $U' = 2U$
Kako je $P = P' \Rightarrow U^2 / R = (2U)^2 / R' \Rightarrow R' / R = 4U^2 / U^2 = 4 \Rightarrow R' = 4R \Rightarrow$
$\rho l / S' = 4\cdot\rho l / S \Rightarrow S'\ S / 4$. Dakle, površina treba da se smanji četiri puta.

3.2.23. ----- $P_1 = U^2 / R_1$; $P_2 = U^2 / R_2 \Rightarrow P_1 / P_2 = R_2 / R_1 > 1$. Kako je otpor R_2 veći od otpora R_1, jer on nakon jednog sata više zagrejao, pa je snaga na otporniku R_1 veća od snage na otporniku R_2 ($P_1 > P_2$).

3.2.24. ----- Količina toplote vode iznosi: $Q = m\cdot c\cdot(\theta_2 - \theta_1) = 2\cdot 4\,184\cdot(\,100 - 15\,) = 711{,}28$ KJ , gde je c specifična količina toplote koja za vodu iznosi c = 4,184 KJ/kg°C = 4 184 J/kg°C. Kako je toplotna energija nastala iz električne, sledi da je električna energija, koja je pretvorena u toplotnu jednaka W = Q.
Stepen korisnog dejstva jednak je $\eta = W / W' \Rightarrow W' = W / \eta = 711{,}28 / 0{,}7 = 1\,016{,}11$ KJ. Iz ukupne energije mreže W′ ($W' = I^2Rt = U^2t/R$) izračunamo otpor žice, i on iznosi :
$R = U^2\cdot t / W' = 220^2\cdot 10\cdot 60 / 1\,016\,110 = 28{,}57958\ \Omega$. I na kroju ($R = \rho\cdot l / S$) odredimu ukupnu dužinu upotrebljene žice koja iznosi $l = R\cdot S / \rho_{Hr} = 28{,}57958\cdot 0.2^2\cdot\pi / 4\cdot 1{,}37 = 0{,}655$ metara.

3.2.25. ----- $R = 28{,}57958\ \Omega = \rho_{Cu} \cdot l_{Cu} / S \Rightarrow l_{Cu} = R \cdot S / \rho_{Cu} = 28{,}57958 \cdot 0{,}2^2 \cdot \pi / 4 \cdot 0{,}0175 = 51{,}28$ m
$l_{Cu} / l_{Hr} = 51{,}28 / 0{,}655 = 78{,}29$. Sledi zaključak, da bi ostvarili isti otpor bakarnom žicom ona treba da je duža od žice izrađene od hromonikla za 78,29 puta. Iz praktičnih, kao i ekonomskih razloga otpornici se izvode od onih materijala čija je specifična otpornost što veća (hromonikal, konstantan ....).

3.2.26. ----- a) $P' = P + \Delta P = P + 0{,}1 \cdot P = 1{,}1 \cdot P = 1{,}1 \cdot 100 = 110$ MW
$I = P / U = 100 \cdot 10^6 / 100 \cdot 10^3 = 1\,000$ A $\Rightarrow R = U / I = 100 \cdot 10^3 / 1\,000 = 100\ \Omega$; $\Delta R = 10\%R$, jer su snage (Džulovi gubitci) srazmerni sa otpornostima u rednoj vezi (iste struje).
$\Delta R = 0{,}1 \cdot 100 = 10\ \Omega = R_p$ (R_p je otpor provodnika). $R_p = \rho \cdot 2l/S \Rightarrow S = \rho \cdot 2l/R = 400\ mm^2 = 400 \cdot 10^{-6}\ m^2$
c) $I = P / U = 100 \cdot 10^6 / 10^4 = 10$ KA, $R = U / I = 10\,000 / 10\,000 = 1\ \Omega$;
$R_p = 0{,}1 \cdot R = 0{,}1\ \Omega = \rho \cdot 2l / S' \Rightarrow S' = \rho \cdot 2l / R = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 200 \cdot 10^3 / 0{,}1 = 4 \cdot 10^4 mm^2 = 0{,}04\ m^2$.

3.2.27. ---- $I = q / t = n \cdot q_e / t \Rightarrow R = Q \cdot t / (n \cdot q_e)^2 = 16{,}36\ \Omega$. (Vidi zadatak 3.2.13. gde je Q kol. toplote).

3.2.28. ----- Za 40 min $\Rightarrow W = I^2Rt = Q^2R / t \Rightarrow Q = 24 \cdot 10^3$ C.
Za 1 s $\Rightarrow Q_1 = Q / 40 \cdot 60 = 10$ C. Kako je $Q_1 = n \cdot q_e \Rightarrow n = Q_1 / q_e = 10 / 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 6{,}25 \cdot 10^{19}$.
Dakle, za 1 s proteći će $6{,}25 \cdot 10^{19}$ elektrona, a za 40 min (40·60 s) $6{,}25 \cdot 10^{19} \cdot 40 \cdot 60 = 15 \cdot 10^{22}$ elektrona.

3.2.29. ----- $P_1 = U_1^2 / R \Rightarrow R = U_1^2 / P_1 = 48{,}4\ \Omega$; $U_2^2 = P_2 \cdot R = 38\,720 \Rightarrow U_2 = 196{,}77$ V;
$\Delta U = U - U_2 = 23{,}23$ V.

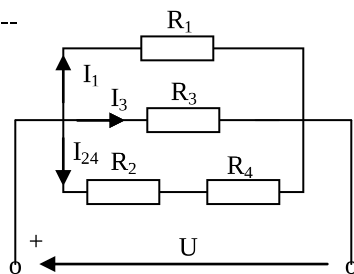
3.2.30. ----- Dalekovod daje snagu od 1 MW pri naponu od 6 KV, pa je struja koja teče kroz kolo jednaka $I = P / U = 10^6 / 6 \cdot 10^3 = 10^3/6$ A.
Potrošač će dobiti snagu (korisna snaga) $P_k = P - \Delta P$, tj. Razliku snage mreže i Džulovih gubitaka na dalekovodu (ΔP). Kako je $\Delta P = I^2R_p = (10^3/6)^2 \cdot 3{,}6 = 10^5$ W $\Rightarrow P_k = 10^6 - 10^5 = 900\,000$ W $= 0{,}9$ MW.
Stepen korisnosti iznosi $\eta = P_k / P = 900\,000 / 1\,000\,000 = 0{,}9$ (odnosno 90 %).

3.2.31. ----- Snaga koju treba preneti iznosi $P = UI = U \cdot J \cdot S$ (jer je $J = I/S \Rightarrow I = JS$).
Prilikom prenosa snage jedan njen deo se izgubi usled otpora provodnika, i taj deo gubitaka iznosi
$\Delta P = 0{,}01 \cdot P = = I^2R_p = (J \cdot S)^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot l / S = 0{,}01 \cdot U \cdot I = 0{,}01 \cdot U \cdot J \cdot S = J^2 \cdot S \cdot \rho \cdot 2 \cdot l$.
Ako izraz $0{,}01 \cdot U \cdot J \cdot S = J^2 \cdot S \cdot \rho \cdot 2 \cdot l$ podelimo sa $J \cdot S \Rightarrow 0{,}01 \cdot U = 2 \cdot J \cdot \rho \cdot l \Rightarrow U = 200 \cdot J \cdot \rho \cdot l$.

3.2.32. ----- Spec. el. otpor volframa na temperaturi od 2 400 °C iznosi: $\rho = \rho_o [\ 1 + \alpha \cdot (\ \theta - \theta_o\ )] \Rightarrow$
$\rho = 0{,}05 \cdot (\ 1 + 0{,}005238 \cdot 2\,380\ ) = 0{,}6733\ \Omega mm^2/m$ (ρ_o i α očitano iz tabele na kraju zbirke).
Otpornost zagrejane sijalice iznosi ($P = U^2/R$) $R = U^2/P = 484\ \Omega$.
Masa volframa **m** iznosi: $m = \rho_m \cdot V$, gde je $\boldsymbol{\rho_m}$ specifična masa volframa a **V** je zapremina utrošenog vlakna.
Dakle, masa iznosi: $m = \rho_m \cdot V = \rho_m \cdot S \cdot l \Rightarrow S \cdot l = m / \rho_m = 45 \cdot 10^{-3}[g] / 19{,}3[g/cm^3] = 2{,}33 \cdot 10^{-3}\ cm^3$.
Sledi $S = 2{,}33 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} / l = 2{,}33 \cdot 10^{-9} / l$, a kako je otpor $R = \rho l / S$, a presek $S = d^2\pi / 4 \Rightarrow$
$R = \rho \cdot l / (2{,}33 \cdot 10^{-9}/l) = \rho \cdot l^2 \cdot 10^9/2{,}33 \Rightarrow l^2 = 2{,}33 \cdot R / \rho \cdot 10^9 = 2{,}33 \cdot 484 / 0{,}6733 \cdot 10^{-6} \cdot 10^9 = 1{,}675 \Rightarrow$
$l = 1{,}294$ m.
(NAPOMENA: Kako je $S \cdot l$ u m^3 (dakle S u m^2 a l u m)specifični električni otpor treba izraziti u Ωm, jer je $\rho = R \cdot S/l\ [\Omega \cdot m^2/m = \Omega m]$.)
$S = 2{,}33 \cdot 10^{-9} / 1{,}294 = 1{,}8 \cdot 10^{-9} = 0{,}18 \cdot 10^{-8}\ m^2 = d^2 \cdot \pi / 4 \Rightarrow d^2 = 4 \cdot 0{,}18 \cdot 10^{-8}/\pi = 0{,}229 \cdot 10^{-8} \Rightarrow$
$d = 0{,}479 \cdot 10^{-4}$ m $= 0{,}0478$ mm.

3.2.33. ----- $P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{I^2Rt}{t} = I^2R = (JS)^2 \dfrac{U}{I} = J^2S^2 \dfrac{E \cdot l}{J \cdot S} = J \cdot S \cdot E \cdot l$ [W].

3.2.34. -----



$$P_2 = I_{24}{}^2 R_2 \Rightarrow I_{24} = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = 3[A],$$

$U = I_{24} \cdot (R_2 + R_4) = 3 \cdot 4 = 12$ V $\Rightarrow$

$I_1 = U/R_1 = 3$ [A].

$P_1 = I_1{}^2 R_1 = 3^2 \cdot 4 = 36$ [W]

4.1. ----- R; **4.2**. ----- R; **4.3.** ----- 0; **4.4.** ----- R/3 (jer su svi otpori vezani paralelno);

4.5. ----- R**;** **4.6.** ----- 4R/3**;**

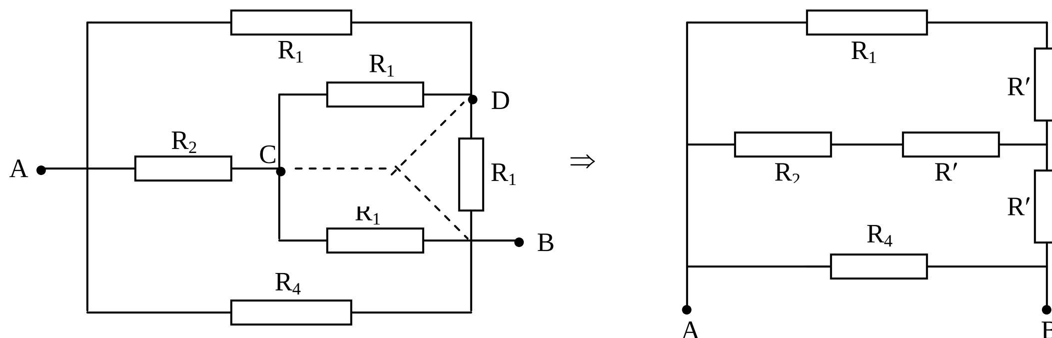
4.7. ----- Ako na tačke A i B priključimo neki napon U_{AB}, tada će na otpornicima doći do napona U_{AC}, U_{AD}, U_{BC}, U_{BD} i U_{CD}. Napon između tačaka C i D iznosi: $U_{CD} = U_{AD} - U_{AC} = (V_A - V_D) - (V_A - V_C) \Rightarrow$ $U_{CD} = V_C - V_D = 0$,jer su naponi U_{AC} i U_{AD} istog iznosa (jednaki otpori ⇒ jednake struje). Zbog toga kroz granu (dijagonalu) CD neće proticati struja, što znači da otpornik u toj dijagonali nema nikakvog uticaja. Ovakvo kolo (most) se nalazi u ravnoteži . Most će biti u ravnoteži kada je na jednoj dijagonali priključen napon (npr. dijagonala AB) a u drugoj dijagonali nema električne struje (u ovom slučaju dijagonala CD). Ako otpornik iz dijagonale CD izbacimo (jer njegova vrednost nema nikakva uticaja), sledi da je ukupni otpor između A i B jednak:

$$R_{AB} = (R + R)\cdot(R + R) / (R + R + R + R) = R.$$

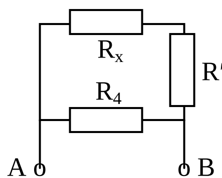
Zadatak se može rešiti i metodom transformacije, što se preporučuje čitaocu.

4.8. ----- a) 2 Ω; b) 7,22 Ω; c) 7,247 Ω; **4.9.** ----- a) 740 Ω; b) 580 Ω;

4.10. -----



Pretvaranjem trougla otpora vezanih između tačaka B C i D u otpore vezane u zvezdu nastaje druga slika u kojoj je otpor R′ jednak: $R' = R_1\cdot R_1 / (R_1+R_1+R_1) = R_1 / 3 = 3\ \Omega$.



$R_x = (R_1+R')\cdot(R_2+R') / (R_1+R'+R_2+R') = (12\cdot R_2+36) / (15+R_2)$
$R_{AB} = (R_x+R')\cdot R_4 / (R_x+R'+R_4) \Rightarrow$
$(R_x+R')\cdot R_4 = R_e\cdot(R_x+R'+R_4) \Rightarrow (R_x+3)\cdot 2{,}2 = 1{,}716\cdot(R_x+3+2{,}2) \Rightarrow$
$R_x = 4{,}8\ \Omega.$
$(12\cdot R_2+36) / (15+ R_2) = 4{,}8 \Rightarrow R_2 = 5\ \Omega.$

4.11. ----- 18 Ω;

4.12. --- $R_1 + R_2 = 40$, $R_1\cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 10 \Rightarrow R_1\cdot R_2 = 10\cdot(R_1 + R_2) = 10\cdot 40 = 400 \Rightarrow R_1 = 400 / R_2$
$(400 / R_2) + R_2 = 40 /\cdot R_2 \Rightarrow R_2^2 - 40R_2 + 400 = 0.$

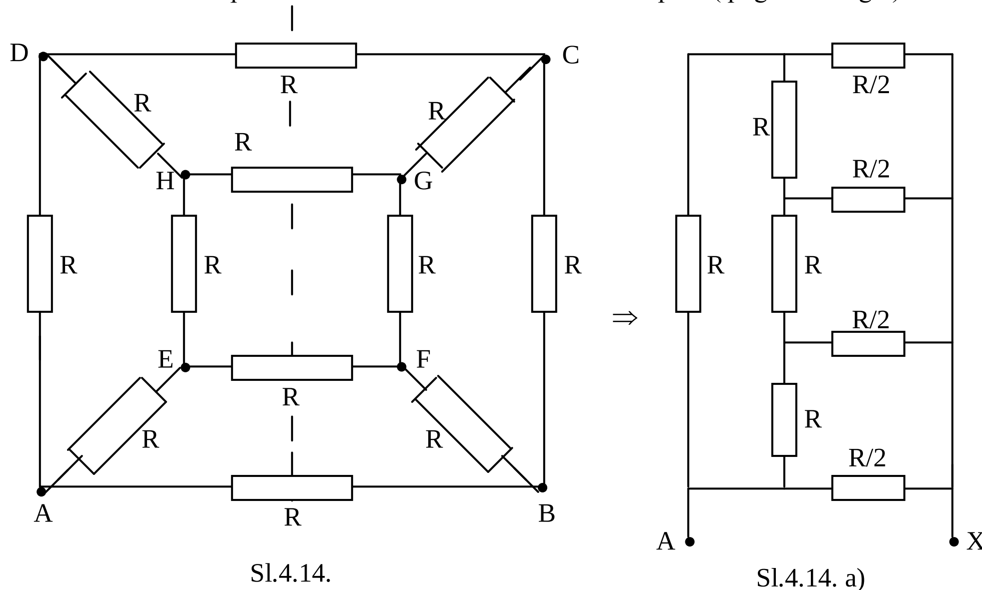
Rešenjem kvadratne jednačine ($ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \mathbf{x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$) , sledi

$$R_{2(1/2)} = (40 \pm \sqrt{40^2 - 4\cdot 400}) / 2 = (40 + 0) / 2 = 20 \quad (\text{Dakle } R_{2\,1} = R_{2\,2} = R_2 = 20\ \Omega.$$

Kako kvadratna jednačina ima dva rešenja, za prvo rešenje umesto predznakaznaka ″ ± ″ uzeti predznak ″+ ″ , a za drugo rešenje predznak ″ – ″. Za ovaj zadatak oba su rešenja ista, te sledi da je otpor $R_2 = 20\ \Omega \Rightarrow$ $R_1 = 400 / R_2 = 400 / 20 = 20\ \Omega$.

4.13. ----- $R_{AB} = 2\ \Omega$;

4.14. ----- Zadanu kocku otpora možemo razviti u sledeću mrežu otpora (pogled odozgo):



Sl.4.14. Sl.4.14. a)

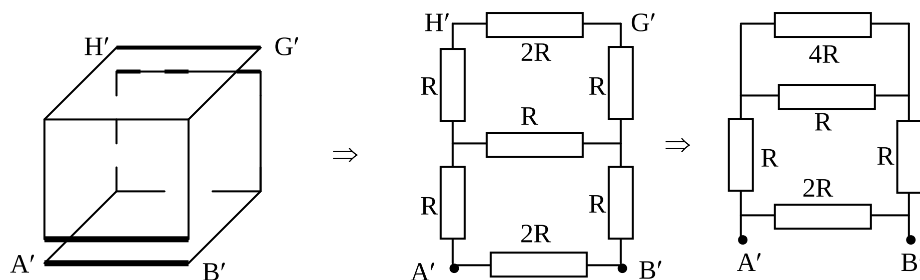
a)

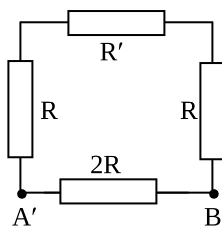
Ako mrežu kocke prema slici 4.14 presečemo jednom simetralnom ravni, tako da je dele na dve jednake polovine, tada će četiri otpornika iz četiri stranice da se podele na dve iste polovine. Na taj način nastaje slika 4.14. a). Kako su krajevi ovih polovina otpora na istom potencijalu (princim simetričnosti), tada ih možemo kratko prespojiti, pa nakon toga izračunati ukupni otpor između tačaka A i X. Da bi to mogli izračunati predhodno jedan od trougla otpora treba pretvoriti u zvezdu. Kada se to reši dobije se otpornost

$$R_{AX} = (7/24)R = 3{,}5\ \Omega.$$

Kako je na ovu polovinu redno spojena druga polovina kocke ukupna otpornost kocke između tačaka A i B (krajevi jedne ivice) iznosi: $R_{AB} = 2 \cdot R_{AX} = (7/12)R = 7\ \Omega$.

Ovo se može rešiti i tako što će mo umesto otpora u ivici AB i ivici HG zamisliti dva paralelno vezana otpora od 24 Ω, pa te ivice podeliti na dve polovine. Na taj način, sa razvijanjem presečene kocke, nastaje sledeća mreža.





$R' = 4R \cdot R / (4R + R) = (4/5)R = 4 \cdot 12 / 5 = 48 / 5\ \Omega$

$R_{A'B'} = 2R \cdot (R' + 2R) / (2R + R' + 2R) = 24 \cdot (48/5 + 24) / (24 + 48/5 + 24)$

$R_{A'B'} = 24 \cdot (48/5 + 120/5) / (48 + 48/5) = (24 \cdot 168/5) / (240/5 + 48/5)$

$R_{A'B'} = 24 \cdot 168 / 288 = 14\ \Omega$

Spajanjem druge polovine kocke, te dve polovine se vežu na iste tačke (AB) a to znači otpori su u paralelnoj vezi, pa je ukupni otpor između tačaka A i B jednak:

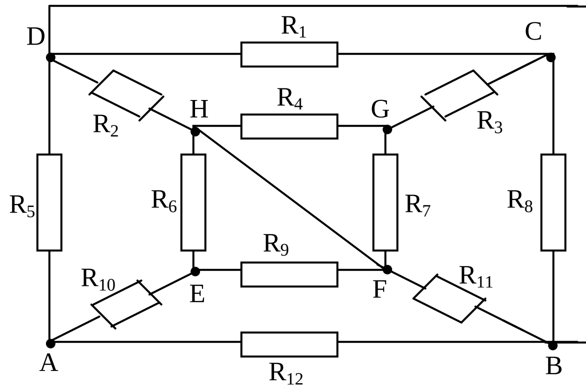
$$R_{AB} = R_{A'B'} \cdot R_{A'B'} / (R_{A'B'} + R_{A'B'}) = 7\ \Omega.$$

Dakle (u obe varijante) sledi da je otpornost na krajevima ivice kocke čije ivice imaju istu otpornost iznosi:

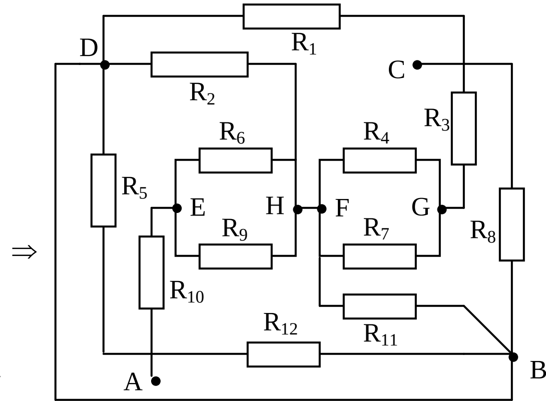
$$\mathbf{R_{AB} = (7/12)R}$$

b)

Da bi odredili otpornost po kraćoj dijagonali kocke (R_{AC}) predhodno odrediti koja su temena kocke na istom potencijalu, pa te tačke jednostavno kratko prespojiti. Po principu simetričnosti, kada se na tačke AC priključi napon, tada su tačke B i D na istom potencijalu. To isto važi za tačke F i H, te se slika 4.14. može transformisati u sliku 4.14. b) , odnosno 4.14. c)

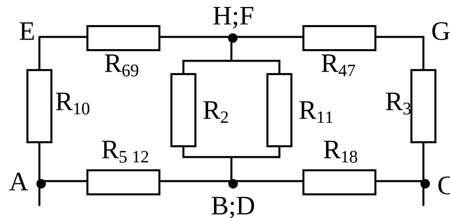


Sl.4.14.b)



Sl.4.14.c)

Dakle R_6 i R_9, R_4 i R_7, R_5 i R_{12}, R_1 i R_8 su u paralelnim vezama te je: $R_{69} = R_{47} = R_{5\,12} = R_{18} = R / 2 = 6\ \Omega$.
(R_5 i R_{12} su jednim krajem vezani na tačku A a drugim na tačku B odnosno D koje su na istom potencijalu. Isti je slučaj sa otporom R_1 i R_8 koji su vezani na tačku C i B odnosno D.). Sledi nova šema koja ima sledeći izgled:



$R_{2\,11} = R /2 = 6\ \Omega$

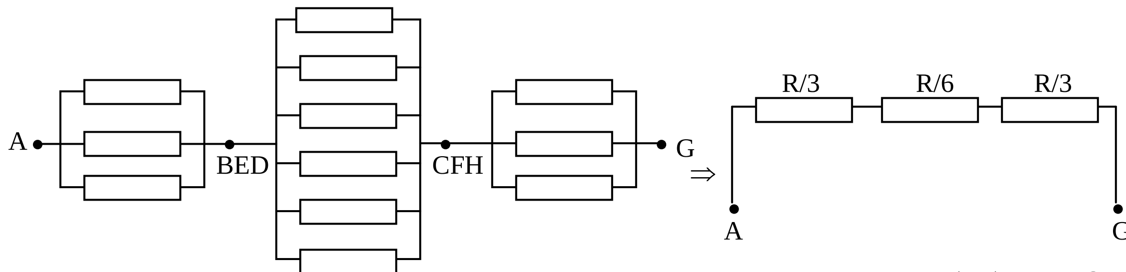
Po principu simetričnosti tačka H;F i BD je na istom potencijalu, pa se ova grana (dijagonala) može izbaciti iz mreže (vidi zad. 4.7.), pa sledi da je otpor između temena kraće dijagonale kocke (iste vrednosti otpora) jednak:

$$R_{AC} = \frac{(R_{10} + R_{69} + R_{47} + R_3)\cdot(R_{512} + R_{18})}{R_{10} + R_{69} + R_{47} + R_3 + R_{512} + R_{18}} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} \Rightarrow$$

$$R_{AC} = \left(3/4\right)R = 9[\Omega]$$

c)

Na osnovu simetrije, ako na temena kocke AG (veća dijagonala) dovedemo napon U, tada će tačke BED biti na istom potencijalu, a to isto važi i za tačke CFH. Kratkim prespajanjem tačaka istog potencijala sl.4.14 se transformiše u sliku 4.14. d)

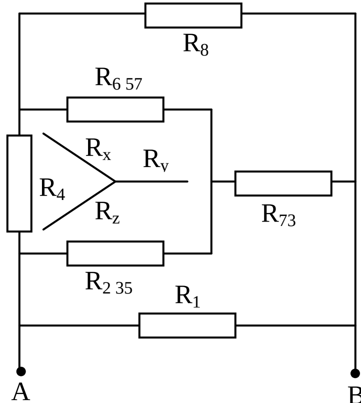


Sl.4.14. d)

$R_{AG} = R/3 + R/6 + R/3 = (5/6)R = 10\ \Omega$.

4.15. ----- $R_{AB} = 5\ \Omega$; $R_{CD} = 1{,}41\ \Omega$; **4.16.** ----- $R_{AB} = 7\ \Omega$ (metoda simetričnosti ili transformacije);

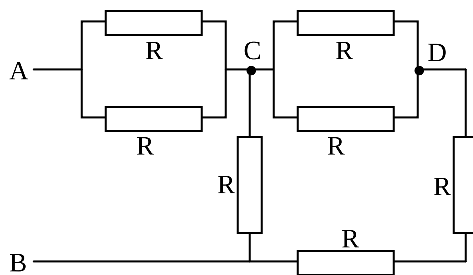
4.17. ----- Transformisati otpore u trouglu R_3, R_5 i R_7, te umesto njih nastaju otpori:
$R_{57} = R_5 \cdot R_7 / (R_3+R_5+R_7) = 5/3\ \Omega$; $R_{35} = R_3 \cdot R_5 / (R_3+R_5+R_7) = 5/9\ \Omega$; $R_{37} = R_3 \cdot R_7 / (R_3+R_5+R_7) = 1/3\ \Omega$;
Nakon toga sledi: $R_{6\,57} = R_6+R_{57} = 11/3\ \Omega$; $R_{2\,35} = R_2+R_{35} = 23/9\ \Omega$.
Data slika sada ima sledeći izgled:



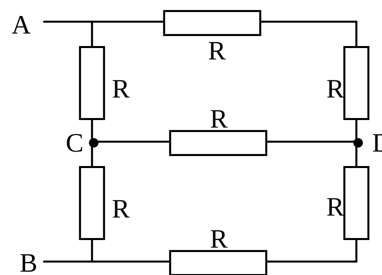
Otpore R_4, $R_{6\,57}$ i $R_{2\,35}$ pretvoriti u zvezdu (u otpore R_x, R_y i R_z). Nakon ove transformacije slede sledeće otpornosti:
$R_x = R_4 \cdot R_{6\,57} / (R_4 + R_{6\,57} + R_{2\,35}) = 0{,}508\ \Omega$;
$R_y = R_{6\,57} \cdot R_{2\,35} / (R_4 + R_{6\,57} + R_{2\,35}) = 1{,}298\ \Omega$;
$R_z = R_4 \cdot R_{2\,35} / (R_4 + R_{6\,57} + R_{2\,35}) = 0{,}354\ \Omega$.
Daljim rešavanjem ove uprošćene mreže dobije se ekvivalentni otpor između tačaka A i B, koji iznosi:

$R_{AB} = 1{,}049\ \Omega$.

4.18.



Sl.4.18. a)



Sl.4.18. b)

Kada je prekidač uključen sledi: $R_{AB} = R/2 + R \cdot (R/2 + 2R) / (R + R/2 + 2R) = 6{,}071\ \Omega$ (sl. 4.18. a.)
Kada se prekidač ukluči, nastaje slika 4.18. b), i zbog simetričnosti mreže, tačka C i tačka D je na istom potencijalu, pa se otpornik koji je vezan između tih tačaka može isključiti (nema nikakvog uticaja). U tom slučaju otpor između tačaka A i B iznosi:

$$R_{AB} = 2R \cdot 4R / (2R + 4R) = 20/3\ \Omega.$$

4.19. ----- Pri otvorenom prekidaču: $R_{AB} = 158{,}9\ \Omega$; a pri zatvorenom prekidaču: $R_{AB} = 49\ \Omega$.

4.20. ----- $R_A = 44\ \Omega$; $I = 5{,}23$ A;

4.21.

P u položaju 1:
Ampermetar meri: $I = E / (R_g+R_1+R_2+R_3) = 2{,}5$ A;
Voltimetri mere: V_1----- $U_1 = I_1 \cdot (R_1+R_2+R_3) = 38{,}5$ V; V_2----- $U_2 = I_1 \cdot R_1 = 10{,}5$ V;
V_3----- $U_3 = I_1 \cdot R_2 = 6{,}75$ V; $V_4 = I_1 \cdot R_3 = 21{,}25$ V;

P u položaju 2:
Ampermetar pokazuje: $I_2 = E / (R_g+R_1+R_{v3}+R_3)$, a kako je R_{v3} beskonačno $\Rightarrow I_2 = 0$ A;
Izvor (generator) radi u praznom hodu, te je pokazivanje voltmetra V_1 jednako E , tj. $U_1' = 40{,}5$ V.
Ostzali voltmetri mere nulu ($U_2' = U_3' = U_4' = 0$ V);

P u položaju 3:
Ampermetar meri: $I_3 = E / (R_g+R_1+R_3) = 3$ A
Voltmetri mere: V_1----- $U_1'' = I_3 \cdot (R_1+R_3) = 38{,}1$ V; V_2----- $U_2'' = I_3 \cdot R_1 = 12{,}6$ V;

V_3----- $U_3'' = 0$ V (Sva struja protiče kratkom vezom – kroz voltmetar ne protiče, a samim tim nema pomeranja kretnog mehanizma, odnosno kazaljke.); V_4----- $U_4'' = I_3 \cdot R_3 = 25{,}5$ V.

4.22. ----- a) $I = (U - E_1 - E_2) / (R_1 + R_2) = -10/3$ A; b) $I = (-U - E_1 - E_2) / (R_1 + R_2) = -14/3$ A.

4.23. ----- $I = (E_1 - E_2) / (R_{g1} + R_{g2} + R_1 + R_2) = 0{,}6$ A, i njen se smer poklapa sa smerom ems E_1;
$U_{g1} = I \cdot R_{g1} = 0{,}24$ V; $U_{g2} = I \cdot R_{g2} = 0{,}12$ V; $U_{R1} = I \cdot R_1 = 16{,}8$ V; $U_{R2} = I \cdot R_2 = 6{,}84$ V;
Snage na otpornicima iznose: $P_{R1} = I^2 R_1 = 10{,}08$ W; $P_{R2} = I^2 R_2 = 4{,}104$ W;
Snage koju daju izvori su jednake: $P_1' = E_1 I = 28{,}8$ W; $P_2' = E_2 I = 14{,}4$ W,
Džulovi gubitci u samom izvoru su: $P_{g1} = I^2 R_{g1} = 0{,}144$ W; $P_{g2} = I^2 R_{g2} = 0{,}072$ W;
Ukupna snaga koju daju izvori iznosi: $P_\Sigma' = (E_1 - E_2) \cdot I = P_1' - P_2' = 14{,}4$ W (Kako su izvori suprotnih smerova oni daju rezultantnu ems $E_R = E_1 - E_2$, a samim tim i njihove snage se međusobno oduzimaju.);
Ukupna snaga koju daju generatori mora da pokrije ukupnu snagu koja će se rasporediti na sve potrošače (otpornike) uključujući i unutrašnje Džulove gubitke u generatorima.Dakle, sledi:
$P_\Sigma' = P_1' - P_2' = P_{g1} + P_{g2} + P_{R1} + P_{R2} \Rightarrow 14{,}4 = 0{,}144 + 0{,}072 + 10{,}08 + 4{,}104 \Rightarrow 14{,}4 = 14{,}4$ .Ovo rešenje potvrđuje tačnost zadatka.

4.24. ----- 3 Ω; **4.25.** ----- $I = 12$ A; $I_1 = 10$ A; $I_2 = 2$ A; $I_3 = 4{,}5$ A; $I_4 = 7{,}5$ A;

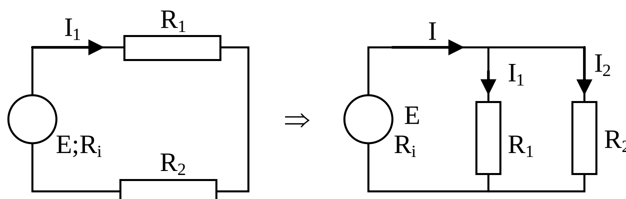
4.26. ----- $I = (-E_1 + E_2 + E_3) / (R_1 + R_2 + R_{g2} + R_{g3} + R_{g4}) = 105/55 = 1{,}91$ [A].
$U_{R1} = U_{R2} = IR_1 = IR_2 = 38{,}2$ V; $U_{Rg2} = U_{Rg3} = U_{Rg4} = IR_{g2} = 9{,}55$ V;
Kako struja teče od većeg potencijala ka manjem, te sledi da su tačke 2, 3 i 4 na većem potencijalu od tačke 1, koja je na nultom potencijalu. Potencijal tačaka 2, 3 i 4 je ujedno napon između tih tačaka i tačke 1, te je:
$V_2 = U_{21} \Rightarrow U_{21} - E_1 = 0 \Rightarrow V_2 = U_{21} = 20$ V; $V_3 = U_{31} \Rightarrow U_{31} - IR_2 - E_1 = 0 \Rightarrow V_3 = U_{31} = E_1 + IR_2 = 58{,}2$ V;
$V_4 = U_{41} \Rightarrow U_{41} - IR_{g2} + E_2 - IR_2 - E_1 = 0 \Rightarrow V_4 = U_{41} = 27{,}75$ V.

4.27. ----- $I = (E_1 + E_2) / (R_{g1} + R_{g2} + R_1 + R_2) = 0{,}667$ A; $V_A = U_{AO} = 6{,}67$ V; $V_B = 2{,}66$ V; $V_C = 13{,}34$ V.

4.28. ----- Ako otpore iz trougla R_1, R_g i R_3 pretvorimo u zvezdu, dobijemo sledeće vrednosti otpora:
$R_{1g} = R_1 R_g / (R_1 + R_g + R_3) = 22{,}5$ Ω; $R_{13} = R_1 R_3 / (R_1 + R_g + R_3) = 15$ Ω; $R_{3g} = R_3 R_g / (R_1 + R_g + R_3) = 27$ Ω;
Ukupni otpor kola iznosi: $R = 80$ Ω, te ukupna struja je jednaka: $I = E / R = 0{,}3$ A.
Kako je: $U_{AB} - I_2 R_2 + I_4 R_4 = 0$, treba predhodno izračunati struje I_2 i I_4 kako bi odredili traženi napon U_{AB}.
Rešenja struja su: $I_2 = 0{,}18$ A, a $I_4 = 0{,}12$ A $\Rightarrow U_{AB} = -0{,}81$ V $\Rightarrow I_g = U_{AB}/R_g = -0{,}009$ A; $U_i = IR_i = 5{,}1$ V.

4.29. ----- Trougao otpora R_1, R_2 i R_3, kao i R_6, R_7 i R_8 pretvoriti u zvezdu otpora. Otpori pretvoreni u zvezdu imaju sledeće vrednosti: $R_{12} = R_{23} = R_{31} = 2/3$ Ω, odnosno $R_{67} = 1/9$ Ω, $R_{78} = 7/9$ Ω i $R_{68} = 7/9$ Ω.
Nakon toga izračunati ekvivalentni otpor kola, i on iznosi: $R_e = 5$ Ω.
Uz pretpostavku da je tačka A na većem potencijalu od tačke B slede sledeće vrednosti struja:
$I_1 = 2$ A; $I_2 = 3$ A; $I_3 = 1$ A (sa smerom prema dole); $I_4 = 1$ A; $I_5 = 4$ A; $I_6 = 3$ A (smer prema gore);
$I_7 = 4$ A; $I_8 = 1$ A.

4.30. -----



$U = I_1 R_1 \Rightarrow I_1 = U / R_1 = 10/5 = 2$ A,
$I_2 = U / R_2 = 10/10 = 1$ A,
$I = I_1 + I_2 = 3$ A
$E = I_1 \cdot (R_i + R_1 + R_2) = I \cdot [R_i + R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)]$
$2 \cdot (R_i + 5 + 10) = 3 \cdot [R_i + 10 \cdot 5/(10+5)] \Rightarrow$
$R_i = 20$ Ω $\Rightarrow$ $E = 70$ V:

4.31. --Da bi ukupna struja ostala ista, ukupni otpor mora bitti isti, te je: $R_1 = R + (R + R_1) \cdot R / (R + R_1 + R) \Rightarrow$
$R_1 = 10 + (10 + R_1) / (20 + R_1) \Rightarrow R_1^2 = 300 \Rightarrow R_1 = 10\sqrt{3} = 17{,}3$ Ω $\Rightarrow$ $I = E / R_1 = 0{,}693$ A

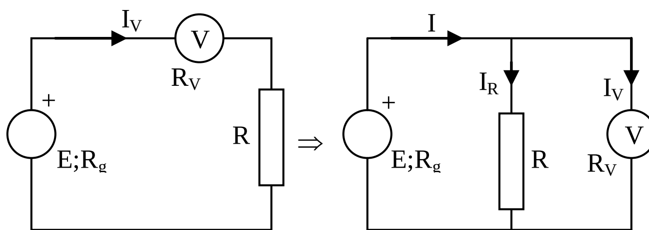
4.32. ----- Trougao otpora ABC pretvoriti u zvezdu. Nakon toga izračunati ekvivalentni otpor, čije je konačno rešenje $R_e = 5{,}9\ \Omega$. Struja iznosi: $I = E/R = 1{,}69$ A. Napon $U_{AB} = -2{,}1$ V $\Rightarrow U_{BA} = 2{,}1$ V, što govori da je tačka B na većem potencijalu od tačke A za 2,1 V.

4.33. ----- a) $R_4 = R_2 \cdot R_3 / R_1 = 3\ \Omega$; b) isto nulu, jer kada je most u ravnoteži dijagonale se mogu zameniti, odnosno izvor i galvanometar. (Uslov ravnoteže mosta: $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$).

4-34. ----- Otpor R nema nikakvog značaja, jer je nastala ravnoteža mosta (simetrično kolo). Dakle, na krajevima otpora R nema razlike potencijala, pa se on može i isključiti iz kola. Kada se on izbaci iz kola, sledi: $I = E / (R_1 + R_2) = 10/25 = 0{,}4$ A.

4.35. ----- Kod redne veze $\Rightarrow W_{Ag} / W_{Al} = I^2 \cdot R_{Ag} \cdot t / I^2 \cdot R_{Al} \cdot t = R_{Ag} / R_{Al} = \rho_{Ag} / \rho_{Al} = 0{,}56$.
Kod paralelne veze $\Rightarrow W_{Ag} / W_{Al} = (U^2/R_{Ag}) \cdot t / (U^2/R_{Al}) \cdot t = R_{Al} / R_{Ag} = \rho_{Al} / \rho_{Ag} = 1{,}79$.

4.36. -----



Struja voltmetra je ista (pravi isto pomeranje kazaljke), pa sledi:
$E = I_V \cdot (R_g+R_V+R) = I \cdot [R_g+R \cdot R_V / (R+R_V)]$
$\Rightarrow I_V \cdot (R_g+1010) = I \cdot (R_g+10000/1010)$
$I = I_V+I_R= I_V+I_V R_V / R=I_V \cdot (R_V+R)/R$
$I = 101 I_V \Rightarrow$
$I_V (R_g+ 1\,010) = 101 \cdot I_V(R_g + 1\,000/101)$
$\Rightarrow R_g + 1\,010 = 101 R_g + 1\,000 \Rightarrow$
$R_g = 0{,}1\ \Omega$.

4.37. ----- $U_1 = 132$ V; $U_2 = 120$ V; **4.38.** -----$E = 12$ V; $r = 2\ \Omega$;

4.39. ----- V_1 i V_3 manju a V_2 veću vrednost; **4.40.** ----- $r = 4\ \Omega$; $E = I_1 \cdot r = 24$ V;

4.41. ----- kod paralelne veze $P_2 = 1{,}5 \cdot P_1$; kod redne veze $P_1 = 1{,}5 \cdot P_2$;

4.42. ----- Proključala voda u oba slučaja ima istu količinu toplote, pa sledi:
$P_1 \cdot t_1 = P_2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 / t_1 = P_1 / P_2 = 2 \Rightarrow P_1 = 2P_2$; $P_1 = U^2 / R_1$; $P_2 = U^2 / R_2 \Rightarrow U^2 / R_1 = 2\, U^2 / R_2 \Rightarrow$
$R_2 = 2R_1$.
Kod redne veze otpornika: $R_r = R_1 + R_2 = R_1 + 2R_1 = 3R_1$, pa je snaga jednaka $P_r = U^2 / R_r = U^2/3R_1 = P_1/3$, što znači da je kod redne veze ukupna snaga manja od snage prvog grejača za tri puta.
Kod paralelne veze ukupni otpor iznosi: $R_p = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = R_1 \cdot 2R_1 / (R_1 + 2R_1) = 2/3\, R_1 \Rightarrow$
$P_p = U^2 / R_p = U^2 / (2/3)R_1 = (3/2) \cdot U^2 / R_1 = 1{,}5 \cdot P_1$. Snaga kod paralelne veze je veća od snage prvog grejača za 1,5 puta. Kako je količina toplote ista (voda ključa), sledi:
$P_p \cdot t_p = P_1 \cdot t_1 \Rightarrow 1{,}5 \cdot P_1 \cdot t_p = P_1 \cdot t_1 \Rightarrow t_p = t_1 / 1{,}5 = 15/1{,}5 = 10$ minuta.

4.43. ----- 13,5 A; **4.44.** -----18 A; **4.45.** ----- 3 A; **4.46.** ----- $U = E \cdot R / (R + R_i)$;

4.47. ----- $U_i = E \cdot R_i / (R + R_i)$; **4.48**. ----- 240 A; **4.49.** ----- E / R_i**;** **4.50.** ----- $I_1 / I_2 = 1$;

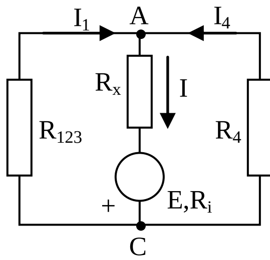
4.51. ----- $E^2 \cdot R / (R + R_i)^2$; **4.52.** ----- $E^2 \cdot R_i / (R + R_i)^2$; **4.53.** ----- $R / (R + R_i)$; **4.54**. ----- 0,5;

4.55. ----- $R >> R_i$ ($R_i \cong 0$) $\Rightarrow R_i / R \cong 0$; **4.56.** ----- DRUGI, jer je njegova struja veća;

4.57. ----- PRVI, jer je njegova otpornost veća (struje su iste); **4.58.** ----- $U_{AB} = 86$ V;

4.59. ---- Ako pretpostavimo da se smer struja I_1 i I_2 poklapa sa smerom ems u datim granama (E_1 i E_2), tada, prema kirhofovim pravilima slede jednačine: $I_1 + I_2 + I = 0$, odnosno (za $V_C > V_A$) $\Rightarrow$
$U_{CA} - I_1R_1 + E_1 + I_2R_2 - E_2 = 0$. Uvrštavanjem datih podataka nastaju sledeće dve jednačine sa dve nepoznate: $I_1 + I_2 + 8 = 0$; i $4\,I_2 - 3\,I_1 + 40 = 0$. Rešenjem sistema navedenih jednačina dobiju se rešenja: $I_1 = -\,64/7$ A, što će reći da ona teče od tačke B ka C; $I_2 = 8/7$ A , sa smerom od tačke A ka B.

4.60. -----



a) $R_{123} = R_1 + R_2{\cdot}R_3 / (R_2 + R_3) = 110\ \Omega$; $I_4 = U_4 / R_4 = 0{,}4\ \Omega$;
$I_1{\cdot}R_{123} = I_4{\cdot}R_4 \Rightarrow I_1 = I_4{\cdot}R_4 / R_{123} = 1$ A; $I = I_1 + I_4 = 1{,}4$ A;
$U_{DB} - I_1R_1 + I_4R_4 = 0 \Rightarrow U_{DB} = -\,40$ V $\Rightarrow U_{BD} = 40$ V; dakle, tačka B je za 40 V na većem potencijalu od tačke D.

b) $R_e = E / I = 127/1{,}4 = 90{,}71\ \Omega$; Kako je
$R_e = R_i + R_x + R_{123}{\cdot}R_4 / (R_{123} + R_4) = 2 + R_x + 110{\cdot}275 / (110 + 275) \Rightarrow$
$R_x = R_e - 2 - 110{\cdot}275 / 385 = 90{,}71 - 2 - 78{,}57 = 10{,}4$ [Ω]

c) $I' = E / (R_1 + R_x + R_4) = 0{,}44$ A $\Rightarrow U_4 = I'{\cdot}R_4 = 121{,}6$ V.

4.61. ----- P_1 ZATVORENO, P_2 OTVORENO: $R_e = R$,
P_1 OTVORENO, P_2 ZATVORENO: $R_e = r + r{\cdot} (r + R) / (r + r + R)$.
Da bi struja ostala ista otpor u oba slučaja mora biti isti, pa sledi:
$R = r + r{\cdot} (r + R) / (r + r + R) \Rightarrow R = r\sqrt{3} = 3\ \Omega$.

4.62. ----- a) $I_1 = 15$ A; $I_3 = 2$ A; $I_4 = 9$ A; $U_{BC} = 18$ V;
b) $R_3 = 9\ \Omega$; $R_2 = 4{,}5\ \Omega$;
c) $I_1' = 12{,}1$ A; $I_2' = 3{,}23$ A; $I_4' = 7.26$ A; $P_3' = 23{,}43$ W; $P' = 762{,}3$ W.

4.63. ----- Za P ISKLJUČENO: $I_1 = I_2 = E / (R_1 + R_2) = 18$ mA; $U_1 = IR_1 = 45$ V; $U_2 = IR_2 = 27$ V;
P UKLJUČENO: $R_e' = R_1{\cdot}R_3 / (R_1 + R_3) + R_2{\cdot}R_4 / (R_2 + R_4) = 1{,}6875\ \Omega \Rightarrow I' = E / R_e' = 42{,}667$ mA;
$U_{13}' = I'{\cdot}R_{13} = 40$ V; $U_{24}' = I'{\cdot}R_{24} = 32$ V; $U_1' = U_{13}' = 40$ V; $U_2' = U_{24}' = 32$ V;
$\Delta U_1 = U_1 - U_1' = 45 - 40 = 5$ [V]; $\Delta U_2 = U_2 - U_2' = 27 - 32 = -\,5$ [V].

4.64. ----- $I_1 = 1{,}3$ A; $I_2 = 6{,}67$ A; $I = 7{,}97$ A; $E = U_{12} + I (R + r) = 101{,}73$ [V].

4.65. ----- a) $R_x = 120\ \Omega$; $E = 62$ V; b) $P_3' = 14{,}58$ W.

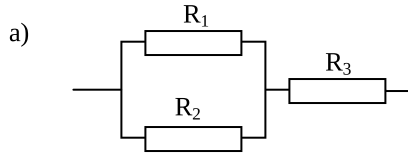
4.66. ----- $R_x = 1\,000\ \Omega$; $E = 8{,}4$ V; **4.67.** ----- $l_1 = 13{,}98$ m; $l_2 = 6{,}99$ m.

4.68. ----- $P_1 = U^2 / R_1 \Rightarrow R_1 = U^2 / P_1 = 32{,}27\ \Omega$; $R_2 = U^2 / P_2 = 48{,}4\ \Omega$ i $R_3 = U^2 / P_3 = 96{,}8\ \Omega$;
Iz $R = R_o{\cdot}(1 + \alpha{\cdot}\Delta\theta) \Rightarrow R_{o1} = R_1 / (1 + \alpha{\cdot}\Delta\theta) = 32{,}27 / (1 + 2{\cdot}10^{-7}{\cdot}850) = 32{,}26\ \Omega$;
$R_{o2} = 48{,}4 / (1 + 2{\cdot}10^{-7}{\cdot}850) = 48{,}39\ \Omega$; $R_{o3} = 96{,}8 / (1 + 2{\cdot}10^{-7}{\cdot}850) = 98{,}78\ \Omega$.
Može se izvući zaključak da je promena otpora neznatna sa promenom temperature ($\alpha \cong 0$). To znači da se otpor u ovom opsegu nije menjao, a to praktično znači da je temperaturni sačinilac isti i na 850 °C kao i na temperaturi 0 °C.
$S = d^2\pi / 4 = 0{,}6^2{\cdot}\pi / 4 = 0{,}2826\ mm^2$; $R = \rho{\cdot}l / S \Rightarrow l_1 = R_{o1}{\cdot}S / \rho = 32{,}26 \cdot 0{,}2826 / 1{,}37 = 6{,}65$ m;
$l_2 = R_{o2}{\cdot}S / \rho = 10{,}52$ m; $l_3 = R_{o3}{\cdot}S / \rho = 21{,}47$ m.
Najmanja snaga se postigne sa rednom vezom grejača (najmanja jačina struje): $R_R = R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow$
$R_R = 177{,}47\ \Omega \Rightarrow P_R = U^2 / R_R = 220^2 / 177{,}47 = 272{,}72$ W;
Kod paralelne veze ukupna snaga jednaka je zbiru pojedinačnih (snaga je najveća):
$P_P = P_1 + P_2 + P_3 = 3\,000$ W.
Ako povežemo R_1 i R_2 paralelno i na tu vezu redno $R_3 \Rightarrow R_e = R_3 + R_1{\cdot}R_2 / (R_1 + R_2) = 116{,}16\ \Omega \Rightarrow$
$P_e = U^2 / R_e = 416{,}67$ W.
Čitaocu se preporučuje da izračuna snagu za neku drugu kombinaciju, i sve te snage poredati po veličini (idući od manje vrednosti ka većoj). Zašto je snaga kod paralelne veze najveća?

4.69. ----- a) 250 W; b) 333 W; c) 500 W; d) 1000 W; e) 1500 W; f) 2500 W.

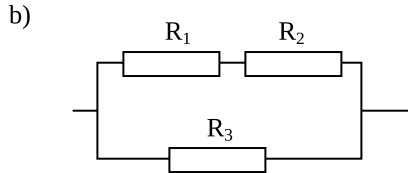
4.70. -----

a)



$R_3 = 2R_{12}$, jer je $R_{12} = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = R / 2$;
$P_3 = 2P_1$; Kako je $I_3 = I_{12} \Rightarrow P_3 = 48$ W; $P_{12} = 24$ W;
$P_1 = P_2 = 12$ W;
Ukupna snaga sistema je: $P = P_1 + P_2 + P_3 = 72$ W.

b)



$R_3 = R$; $R_{12} = R_1 + R_2 = 2R$;
$P_3 = U^2 / R_3 = U^2 / R$; $P_{12} = U^2 / R_{12} = U^2 / 2R$;
$P_3 / P_{12} = 2R / R = 2 \Rightarrow P_3 = 2P_{12} \Rightarrow$
$P_3 = 48$ W; $P_{12} = 24$ W $\Rightarrow P_1 = P_2 = 12$ W;
Ukupna snaga sistema je: $P' = P_1 + P_2 + P_3 = 72$ W.

4.71. ----- $U_{CB} = V_C - V_B$; $U_{CD} = V_C - V_D$;
$U_{CB} - U_{CD} = V_C - V_B - (V_C - V_D) = V_D - V_B = U_{DB} \Rightarrow U_{DB} = 12 - 10 = 2$ V $\Rightarrow I_2 = U_{DB} / R_4 = U_4 / R_4 \Rightarrow$
$I_2 = 1$ A $\Rightarrow U_{AD} = I_2 \cdot R_2 = 4$ V;
$U_{AB} = U_1 = I_2 \cdot (R_2 + R_4) = 6$ V; $U_{CB} - I_3R_3 - I_1R_1 = 0 \Rightarrow U_{CB} - I_3R_3 - U_{AB} = 0 \Rightarrow I_3R_3 = U_{CB} - U_{AB} \Rightarrow$
$I_3R_3 = 12 - 6 = 6$ V $\Rightarrow I_3 = 6/2 = 3$ A; Kako je $I_3 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = 2$ A $\Rightarrow R_1 = U_{AB} / I_1 = 6/2 = = 3\ \Omega$.

4.72. ----- Prvi ampermetar pokazuje 5 A, drugi i treći 10 A a četvrti 15 A.

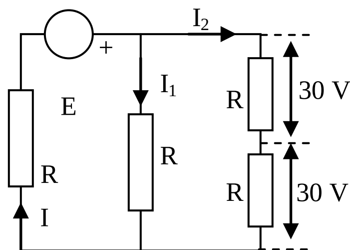
4.73. ----- a) $I_1 = 15$ A; $I_2 = I_3 = I_4 = 0$ A; $U_1 = 0$ V; b) $I_1 = 11{,}25$ A; $I_2 = I_3 = I_4\ 3{,}75$ A; $U_1 = 37{,}5$ V.

4.74. ----- Kako je struja grane sa ampermetrom jednaka nulu u oba slučaja, sledi da ems E nema nikakvog uticaja na struju u preostalom delu kola, koja je ostala ista (I = U/2R). Na prvom otporniku je prisutan napon U/2 i on je isti u oba slučaja, jer je i struja ista. To znači da je ta vrednost ems E već prisutna na prvom otporniku i ona iznosi E = U/2 = 25 V. Za ovakav slučaj se može reći da je došlo do kompenzacije date ems E. Ovako rade kompenzatori (meri vrednost kompenzovanog napona – ems E).

4.75. ----- 0,75 A.

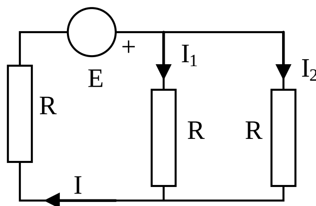
4.76. -----

P ISKLJUČEN:



$R_e = R + R \cdot 2R / (R + 2R) = 5R/3$;
$E = IR_e$
$I_1 = 60/R$; $I_2 = 60/2R$;
$I = I_1 + I_2 = 60/R + 60/2R = 90/R$
$E = (90/R) \cdot (5R/3) = 150$ V:

P UKLJUČEN:

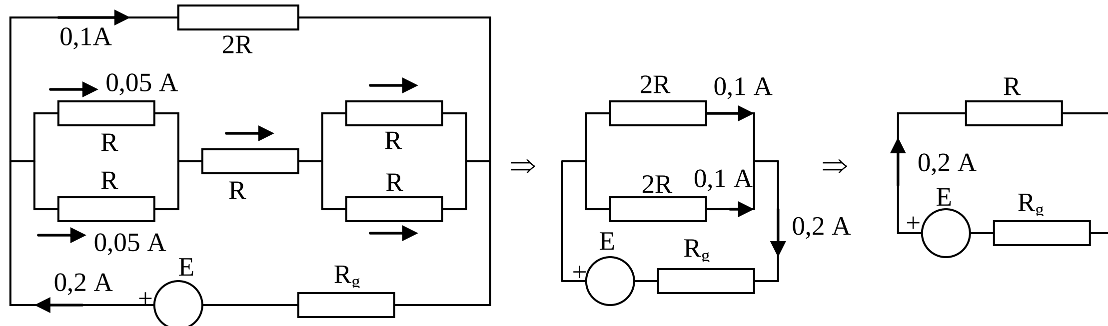


$R_e = R + R \cdot R / (R + R) = 3R/2$;
$I = E / R_e = 150 / (3R/2) = 100/R$;
$I_2 = I/2 = 50/R \Rightarrow$
$U_V = I_2 \cdot R = (50/R) \cdot R = 50$ V.

4.77. ----- Uključenjem P S_3 je u paralelnoj vezi sa otporom R. Otpor ove paralelne veze postaje manji, a to dovodi do pada napona na sijalivi <u>S_3, te će ona slabije da svetli</u>.
Kroz sijalicu S_2 protiče veća struja, jer je sada njoj u rednoj vezi S_3 i otpor R (manja vrednost). Posledica je <u>jača svetlost sijalice S_2</u>.
<u>S_1 će da svetli istom jačinom</u>, jer se nalazi na istom naponu, bez obzira u kojem je položaju prekidač.

4.78. ----- **P isklj**.: $P = I_1^2 \cdot R_1 = [\,E / (R_3 + R_1)]^2 \cdot R_1$; **P uklj**: $P' = I_{12}^2 \cdot R_{12} = [\,E / (R_3 + R_{12})]^2 \cdot R_{12}$.
$[\,E^2 / (R_3 + R)^2\,] \cdot R = [\,E^2 / (R_3 + R/2)^2\,] \cdot R/2 \Rightarrow R_3 = [R \cdot (\sqrt{2} - 1)] / (2 - \sqrt{2}) = 4{,}1 / 0{,}59 = 6{,}95\ [\Omega]$.
Vidi rešenje zadatka 21 (Razni zadaci) na kraju ove knjige.

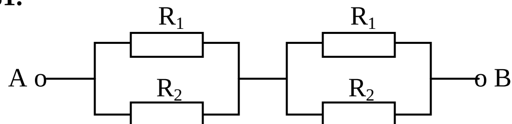
4.79. -----



Kako je u zadatku struja bila negativnog predznaka, sledi da je ona suprotnog smera od naznačenog, što je i prikazano na slici. Kako je stepen korisnog dejstva jednak: $\eta = I^2R / I^2(R + R_g) = R / (R + R_g) = 0{,}8 \Rightarrow$
$R = 0{,}8R + 0{,}8\,R_g \Rightarrow R_g = 0{,}2 \cdot R / 0{,}8 = R/4 = 5\ \Omega \Rightarrow E = I \cdot (R + R_g) = 5$ V.

4.80. ----- Uslov ravnoteže mosta je: $R_1 / R_2 = R_3 / R_4' \Rightarrow R_4' = R_2 \cdot R_3 / R_1 = 24\ \Omega$;
$R_4' = R_4 \cdot [\,1 + \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1)\,] \Rightarrow \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = (R_4' - R_4) / R_4 \cdot \alpha = (24 - 20) / 0{,}004 \cdot 20 = 50\ °C \Rightarrow$
$\theta_2 = \Delta\theta + \theta_1 = 70\ °C$.

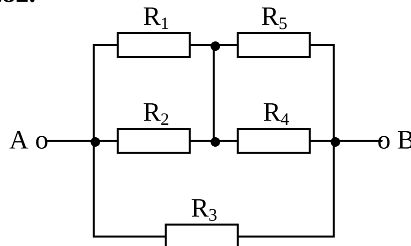
4.81. -----



$$R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$R_{AB} = 2 \cdot \frac{800 \cdot 200}{800 + 200} = 320[\Omega].$$

4.82. -----



$$R_{1245} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_5 \cdot R_4}{R_5 + R_4} = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} + \frac{40 \cdot 50}{40 + 50} \Rightarrow$$

$$R_{1245} = \frac{20}{3} + \frac{200}{9} = \frac{60 + 200}{9} = \frac{260}{9}[\Omega]$$

$$R_{AB} = \frac{R_3 \cdot R_{1245}}{R_3 + R_{1245}} = \frac{30 \cdot \frac{260}{9}}{30 + \frac{260}{9}} = \frac{780}{53}[\Omega] \approx 14{,}71[\Omega].$$

4.83. ----- $I = \dfrac{10 + 5}{5 + 3 + 2 + 1 + 1} = 1{,}25[A]$, jer je $R_V = \infty$ ($I_V = 0$) $\Rightarrow U_V = (2 + 5) \cdot I = 8{,}75$ V.

4.84. ----- $V_A + 4\,I_2 + 9 + 2\,I_2 + 1I_2 - 4{,}5 + 1\,I_1 + 2\,I_1 - 4{,}5 = 0 \Rightarrow V_A = -\,I_1\,(1 + 2) - I_2\,(4 + 2 + 1) \Rightarrow$
$V_A = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot 7 = 29$ [V].

4.85. ----- $U_{23} = V_2 - V_3 = 10$ V; $U_{23} - I_1R_1 - I_2R_2 + E = 0$; $I_S + I_1 = I_2$

$U_{23} = I_1R_1 + (I_1 + I_S)\cdot R_2 - E = I_1\cdot(R_1 + R_2) + I_SR_2 - E \Rightarrow$

$$I_1 = \frac{U_{23} + E - I_SR_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 + 6 - 2\cdot 10^3\cdot 5\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^3} = 2\cdot 10^{-3}[A] = 2[mA];\quad I_2 = 7 \text{ mA}.$$

$U_{20} - I_1R_1 - U_{10} = 0 \Rightarrow U_{10} = U_{20} - I_1R_1 = -7 - 2\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 10^3 = -9$ [V].

5.1. ----- 8800 Ω   **5.2.** ----- 0,125 Ω;   **5.3.** ----- U_1 = 140 V; U_2 = 80 V;

5.4. ----- **Sl.5.4. a)** $I_A = E / (R_A + R_V) = 200/2000{,}2 = 0{,}00999$ A $\Rightarrow$ $U_V = I_A \cdot R_V = 19{,}98$ V;
Voltmetar meri približno jednak napon koji je jednak naponu na otporniku R, a to znači da je on ispravno povezan. Kako kroz otpornik protiče struja $I = E / R = 20/500 = 0{,}04$ A, sledi da je ampermetar neispravno vezan, jer je njegova struja znatno manja od struje otpornika.

Sl.5.4. b) $I = E / R_e = E / [R_A + R_V \cdot R/(R_V + R)] = 200/400{,}2 \Rightarrow I_A \cong 0{,}05$ A;
$U_V = I_A \cdot [R \cdot R_V / (R + R_V)] = 19{,}99$ V.
Oba instrumenta su ispravno povezana. Napon kojeg pokazuje voltmetar je ujedno i napon potrošača (paralelna veza). Ampermetar će pokazati struju $I_A = I + I_V$, tj. veću struju od struje potrošača za struju I_V.

Sl.5.4. c) $I_A = E / (R_A + R) = 20/500{,}2 = 0{,}03998$ A; $U_V = E = 20$ V.
Ampermetar meri stvarnu struju otpornika R, dok voltmetar meri ukupni napon (ems E). Napon na potrošaču (otporniku R) je manji od napona kojeg meri voltmetar za pad napona na ampermetru.

Iz ovoga primera se može izvući zaključak, da se ampermetar veže redno sa potrošačem. Da bi greška bila što manja od ampermetra se zahteva da mu je unutrašnji otpor što manji ($R_A << R$), kako bi struja bila nepromenjena (ista pre i posle spajanja ampermetra).

Voltmetar se veže paralelno sa potrošačem, a njegov unutrašnji otpor treba da je što veći ($R_V >> R$), kako bi struja potrošača, samim i tim i napon, ostala nepromenjena.

Idealni ampermetar je onaj ampermetar čiji je unutrašnji otpor jednak nuli, a idealni voltmetar je onaj voltmetar čiji je unutrašnji otpor jednak beskonačno. U praksi nema idealnih ampermetara i voltmetara.

5.5. ----- 49,98 KΩ;   **5.6.** ----- 0,033 Ω;   **5.7.** ----- 40 Ω;

5.8. ----- Za ampermetar ispred voltmetra $\Rightarrow$ Apsolutna greška (A_g) $= - R^2 / (R + R_V) = - 0{,}0025$ Ω,
Relativna greška (R_g) $=[A_g / R]\cdot 100$ [%] $= - 0{,}025$ %.
Za voltmetar ispred ampermetra: Apsolutna greška $= R_A = 0{,}5$ Ω,
Relativna greška $= (A_g/R)\cdot 100 = 5$ %.
(NAPOMENA! Pogledaj merenje električnog otpora UI metodom.)

5.9. ----- Za ampermetar ispred voltmetra: $P' = U' \cdot I' = I' \cdot (U + I'R_A) = UI' + I'^2 \cdot R_A = UI' + P_{JA}$
$P = UI = U \cdot (I' - I_V) = UI' - U^2/R_V = UI' - P_{JV}$; $\Delta P = P' - P = P_{JA} + P_{JV}$, gde je: U.. napon na voltmetru, I.. struja ampermetra, P′... snaga izvora, P... snaga potrošača, P_{JA}... Džulovi gubici na ampermetru i P_{JV}... Džulovi gubici na voltmetru (zagrevanje instrumenata).
Za voltmetar ispred ampermetra: $P' = U'I' = U' \cdot (I + I_V) = U' \cdot (I + U'/R_V) = U'I + U'^2/R_V = U'I + P_{JV}$;
$P = UI = (U' - IR_A) \cdot I = U'I - I^2R_A = U'I - P_{JA}$; $\Delta P = P' - P = P_{JV} + P_{JA}$.
Dakle, navedena razlika snaga se potroši na Džulove gubitke na ampermetru i voltmetru.
(NAPOMENA! Pogledaj merenje snage UI metodom.)

5.10. ----- $R_1 = (R_V / U_V) \cdot (U_1 - U_V) = (400/3) \cdot (15 - 3) = 1\,600$ Ω;
$R_1 + R_2 = (R_V / U_V) \cdot (U_2 - U_V) = (400/3) \cdot 72 = 9\,600$ Ω $\Rightarrow R_2 = 9\,600 - R_1 = 8\,000$ Ω;
$R_1 + R_2 + R_3 = (R_V / U_V) \cdot (U_3 - U_V)$ $\Rightarrow$ $R_3 = 10\,000$ Ω.
(NAPOMENA! Vidi merenje snage UI metodom.)

5.11. ----- $R_S = 0{,}526$ Ω.

5.12. ----- Kada je P u položaju 1 (otpor šanta je najveći $\Rightarrow$ struja otoke najmanja), pa se u ovom slučaju meri struja $I_1 = 10$ mA (najmanji merni opseg).
$m_1 = I_1 / I_A = 5$ $\Rightarrow$ $R_S = R_1 + R_2 + R_3 = R_A / (m_1 - 1) = 10$ Ω;
P u položaju 2 (meri domašaj I_2):
$I_A \cdot (R_A + R_1) = (I_2 - I_A) \cdot (R_2 + R_3)$, a kako je $R_1 + R_2 + R_3 = 10$ $\Rightarrow$ $R_2 + R_3 = 10 - R_1$ $\Rightarrow$
$I_A \cdot (R_A + R_1) = (I_2 - I_A) \cdot (10 - R_1) \Rightarrow 2\cdot 10^{-3} \cdot (40 + R_1) = (30 - 2) \cdot 10^{-3} \cdot (10 - R_1)$ $\Rightarrow$ $R_1 = 20/3$ Ω;
P u pol. 3. (merni domašaj I_3):
$I_A \cdot (R_A + R_1 + R_2) = (I_3 - I_A) \cdot R_3$. Iz $R_1 + R_2 + R_3 = 10$ $\Rightarrow$ $R_1 + R_2 = 10 - R_3 \Rightarrow$
$I_A \cdot (R_A + 10 - R_3) = (I_3 - I_A) \cdot R_3$ $\Rightarrow$ $R_3 = 1$ Ω ; $R_2 = 10 - R_1 - R_3 = 7/3$ Ω.

5.13. -----

Sl. 5.13. a) Ampermetar meri: $I' = E / R_e$; Kako je $R_e = R_g + R_A + R_V \cdot R / (R_V + R) = 5{,}0275\ \Omega \Rightarrow$ $I_A = I' = 2/5{,}0275 = 0{,}3979$ A; $U_V = U = I' \cdot [R_V \cdot R / (R_V + R)] = 1{,}988$ V; $R' = U_V / I_A = 4{,}9975\ \Omega$;
Aps. greška = $\Delta R = R' - R = -0{,}0025\ \Omega$; Rel. greška = $(\Delta R / R) \cdot 100\ \% = -0{,}05\ \%$.

Sl. 5.13. b) $R_e' = R_g + (R_A + R) \cdot R_V / (R_A + R + R_V) = 5{,}0275\ \Omega \Rightarrow I' = E / R_e' = 0{,}3978$ A;
$U_V = E - I' \cdot R_g = 1{,}99602$ V; $I_A = U_V / (R_A + R) = 0{,}3976$ A;
$R' = U_V / I_A = 5{,}02\ \Omega$; $\Delta R = R' - R = 5{,}02 - 5 = 0{,}02\ \Omega$, a Rel. greška = $(\Delta R / R) \cdot 100\ \% = 0{,}4\ \%$.
Slika pod a) se koristi za veoma velike otpore ($R >> R_A$), a pod b) za veoma male otpore ($R << R_V$).

5.14. ----- Sl.5.14. a)

P u pol. 1(najmanji opseg): $m_1 = I_1 / I_A = 5 \Rightarrow R_S = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 100/ (5 - 1) = 25\ \Omega$;
P u pol. 2: $I_A \cdot (R_A + R_1) = (I_2 - I_A) \cdot (R_2 + R_3 + R_4 + R_5)$. Kako je $R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 25 - R_1 \Rightarrow$
$I_A \cdot (R_A + R_1) = (I_2 - I_A) \cdot (25 - R_1) \Rightarrow R_1 = 18{,}75\ \Omega$.
P u pol. 3: $I_A \cdot (R_A + R_1 + R_2) = (I_3 - I_A) \cdot (R_3 + R_4 + R_5)$; $R_3 + R_4 + R_5 = 25 - R_1 - R_2 \Rightarrow$
$I_A \cdot (R_A + R_1 + R_2) = (I_3 - I_A) \cdot (25 - R_1 - R_2) \Rightarrow R_2 = 3{,}75\ \Omega$.
P u pol. 4: $I_A \cdot (R_A + R_1 + R_2 + R_3) = (I_4 - I_1) \cdot (R_4 + R_5)$; $R_4 + R_5 = 25 - R_1 - R_2 - R_3 \Rightarrow$
$I_A \cdot (R_A + R_1 + R_2 + R_3) = (I_4 - I_A) \cdot (25 - R_1 - R_2 - R_3) \Rightarrow R_3 = 1{,}875\ \Omega$.
P u pol. 5: $I_A \cdot (R_A + R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = (I_5 - I_A) \cdot R_5$; $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 25 - R_5 \Rightarrow$
$I_A \cdot (R_A + 25 - R_5) = (I_5 - I_A) \cdot R_5 \Rightarrow R_5 = 0{,}125\ \Omega$; $R_4 = 25 - R_1 - R_2 - R_3 - R_5 = 0{,}5\ \Omega$.

Sl.5.14. b)

$m_1 = I_1 / I_A = 5$; $m_2 = I_2 / I_A = 20$; $m_3 = I_3 / I_A = 50$; $m_4 = I_4 / I_A = 200$; $m_5 = I_5 / I_A = 1000$;
$R_1 = R_A / (m_1 - 1) = 25\ \Omega$; $R_2 = R_A / (m_2 - 1) = 5{,}263\ \Omega$; $R_3 = R_A / (m_3 - 1) = 2{,}041\ \Omega$;
$R_4 = R_A / (m_4 - 1) = 0{,}503\ \Omega$ i $R_5 = R_A / (m_5 - 1) = 0{,}1001\ \Omega$.

Ako bi kod druge varijante došlo do prekida bilo kojeg otpora u šantu (pregori), ili je neispravan preklopnik P, sva bi struja protekla kroz ampermetar, a to bi u praksi dovelo do njegovog pregorevanja.
Zbog toga se koristi prva varijanta, jer kod nje bi navedeni kvar izazvao prekid celog kola, a samim tim kroz ampermetar neće proticati struja (neće pregoreti).

5.15. ----- Sl.5.15. a)

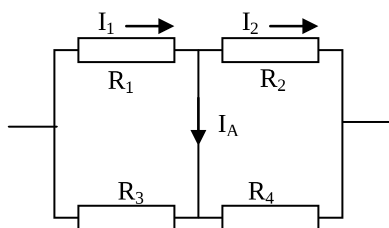
$R_1 = (R_V / U_V) \cdot (U_1 - U_V) = 18$ KΩ; $R_1 + R_2 = (R_V / U_V) \cdot (U_2 - U_V) = 98$ KΩ $\Rightarrow R_2 = 80$ KΩ;
$R_1 + R_2 + R_3 = (R_V / U_V) \cdot (U_3 - U_V) = 398$ KΩ $\Rightarrow R_3 = 300$ KΩ;
$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = (R_V / U_V) \cdot (U_4 - U_V) = 998$ KΩ $\Rightarrow R_4 = 600$ KΩ;
$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = (R_V / U_V) \cdot (U_5 - U_V) = 1\,998$ KΩ $\Rightarrow R_5 = 1\,000$ KΩ.
NAPOMENA! Iz navedenih relacija se može izvesti opšta formula, kojom se može direktno izračunati otpornost predotpornika. Ona glasi: $R_n = (R_V / U_V) \cdot (U_n - U_{n-1})$. Svi otpori u predhodnom mernom opsegu se mogu tretirati kao unutrašnji otpor voltmetra, a za napon voltmetra sada se uzima napon koji se može priključiti na predhodnu vezu, tj. U_{n-1}. Rešenja su ista.

Sl.88. b)

$R_1 = (R_V / U_V) \cdot (U_1 - U_V) = 18$ KΩ; $R_2 = (R_V / U_V) \cdot (U_2 - U_V) = 98$ KΩ;
$R_3 = (R_V / U_V) \cdot (U_3 - U_V) = 380$ KΩ; $R_4 = (R_V / U_V) \cdot (U_4 - U_V) = 998$ KΩ;
$R_5 = (R_V / U_V) \cdot (U_5 - U_V) = 1\,998$ KΩ.

Može se zaključiti da se rednom vezom mogu postići veći merni domašaji, jer se otpori međusobno dodaju (sabiraju). Ako pogledamo pol. 5 vidimo da kod paralelne veze treba nam jedan otpornik otpornosti 1 998 KΩ, dok kod redne veze ukupan zbir svih pet otpornika daje tu vrednost. Iz navedenog razloga nešto je praktičnija redna veza (slika pod a), ali ne u toj meri kao što je slučaj kod ampermetra.
Kod voltmetra su u upotrebi obe varijante.

5.16. -----



$R_{13} = R_1 \cdot R_3 \,/\, (\, R_1 + R_3\,) = 4/3\ \ \Omega$;
$R_{24} = R_2 \cdot R_4 \,/\, (\, R_2 + R_4\,) = 4/3\ \ \Omega$;
$R_e = R_{13} + R_{24} = 8/3\ \Omega \Rightarrow I = U \,/\, R_e = 18\ A$;
$U_{13} = I \cdot R_{13} = 24\ V$; $U_{24} = I \cdot R_{24} = 24\ V$;
$I_1 = U_1 \,/\, R_1 = 6\ A$; $I_2 = U_2 \,/\, R_2 = 12\ A$;
$I_3 = U_3 \,/\, R_3 = 12\ A$; $I_4 = U_4 \,/\, R_4 = 6\ A$;
$I_1 = I_A + I_2 \Rightarrow I_A = I_1 - I_2 = -6\ A$ (suprotan smer).

U ključenjem prekidača prva grana ima otpornost: $R_1' = R_1 \cdot R_x \,/\, (\, R_1 + R_x\,)$.
Uslov ravnoteže mosta ($I_A = 0$) je: $R_1' / R_2 = R_3 / R_4 \Rightarrow R_1' = 1\ \Omega \Rightarrow 4R_x = 4 + R_x \Rightarrow R_x = 4/3\ \Omega$.

6.1. ----- a) $R = 0{,}04\ \Omega$; $\eta = 50\ \%$; b) 71,4 %.

6.2. ----- a) $P = I^2 \cdot R = [\ E / (\ R + R_g\ )]^2 \cdot R = 277{,}78\ W \Rightarrow \eta = R / (\ R + R_g\ ) = 1/3 = 0{,}333$ (33,3 %);
b) $P = I^2\ R = [\ E / (\ R + R_g\ )]^2 \cdot R = 312{,}5\ W \Rightarrow \eta = R / (\ R + R_g\ ) = 2/4 = 0{,}5$ (50 %);
c) $P = I^2 \cdot R = [\ E / (\ R + R_g\ )]^2 \cdot R = 277{,}78\ W \Rightarrow \eta = R / (\ R + R_g\ ) = 4/6 = 0{,}667$ (66,7 %).

Vidima da je najveći stepen korisnog dejstva pod tačkom c). Sledi zaključak, da je stepen korisnog dejstva veći, što je otpor potrošača R veći. Zbog toga se kod naponskih generatora traži da je $R_g << R$.

Što se tiče korisne snage potrošača, ona je ista pod a) i pod c), ali je povoljnija varijanta pod c) , jer je tu opterećenje generatora (snaga) manje (manji su Džulovi gubici u generatoru – njegovo zagrevanje).

Najveća je snaga potrošača pod tačkom b), no tu je stepen korisnog dejstva 50 %, što znači da je ostala polovina utrošena na zagrevanje generatora (Džulovi gubici).

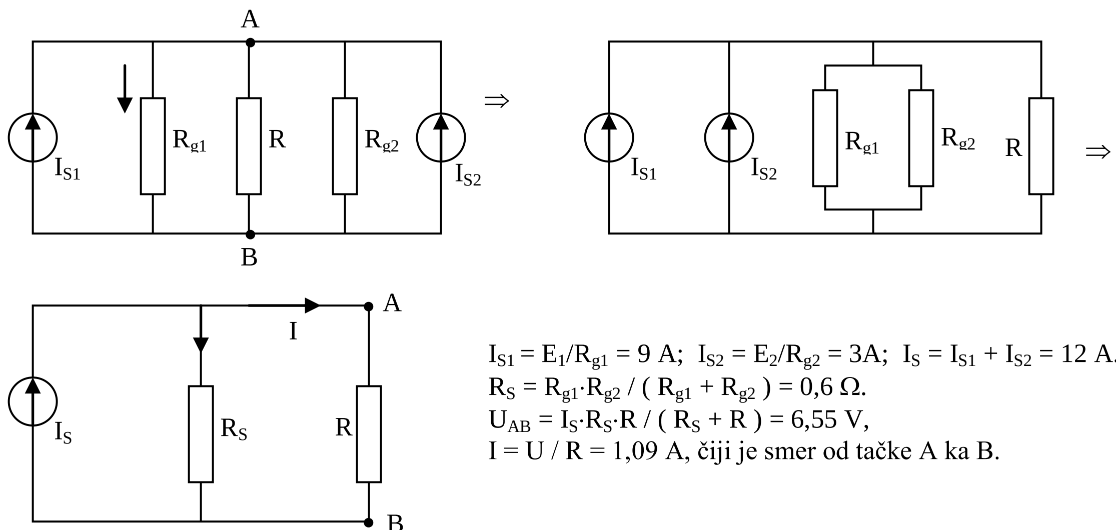
6.3. ----- $R = R_e - R_g = 1\ \Omega$.

6.4. ----- a) $\eta = R / (\ R + R_g\ ) \Rightarrow \eta_1 = 0$ (0 %); $\eta_2 = 0{,}9998$ (99,98 %)
b) $U = IR$; za $R = 0 \Rightarrow U = 0$ (kratka veza); za $R = 5\ 000\ \Omega \Rightarrow$
$I = E / (\ R + R_g\ ) = 0.019996\ A \Rightarrow U = IR = 99{,}98\ V$ (a moglo je: $\eta = U / E \Rightarrow U = \eta \cdot E = 0{,}9998 \cdot 100$).

6.5. ----- $R_{1234} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 70\ K\Omega$; $R_e = R_g + R_{1234} = 75\ K\Omega$;
a) $P' = EI = E^2 / R = 200^2 / 75 \cdot 10^3 = 533{,}33\ mW$;
b) $P = I^2 R_{1234} = (\ E / R_e\ )^2 \cdot R_{1234} = (\ 200 / 75\ 000\ )^2 \cdot 70\ 000 = 497{,}78\ mW$;
c) $\eta = P / P' = 0{,}9333$ (93,33 %);
d) $U = IR_{1234} = (\ 200 / 75\ 000\ ) \cdot 70\ 000 = 186{,}67\ V$.

6.6. ----- $R_{12} = R_1 \cdot R_2 / (\ R_1 + R_2\ ) = 266{,}67\ \Omega$; $I = E / (\ R_{12} + R_g\ ) = 0{,}36\ A$;
$U_{12} = U_1 = U_2 = IR_{12} = 96{,}39\ V$; $P' = EI = 36\ W$; $P_1 = U_1^2 / R_1 = 11{,}61\ W$; $P_2 = U_2^2 / R_2 = 23{,}23\ W$;
$P_g' = I^2 R_g = 1{,}296\ W$; $\eta = P / P' = (\ P_1 + P_2\ ) / P' = 0{,}9678$ (96,78 %).

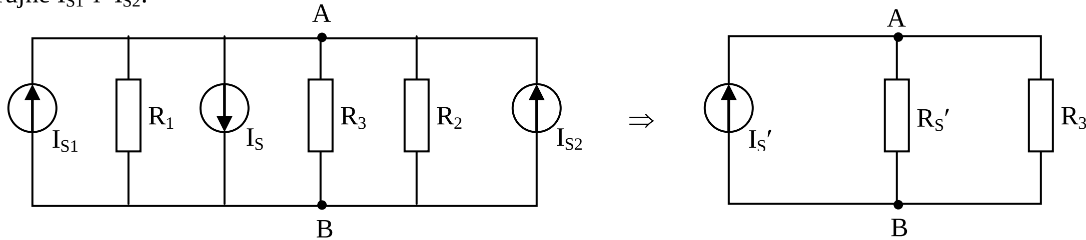
6.7. -----



$I_{S1} = E_1/R_{g1} = 9\ A$; $I_{S2} = E_2/R_{g2} = 3A$; $I_S = I_{S1} + I_{S2} = 12\ A$.
$R_S = R_{g1} \cdot R_{g2} / (\ R_{g1} + R_{g2}\ ) = 0{,}6\ \Omega$.
$U_{AB} = I_S \cdot R_S \cdot R / (\ R_S + R\ ) = 6{,}55\ V$,
$I = U / R = 1{,}09\ A$, čiji je smer od tačke A ka B.

6.8. ----- a) $I_2 = 0{,}0529\ A$; b) $P_1 = 2{,}65\ W$.

6.9. ----- Snaga je izvršeni rad u jedinici vremena (P = W / t) , a to je ujedno brzina električnog rada. To znači, da se traži u zadatku snaga na otporniku R_3. Najlakšiji je put pretvoriti naponske generatore E_1 i E_2 u strujne I_{S1} i I_{S2}:



$I_{S1} = E_1 / R_1 = 10$ A; $I_{S2} = E_2 / R_2 = 10$ A;
$I_S = I_{S1} + I_{S2} – I_S = 18$ A (I_{S1} i I_{S2} su istog smera, tj tačka A im je na većem potencijalu, dok je I_S suprotnog smera, odnosno, tačka B je na većem potencijalu);
$U_{AB} = I_S·R_S'·R / (R_S' + R) = 6$ V; $I_3 = U_{AB} / R_3 = 6$ A; $P_3 = I_3^2·R_3 = 36$ W.

6.10. ----- $R_S = R_g = 1 / G_S = 1/10^{-3} = 1\,000\ \Omega$; $E = I_S·R_S = 100$ V; $U = E – I·R_g = 10$ V.

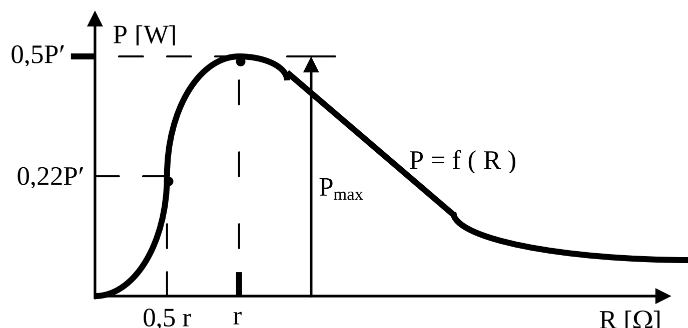
6.11. ----- $(E_2 + E_1) / (R + R_{g1} + R_{g2}) = 2\text{ A} \Rightarrow E_1 + E_2 = 2·(R + R_{g1} + R_{g2})$;
$(– E_2 + E_1) / (R + R_{g1} + R_{g2}) = – 0,5\text{ A} \Rightarrow E_1 – E_2 = – 0,5·(R + R_{g1} + R_{g2})$;
$E_1 / (R + R_{g1}) = 1 \Rightarrow E_1 = (R + R_{g1})$; $E_2 / (R + R_{g2}) = 1,5 \Rightarrow E_2 = 1,5·(R + R_{g2})$;
$E_1 + E_2 = 4 + R_{g1} + 6 + 1,5R_{g2} = 10 + R_{g1} + 1,5R_{g2} = 2·(R + R_{g1} + R_{g2})$;
$E_1 – E_2 = 4 + R_{g1} – 6 – 1,5R_{g2} = – 2 + R_{g1} – 1,5R_{g2} = – 0,5·(R + R_{g1} + R_{g2})$;
$10 + R_{g1} + R_{g2} = 2·(4 + R_{g1} + R_{g2}) \Rightarrow R_{g1} + 0,5R_{g2} = 2$;
$– 2 + R_{g1} – 1,5R_{g2} = – 0,5·(4 + R_{g1} + R_{g2}) \Rightarrow R_{g2} = 1,5R_{g1}$.
Rešenjem ovih jednačina nastaju rešenja: $R_{g1} = 1,143\ \Omega$ i $R_2 = 1,714\ \Omega \Rightarrow$
$E_1 = (4 + R_{g1})·1 = 5,143$ V; $E_2 = 1,5·(4 + R_{g2}) = 8,571$ V.

6.12. ----- $I_1 = 0,75$ A; $I_2 = 3,75$ A; $I_3 = 0,5$ A; $\eta = 0,75$ (75 %).

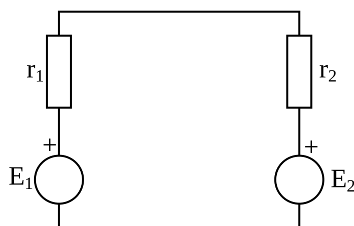
6.13. ----- Otpori R_2, R_3 i R_4 su u paralelnoj vezi, te je: $1/R_{234} = 1/R_2 + 1/R_3 = 1 /R_4 \Rightarrow R_{234} = 1,5$ KΩ,
$R_{1234} = R_1 + R_{234} = 2$ KΩ; $R_{12345} = R_5·R_{1234} / (R_5 + R_{1234}) = 95,2\ \Omega$; $R_g = R_{12345} = 95,2\ \Omega$.
$U_{BC} = I_1·R_{234} = 1\,500·6·10^{-3} = 6$ V.
Kako su otpori R_2, R_3 i R_4 u paralelnoj vezi, sledi: a) $I_3 = U_{BC} / R_3 = 3$ mA;
b) $U_{AB} = I_1·R_{1234} = 12$ V; $I_5 = U_{AB} / R_5 = 120$ mA; $I = I_1 + I_2 = 126$ mA; $E = I·(R_g + R_{1234}) = 24$ V.

6.14. ----- Za $R = 0,2·r \Rightarrow P = I^2R = [E / (R + r)]^2·R = E^2R / 1,25^2 = 0,2·r·E^2 / 1,25^2$;
Za $R = 0\ \Omega \Rightarrow P = 0$ W; Za $R = 0,1·r \Rightarrow P = I^2R = [E / (R + r)]^2·R = 0,083·E^2 / r$;
$P' = E·I = E·E / 1,1·r = 0,909\ E^2 / r \Rightarrow \eta = P / P' = 83 / 909 = 0,0913$ (9,13 %).
Za $R = 0,5\ r \Rightarrow I = E / 1,5\ r \Rightarrow P = I^2R = (E / 1,5\ r)^2·0,5\ r = 0,222·E^2 / r$;
$P' = EI = 0,667·E^2 / r \Rightarrow \eta = P / P' = 222 / 667 = 0,3328$ (33,28 %)
Za $R = r \Rightarrow I = E / 2\ r \Rightarrow P = I^2R = 0,25·E^2 / r$; $P' = EI = 0,5·E^2 /r$; $\eta = P / P' = 0,5$ (50 %);
Za $R = 10\ r \Rightarrow I = E / 11\ r \Rightarrow P = I^2R = 0,083·E^2 / r$; $P' = EI = 0,091·E^2 / r$; $\eta = P / P' = 0,912$ (91,2 %).

Pri porastu R od 0 do r korisna snaga P raste od 0 do maksimalne snage (P_{max}). Stepen korisnog dejstva raste od 0 do 50 %iznosi 50 % (Za $\eta = 50\ \% \Rightarrow P = 0,5\ P' = P_{max}$.). Nakon toga, pri porastu otpora R korisna snaga opada, dok stepen korisnog dejstva raste. Sa povećanjem stepena korisnog dejstva manji su Džulovi gubici u generatoru, a samim tim manje je opterećenje generatora. Zbog toga se kod naponskih generatora i traži što veći stepen korisnog dejstva ($R_g << R$).



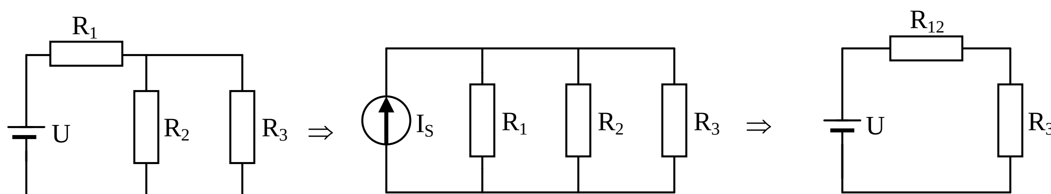
6.15. -----



Snaga izvora je: $P' = (E_1 - E_2)\cdot I = P_1 - P_2 = 80 - 60 = 20$ W;
$P' = I^2 R_e = I^2\cdot(r_1 + r_2) \Rightarrow I^2 = E / (r_1 + r_2) = 1 \Rightarrow I = 1$ A;
$P_1 = E_1\cdot I \Rightarrow E_1 = P_1 / I = 80$ V; $E_2 = P_2 / I = 60$ V.
Kako je prvi izvor veće snage, on se ponaša kao generator, dok drugi se ponaša kao prijemnik (E_2 je kontra ems). Zbog toga je stepen korisnog dejstva kola: $\eta = P_1 / P_2 = 0{,}75$ (75 %).
Korisni rad kola je: $W_2 = P_2\cdot t = 60\cdot 2\cdot 3\,600 = 432\,000$ J.
Ukupni gubici kola: $P_g = I^2\cdot(R + r_1 + r_2) = 20$ W.

6.16. ----- Stepen korisnog dejstva se povećavasa porastom otpora (vidi zad. 6.14.), a to znači da će stepen korisnog dejstva biti najveći kada je prekidač u položaju 1.
Ako se u pol. 2 ostvari maksimalna snaga, sledi: $R_3 + R_4 = R_1$. Kako je $R_3 = R_4 \Rightarrow 2R_3 = 100 \Rightarrow$ $R_3 = R_4 = 50\ \Omega$. Otpornik R_2 u ovom slučaju nema nikakvog uticaja (isključen iz kola).

6.17. -----



Pretvaranjem naponskog generatora u strujne nastaju navedene slike, a samim tim sledi:
$I_S = U / R_1 = 100/6$ A; $R_{12} = R_1\cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 24/7\ \Omega \Rightarrow R_3 = R_{12} = 24/7 = 3{,}43\ \Omega$.

6.18. ----- Otpor generatora je veoma mali ($R_g = 0{,}04\ \Omega$) u odnosu na otpor sijalice (R), pa se on može zanemariti ($R >> R_g$). . Iz izraza za snagu kola: $P = I^2R = [E / (R + R_g)]^2\cdot R \cong E^2 / R \Rightarrow$ $R \cong E^2 / P \cong 3{,}2\ \Omega \Rightarrow I = E / (R + R_g) \cong 12 / 3{,}2 = 3{,}75$ A ; $P_g = I^2R_g = 0{,}5625$ W;
NAPOMENA! Za tačno rešenje postupak je sledeći:
$P = [E / (R + R_g)]^2\cdot R \Rightarrow 45 = [12^2 / (R + 0{,}04)^2]\cdot R \Rightarrow 45 R^2 - 140{,}4 R + 0{,}072 = 0$.

$R_{1/2} = [140{,}4 \pm \sqrt{140{,}4^2 - 4\cdot 45\cdot 0{,}072}] / 2\cdot 45 = (140{,}4 \pm 140{,}45) / 90$.
Sledi: $R_1 = (140{,}4 + 140{,}45) / 90 = 3{,}12\ \Omega$; $R_2 = (140{,}4 - 140{,}25) / 90 < 0$ (Kako je ovo rešenje negativno, ono realno ne postoji, već ostaje samo prvo rešenje).
Očito je, da je ovo drugo rešenje približno jednako predhodnom, jer je R_g zanemarljivo ($R >> R_g$).

6.19. ----- $E = I_1\cdot(R_1 + r) = I_2\cdot(R_2 + r) \Rightarrow 2{,}35\cdot(5 + r) = 1{,}18\cdot(10 + r) \Rightarrow r = 0{,}043\ \Omega$;
$E = 2{,}35\cdot(0{,}043 + 5) = 11{,}85$ V ; $I_{KS} = E / R_g = 275{,}58$ A.

6.20. ----- $S = d^2\pi / 4 = 3{,}14\ mm^2$; $R_{Cu} = \rho_{Cu} \cdot l / S = 2{,}229\ \Omega$;
$P = U^2 / R_p \Rightarrow R_p = U^2 / P = 220^2 / 1500 = 32{,}27\ \Omega$; $I = E / (R_g + R_ž + R_p) = 220 / 36{,}6 = 6{,}01\ A$;
Napon na kraju generatora je: $U = E – I R_g = 207{,}19\ V$; a na kraju prijemnika: $U_p = I R_p = 193{,}94\ V$;
Stvarna snaga prijemnika je: $P_p = U_p \cdot I = 193{,}94 \cdot 6{,}01 = 1\ 165{,}6\ W$.

6.21. ----- $R_e = R_1 + R_g + (R_2 + R_3) \cdot R_4 / (R_2 + R_3 + R_4) = 49{,}18\ \Omega$;
$I_1 = E / R_e = 2{,}24\ A$; $U_4 = I_1 \cdot R_{234} = 2{,}24 \cdot 23{,}68 = 52{,}96\ V$; $I_2 = U_4 / (R_2 + R_3) = 1{,}18\ A$;
$I_3 = U_4 / R_4 = 1{,}06\ A$; $U_{Rg} = I_1 \cdot R_g = 1.12\ V$; $U_1 = I_1 \cdot R_1 = 56\ V$; $U_2 = I_2 \cdot R_2 = 11{,}8\ V$; $U_3 = I_2 \cdot R_3 = 41{,}3\ V$;
$P_{Rg} = I_1^2 \cdot R_g = 2{,}51\ W$; $P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = 125{,}44\ W$; $P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 13{,}924\ W$; $P_{R3} = I_2^2 \cdot R_3 = 48{,}73\ W$;
$P_{R4} = I_3^2 \cdot R_4 = 56{,}18\ W$.

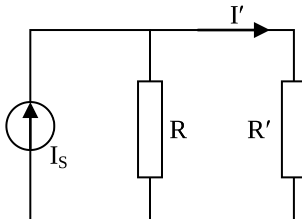
6.22. ----- $R_g + R_1 = (R_2 + R_3) \cdot R_4 / (R_2 + R_3 + R_4) \Rightarrow 25{,}5 = 45\ R_4 / (45 + R_4) \Rightarrow R_4 = 58{,}85\ \Omega$;
$I_1 = E / R_e = E / (R_1 + R_g + R_{234}) = 110 / 25{,}52 \cdot 2 = 2{,}16\ A$; $P = E \cdot I_1 = 237{,}25\ W$.

6.23. ----- $R_g + R_1 = (R_2 + R_3) \cdot R_4 / (R_2 + R_3 + R_4) \Rightarrow R_2 = 17{,}04\ \Omega$
$I_1 = E / 2 \cdot (R_g + R_1) = 2{,}16\ A$; $P = E \cdot I_1 = 237{,}25\ W$; $U_4 = I_1 \cdot R_{234} = 55{,}08\ V$; $I_3 = U_4 / R_3 = 1{,}1\ A$;
$I_2 = I_1 – I_3 = 1{,}06\ A$; $P_{Rg} = I_1^2 \cdot R_g = 2{,}33\ W$; $P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = 116{,}64\ W$; $P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 19{,}15\ W$;
$P_{R3} = I_2^2 \cdot R_3 = = 39{,}35\ W$; $P_{R4} = I_3^2 \cdot R_4 = 60{,}5\ W$. Na osnovu dobijenih snaga, sledi (bilans snaga):
$P = P_{Rg} + P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} \Rightarrow 237{,}25 = 2{,}33 + 116{,}64 + 19{,}15 + 39{,}35 + 60{,}5$ (″ T ″.. tačno).

6.24. ----- Za $R = 0\ \Omega \Rightarrow I = E / R_g = 50\ A$; $P' = EI = 5\ 000\ W$; $P_{Rg} = I^2 R_g = 5\ 000\ W$; $P_R = I^2 R = 0\ W$;
Dakle, $P_{Rg} = P' = \%\ 000\ W$, dok je stepen korisnog dejstva jednak: $\eta = P / P' = 0$ (0 %).
Za $R = R_g = 2\ \Omega \Rightarrow I = E / (R + R_g) = 25\ A$; $P' = EI = 2\ 500\ W$; $P_{Rg} = I^2 R_g = 1\ 250\ W$;
$P_R = I^2 R = 1\ 250\ W$: $P_R = P_{Rg} = P' / 2 \Rightarrow \eta = P / P' = 0{,}5$ (50 %).
Za $R = 4R_g = 8\ \Omega \Rightarrow I = 10\ A$; $P' = 1\ 000\ W$; $P_{Rg} = 200\ W$; $P_R = 800\ W$; $\eta = 0{,}8$ (80 %).
Za $R = 1\ 000\ \Omega \Rightarrow I = 0{,}0998\ A$; $P' = 9{,}98\ W$; $P_{Rg} = 0{,}02\ W$; $P_R = 9{,}96\ W$; $\eta = 0{,}998$ (99,8 %).
Kada je otpor $R = 4\ R_g \Rightarrow \eta = 80\ \%$, jer je $\eta = I^2 R / I^2 \cdot (R + R_g) = R / (R + R_g) = 4\ R_g / 5\ R_g = 0{,}8$.
Čitaocu se preporučuje, da na osnovu dobijenih podataka nacrta grafički dijagram: $P', P_{Rg}, P_R = f\ (R)$.
Ova rešenja dovode do zaključka : **Povećanjem iskorišćenja (η) , smanjuje se opterećenje generatora** (Manja proizvedena snaga generatora, manji Džulovi gubici u samom generatoru, kao i korisna snaga potrošača.). Ovakav režim nastaje kada ja $R >> R_g$. Nedostatak ovakvog režima je mala korisna snaga, pa se zbog toga koriste i varijante sa manjim iskorišćenjem, ali većom korisnom snagom. Kod generatora manjih snaga često se koristi režim rada sa $R = R_g$ ($\eta = 50\ \%$). Kod generatora većih snaga stepen iskorišćenja mora biti mnogo veći, kako bi se izbeglo njegovo pregorevanje (preveliko opterećenje).

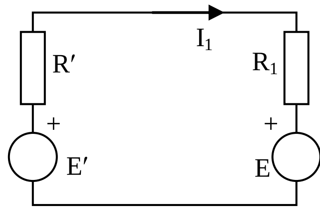
6.25. ----- Otpor prijemnika iznosi: $R = U^2 / P = 8{,}07\ \Omega$, (jer je $P = I^2 R = U^2 R \Rightarrow R = U^2 / P$);
a) $P' = 0{,}99 \cdot P = 5\ 940\ W$; $P' = [E / (R_V + R)]^2 \cdot R \Rightarrow 220^2 / (R_V + 8{,}07)^2 = 5\ 940 \Rightarrow R_V = 0{,}04\ \Omega$;
$R_V = \rho \cdot l / S \Rightarrow S = \rho \cdot l / R_V = 63{,}52\ mm^2 \Rightarrow S = d^2\pi / 4 \Rightarrow d = 9\ mm$.
b) $P' = 0{,}95 \cdot 6\ 000 = 5\ 700\ W$. Postupak rešavanja isti kao pod a). Konačno rešenje je $d = 4{,}1\ mm$.

6.26. -----



Ako otpor R tretiramo kao otpor strujnog generatora ($R_S = R$), ovaj strujni generator pretvorimo u naponski. Kada to uradimo sledi da je otpor naponskog generatora jednak otporu strujnog, odnosno $R_g = R_S = R \Rightarrow R' = R_g = R$.
Snaga (maksimalna) na otporniku R′ iznosi :
$P = I'^2 \cdot R' = (I_S / 2)^2 \cdot R = I_S^2 \cdot R / 4$.

6.27. -----



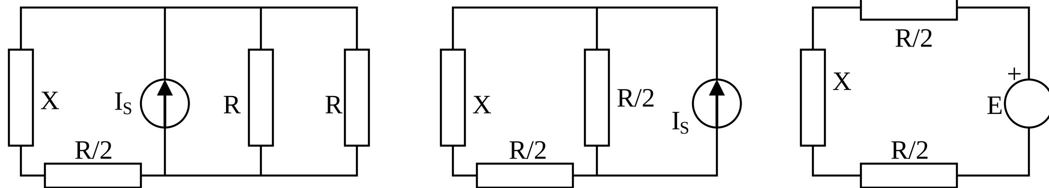
a) Kada strujni generator pretvorimo u naponski, sledi:
$R' = R_2 = 4\ \Omega$; $E' = I_S \cdot R_2 = 8$ V; $I_1 = (E' - E) / (R' + R) \Rightarrow$
$I_1 = -2$ A; Kako je $I_S = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = I_S - I_1 = 4$ A;
Snaga strujnog generatora je: $P_S = U_S \cdot I_S = U_2 \cdot I_S = I_2 \cdot R_2 \cdot I_S \Rightarrow$
$P_S = 32$ W,
a naponskog: $P_E = E \cdot I_1 = 20 \cdot 2 = 40$ W.

b) Postupak isti kao i pod a). Konačno rešenje je: $I_1 = 3{,}33$ A; $I_2 = 6{,}67$ A; $P_S = 266{,}7$ W; $P_E = 66{,}7$ W.

Čitaocu se preporučuje da izračuna snagu na otporima R_1 i R_2. Da li je zadovoljen zakon o održanju energije? Odgovor obrazložiti.

6.28. ----- Pretvoriti strujni generator u naponski. Kako struja I_S protiče i kroz otpornik R_1, ovaj otpor se može eliminisati iz kola ($R_1 = 0$), jer cela grana čini struju I_S (struja strujnog generatora). Usled toga, za otpor strujnog generatora sada se uzima otpor R_2. Nakon pretvaranja strujnog generatora u naponski, otpor naponskog generatora jednak je: $R_g = R_S = R = 10\ \Omega$.
Pri $R = R_g = R_2$, nastaje maksimalna snaga na otporniku R_2. Za $R_2 = R \Rightarrow I_R = I_{R2} = I_S / 2 = 1$ A.
Konačno, maksimalna snaga iznosi : $P_{Rmax} = I_R^2 R = 10$ W.
b) Struja kroz R će biti maksimalna kada je ovaj otpornik najmanji, tj. kada je on jednak nuli ($R = 0$).
U ovom slučaju struja I_S će sva proći kroz kratku vezu (otpor R), pa ona iznosi: $I_{max} = I_S = 2$ A.

6.29. -----



Pretvarajući naponski generator u strujni, a zatim strujni generator u naponski, nastaju navedene šeme.
Maksimalna snaga na otporniku X će se javiti kada je: $X = R/2 + R/2 = R = 10\ \Omega$.

6.30. ----- $P = I^2 R \Rightarrow I = 10$ A; a) $E = I \cdot (R + R_g) = 60$ V;
b) $I' = E / (2R + R_g) = = 60/11$ A; $P' = I'^2 (R + R) = 297{,}52$ W.

6.31. ----- $P_1 = I_1^2 R_1 = [E / (R_1 + R_g)]^2 \cdot R_1$; $P_2 = I_2^2 R_2 = [E / (R_2 + R_g)]^2 \cdot R_2$;
$2 = [E^2 / (2 + R_g)^2] \cdot 2 \Rightarrow E = 2 + R_g$; $3 = [E^2 / (12 + R_g)^2 \cdot 12 \Rightarrow E = 6 + R_g / 2 \Rightarrow$
$2 + R_g = 6 + R_g / 2 \Rightarrow R_g = 8\ \Omega$; $E = 10$ V.

6.32. ----- Naponske generatore E_1 i E_2 pretvoriti u strujne: $I_{S1} = E_1 / R_1 = 6$ A; $I_{S2} = E_2 / R_2 = 3$ A.
$R_{S1} = R_{S2} = R_1 = R_2 = 2\ \Omega$. Izračunati ekvivalentni strujni generator: $I_S = I_{S1} + I_{S2} = 9$ A;
$R_S = R_{S1} \cdot R_{S2} / (R_{S1} + R_{S2}) = 1\ \Omega$.
Ekvivalentni strujni generator pretvoriti u ekvivalentni naponski generator: $R_g = R_S = 1\ \Omega$; $E = I_S \cdot R_S = 9$ V.

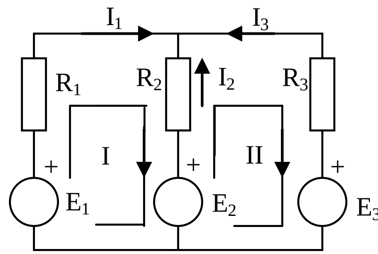
6.33. ----- $I_1 / I_2 = R_2 / R_1 = 6/4 \Rightarrow I_1 = 1{,}5\, I_2$; $I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = 3{,}6$ A; $I_2 = 2{,}4$ A.

6.34. ----- $I_4 = 5$ A; $I_3 = -1$ A; $I_5 = 5$ A.

6.35. ----- Umesto otpornika R_2 uzeti $R_2 = 0$, jer ta grana daje struju $I_S = I = 10$ Ai ona se tretira kao strujni generator, sa strujom I_S. Nakon toga naponski generator pretvoriti u strujni, pa sledi:
$I_1' = E / R_1 = 12/6 = 2$ A.
Ekvivalentni strujni generator je jednak: $I_S = I_1' + I = 2 + 10 = 12$ A; a $R_S = R_1 = 6\ \Omega$.

Ekvivalentni strujni generator pretvoriti u naponski. Sledi:
$E = I_S \cdot R_S = 72$ V; a $R_g = R_S = 6\ \Omega$.
Maksimalna snaga na otporniku R_3 se javlja kada je $R_3 = R_g = 6\ \Omega$.

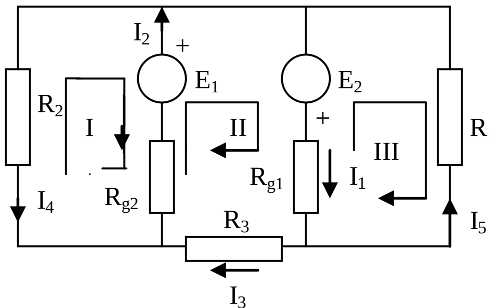
7.1. -----



$I_1 + I_2 + I_3 = 0$
$E_1 - I_1R_1 + I_2R_2 - E_2 = 0$
$E_2 - I_2R_2 + I_3R_3 - E_3 = 0$

Rešenjem sistema linearnih jednačina slede rešenja:
$I_1 = 0{,}75$ A; $I_2 = -0{,}5$ A; $I_3 = -0{,}25$ A. Snage genaratora su: $P_1' = E_1I_1 = 15$ W; $P_2' = E_2I_2 = -5$ W (prima energiju); $P_3' = E_3I_3 = -2{,}5$ W (prima energiju – potrošač);
Snage otpornika su: $P_{R1} = I_1^2R_1 = 5{,}625$ W;
$P_{R2} = I_2^2R_2 = 1{,}25$ W; $P_{R3} = I_3^2R_3 = 0{,}625$ W.

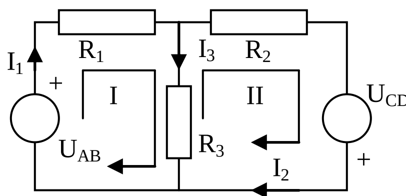
7.2. -----



$I_4 + I_3 - I_2 = 0$
$I_1 - I_3 - I_5 = 0$
$I_4R_2 - E_1 + I_2R_2 = 0$
$E_2 - I_1R_{g1} - I_3R_3 - I_2R_{g2} + E_1 = 0$
$-E_2 + I_5R_1 + I_1R_{g1} = 0$

Rešenjem navedenog sistema jednačina dobiju se sledeća rešenja struja u granama:
$I_1 = 13{,}88$ A; $I_2 = 16{,}57$ A; $I_3 = 9{,}85$ A;
$I_4 = 6{,}72$ A; $I_5 = 4{,}03$ A.

7.3. -----

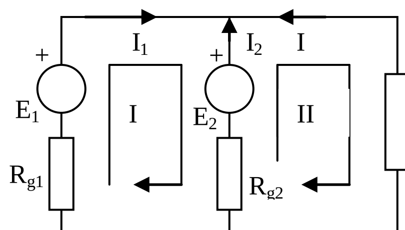


$I_1 = I_2 + I_3$
$U_{AB} - I_1R_1 - I_3R_3 = 0$
$U_{CD} + I_3R_3 - I_2R_2 = 0$

Rešenjem sistema jednačina slede rešenja struja po granama:
$I_1 = 2{,}4$ A; $I_2 = 1{,}6$ A; $I_3 = 0{,}8$ A.

Snage generatora su: $P_1' = U_{AB}\,I_1 = 28{,}8$ W; $P_2' = U_{CD}\,I_2 = 8{,}96$ W.
Snage na otpornicima su: $P_{R1} = I_1^2\,R_1 = 23{,}04$ W; $P_{R2} = I_2^2\,R_2 = 12{,}8$ W; $P_{R3} = I_3^2\,R_3 = 1{,}92$ W.
($P_1' + P_2' = 37{,}76$ W $\Leftrightarrow$ $P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = 37{,}76$ W.... što potvrđuje zakon o održanju energije.)

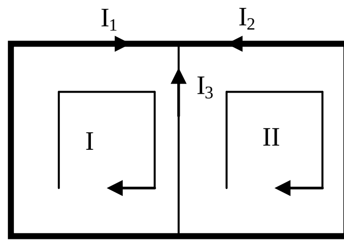
7.4. -----



$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0$
$E_1 - E_2 + I_2R_{g2} - I_1R_{g1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 + 10\,I_2 - 20\,I_1 = 0$
$-I_2R_{g2} + E_2 + IR = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 - 10\,I_2 + 50\,I = 0$

Rešenjem sistema jednačina sledi:
$I_1 = 0{,}179$ A; $I_2 = 0{,}053$ A; $I = -0{,}229$ A.
a) $P_1' = E_1I_1 = 2{,}685$ W; b) $I_2 = 0{,}053$ A;
c) $W_R = I^2Rt = 4\,719{,}69$ J.

7.5. -----



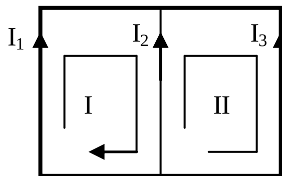
$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 0$

$E_1 - I_1R_1 + I_3R_3 = 0 \Rightarrow 20 - I_1 + I_3 = 0$

$- I_3R_3 + I_2R_2 - E_2 = 0 \Rightarrow - 10 - I_3 + 5 I_2 = 0$

Daljim rešavanjem jednačina nastaju sledeća rešenja:
$I_1 = 10$ A; $I_2 = 0$ A; $I_3 = - 10$ A.
Snaga na drugom generatoru je: $P_2' = E_2I_2 = 0$ W.

7.6. -----



$I_1 + I_2 + I_3 = 0$

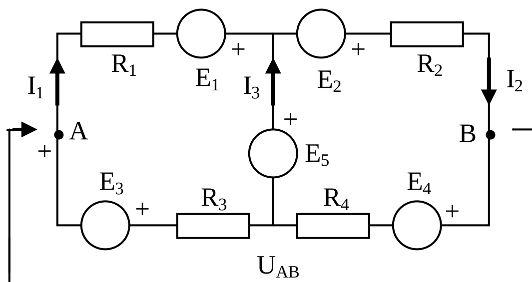
$E_1 - I_1R_1 + I_2R_2 - E_2 = 0$

$E_2 - I_2R_2 + I_3R_3 - E_3 = 0$

Rešenjem navedenog sistema jednačina dobiju se sledeća rešenja: $I_1 = - 2{,}11$ A; $I_2 = - 0{,}33$ A; $I_3 = 2{,}44$ A.
Izvor sa ems E_3 daje energiju, jer je struja pozitivna (u smeru E_3). Druga dva izvora uzimaju energiju, jer su struje suprotnih smerova od njihovih ems (kontra ems – potrošači)

7.7. ----- Kako je kolo isto kao i u zad. 7.6. postupak rešavanja je isti (samim tim iste su i jednačine). Uvrštavanjem podataka iz zadatka 7.7. u jednačine iz zad. 7.6. dobiju se sledeća rešenja: $I_1 = 2{,}89$ A; $I_2 = - 0{,}33$ A; $I_3 = - 2{,}56$ A. Rešenja govore da prvi izvor sa ems E_1 daje energiju, dok druga dva uzimaju energiju (ponašaju se kao potrošači).

7.8. -----



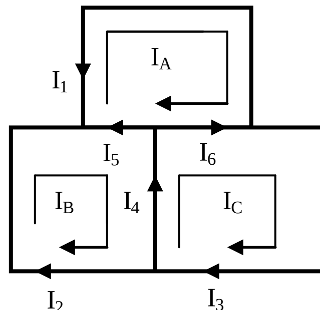
Za prvu konturu: $- I_1R_1 + E_1 - E_5 - I_1R_3 - E_3 = 0 \Rightarrow$
$- 10 I_1 + 60 - 20 - 10 I_1 - 10 = 0 \Rightarrow I_1 = 1{,}5$ A.
Za drugu konturu: $E_2 - I_2R_2 - E_4 - I_2R_4 + E_5 = 0 \Rightarrow$
$I_2 = - 1$ A. Kako je $I_1 + I_3 = I_2 \Rightarrow I_3 = I_2 - I_1 = - 2$ A.
Uspostaviti konturu (i napisati jednačinu prema II Kirh. zak.) idući od tačke B ka A (potencijal raste) preko prve i druge grane (ili preko treće i četvrte).

$\mathbf{U_{AB} - I_1R_1 + E_1 + E_2 - I_2R_2 = 0 \Rightarrow U_{AB} = - 80\ V}$

7.9. ----- Rešenje u zad. 7.1; **7.10.** ----- Rešenje u zad. 7.2; **7.11.** ----- Rešenje u zadatku 7.4.

7.12. ----- Videti rešenje u rešenju zad. 7.5; **7.13. -----** Rešenje u zad. 7.6. **7.14.** ----- Rešenje u zad. 7.8.

7.15. -----



Prema formiranim konturama slede jednačine:

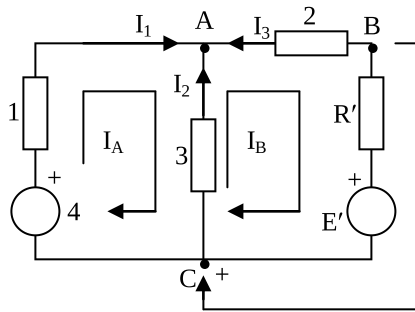
$- 5 = I_A\cdot(3 + 2 + 4) - I_B\cdot 4 - I_C\cdot 2 \Rightarrow 9 I_A - 4 I_B - 2 I_C = - 5$

$3 = I_B\cdot(4 + 2) - I_A\cdot 4 - I_C\cdot 2 \Rightarrow - 4 I_A + 6 I_B - 2 I_C = 3$

$4 = I_C\cdot(2 + 2) - I_A\cdot 2 - I_B\cdot 2 \Rightarrow - 2 I_A - 2 I_B + 4 I_C\ 0\ 4$

Daljim rešenjem sistema jednačina dobiju se konturne struje koje iznose: $I_A = 0{,}667$ A; $I_B = 1{,}667$ A; $I_C = 2{,}167$ A.
Struje po granama su jednake: $I_1 = - I_A = - 0{,}667$ A;
$I_2 = I_B = 1{,}667$ A; $I_3 = I_C = 2{,}167$ A; $I_4 = I_C - I_B = 0{,}5$ A;
$I_5 = I_A - I_B = - 1$ A; $I_6 = I_C - I_A = 1{,}5$ A.

7.16. -----



Strujni generator pretvoren u naponski daje nove parametri (E′ i R′), koji iznose: $E' = 2 \cdot 4 = 8$ V i $R' = 4\ \Omega$.
Na osnovu novonastale slike slede konturne jednačine:

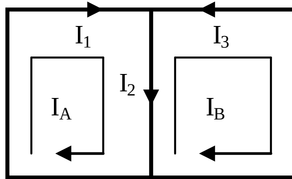
$4 = I_A \cdot (1 + 3) - I_B \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 4 I_A - 3 I_B = 4$

$- 8 = I_B \cdot (3 + 2 + 4) - I_A \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad - 3 I_A + 9 I_B = - 8$

Rešenjem jednačina slčede konturne struje : $I_A = 0{,}444$ A; $I_B = - 0{,}741$ A. Struje po granama su: $I_1 = I_A = 0{,}444$ A; $I_2 = I_B - I_A = - 1{,}185$ A; $I_3 = - I_B = 0{,}741$ A.

$$\mathbf{U_{CB} - 3I_2 + 2I_3 = 0 \Rightarrow U_{CB} = - 5{,}038\ V.}$$

7.17. -----



Konturne jednačine su:

$E_1 + E_2 = I_A \cdot (R_{g1} + R_1 + R_{g2} + R_2) - I_B \cdot (R_{g2} + R_2)$

$- E_2 - E_3 = I_B \cdot (R_{g2} + R_2 + R_{g3} + R_3) - I_A \cdot (R_{g2} + R_2)$

Kako je $I_B = - I_3 \Rightarrow I_B = - 2 \cdot 10^{-3}$ A $\Rightarrow$

$7 = 3\,000\ I_A - 2\,000 \cdot (- 2 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow I_A = 1 \cdot 10^{-3}$ A = 1 mA.

a) Unošenjem I_A i I_B u drugu jednačinu sledi $E_3 = 18$ V.

b) Snaga gen ems E_3 je: $P_3' = E_3 \cdot I_3 = 36$ mW,

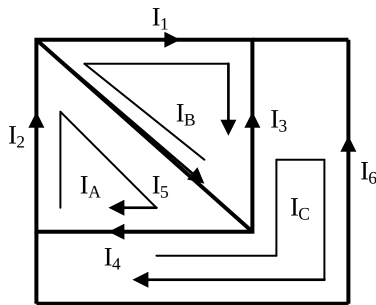
Snaga Džulovih u generatoru ems E_3 je: $P_{Rg3} = I_3^2 R_{g3} = 2$ mW.

Korisna snaga generatora ems iznosi: $P_{K3} = P_3' - P_{Rg3} = 36 - 2 \Rightarrow P_{K3} = 34$ mW.

(NAPOMENA! Korisnu snagu ne možemo tražiti na otporniku R_3, jer se u kolu pored njega nalazi i drugi otpori u složenoj vezi. Dakle; P_{K3} nije jednako sa $I_3^2 \cdot R_3$)

Stepen korisnog dejstva je: $\eta_3 = P_{K3} / P_3' = 34 / 36 = 0{,}9444$ (94,44 %).

7.18. -----



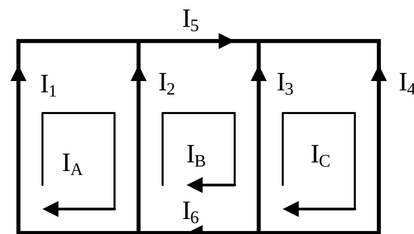
$E_5 = I_A \cdot (R_2 + R_4) - I_C \cdot R_4 \quad \Rightarrow 14 = 7 I_A - 4 I_C$

$E_1 - E_5 = I_B \cdot (R_1 + R_3) - I_C \cdot R_3 \quad \Rightarrow - 4 = 6 I_B - 4 I_C$

$0 = I_C \cdot (R_3 + R_4) - I_A \cdot R_4 - I_B \cdot R_3 \Rightarrow 0 = - 4 I_A - 4 I_B + 8 I_C$

Rešenja datih jednačina (konturnih struja) su:
$I_A = 3$ A; $I_B = 0{,}5$ A; $I_C = 1{,}75$ A.
Struje po granama iznose:
$I_1 = I_B = 0{,}5$ A; $I_2 = I_A = 3$ A; $I_3 = I_C - I_B = 1{,}25$ A;
$I_4 = I_A - I_C = 1{,}25$ A; $I_5 = I_A - I_B = 2{,}5$ A;
$I_6 = - I_C = - 1{,}75$ A

7.19. -----



$E_1 - E_2 = I_A \cdot (R_1 + R_2) - I_B \cdot R_2$

$E_2 + E_3 = I_B \cdot (R_2 + R_5 + R_3) - I_A \cdot R_2 - I_C \cdot R_3$

$- E_3 + E_4 = I_C \cdot (R_3 + R_6 + R_4) - I_B \cdot R_3$

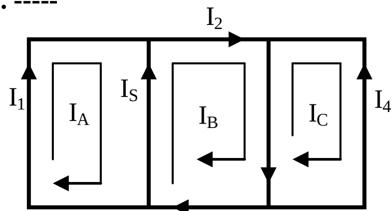
Rešenja konturnih struja su: $I_A = 31{,}065$ A; $I_B = 6{,}597$ A; $I_C = - 2{,}478$ A. Struje po granama su: $I_1 = I_A = 31{,}065$ A; $I_2 = I_B - I_A = - 24{,}468$ A; $I_3 = I_C - I_B = - 9{,}075$ A; $I_4 = - I_C = 2{,}478$ A; $I_5 = I_B = 6{,}597$ A; $I_6 = - I_B = - 6{,}597$ A.

Snage generatora su:

$P_1' = E_1 \cdot I_1 = 372{,}78$ W; $P_2' = E_2 \cdot I_2 = 97{,}872$ W; $P_3' = E_3 \cdot I_3 = 226{,}875$ W; $P_4' = E_4 \cdot I_4 = 14{,}868$ W.

Snaga na otpornicima iznose:
$P_{R1} = I_1^2R_1 = 96{,}503$ W; $P_{R2} = I_2^2R_2 = 119{,}737$ W; $P_{R3} = I_3^2R_3 = 8{,}236$ W; $P_{R4} = I_4^2R_4 = 1{,}842$ W;
$P_{R5} = I_5^2R_5 = 217{,}602$ W; $P_{R6} = I_4^2R_6 = 42{,}983$ W.
(NAPOMENA! $P_1' + P_3' = P_2' + P_4 + P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} + P_{R5} + P_{R6}$. Zašto je drugi i četvrti generator potrošač?)

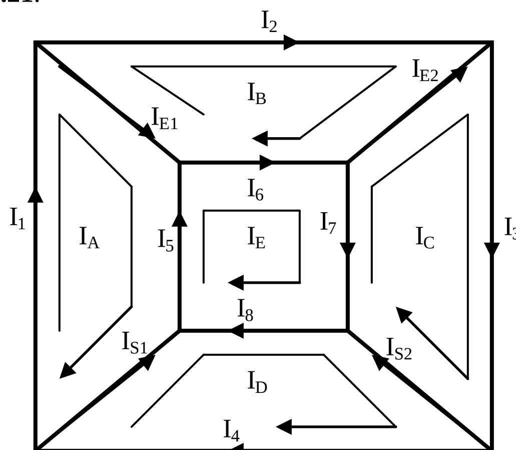
7.20. -----



$I_B = I_2 = 1{,}72$ A; $I_S = I_B - I_A \Rightarrow I_A = I_B - I_S = 1{,}2$ A.
$I_1 = I_A = 1{,}2$ A; $I_4 = E_2 / R_4 = 2{,}727$ A $\Rightarrow I_C = - I_B$;
$I_C = - 2{,}727$ A; $I_3 = I_B - I_C = 4{,}447$ A; $I_5 = I_B = 1{,}72$ A
a) $E_1 - I_1R_1 - I_2R_2 + I_4R_4 - I_5R_3 = 0 \Rightarrow R_2 = 7{,}595\ \Omega$.
b) $I_1 = 1{,}2$ A; $I_3 = - 4{,}447$ A; $I_4 = 2{,}727$ A;
I_5 1,72 A.

c) Snage generatora: $P_1' = E_1I_1 = 14{,}4$ W; $P_2' = E_2I_3 = 26{,}7$ W; $P_S' = U_SI_S = (E_1 - I_1R_1)\cdot I_S = 6{,}178$ W.
Snage otpornika: $P_{R1} = I_1^2R_1 = 0{,}144$ W; $P_{R2} = I_2^2R_2 = 22{,}47$ W; $P_{R3} = I_5^2R_3 = 8{,}284$ W;
$P_{R4} = I_4^2R_4 = 16{,}36$ W.
Proveriti zakon o održanju snaga (nergija). Da li je $\Sigma P'$ (snage generatora) = ΣP_R (snage otpornika)?

7.21. -----



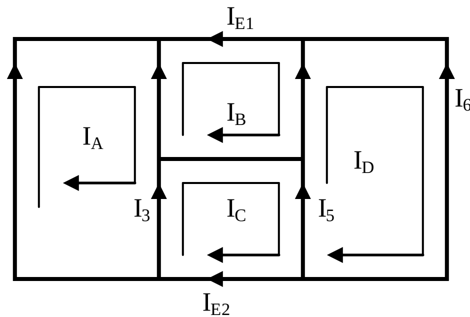
$E_1 - U_{S1} = I_A\cdot(R + R) - I_E\cdot R$ .... (1)
$- E_1 - E_2 = I_B\cdot(R + R) - I_E\cdot R$ ....(2)
$E_2 + U_{S2} = I_C\cdot(R + R) - I_E\cdot R$ ....(3)
$U_{S1} - U_{S2} = I_D\cdot(R + R) - I_E\cdot R$ ....(4)
$0 = I_E\cdot(R + R + R + R) - I_AR - I_BR - I_CR - I_DR$
$4 + U_{S2} = 2\,000\ I_C - 1\,000\ I_E$
$U_{S1} - U_{S2} = 2\,000\ I_D - 1\,000\ I_E$
$4 + U_{S1} = 2\,000\ I_C + 2\,000\ I_D - 2\,000\ I_E$
$2 - U_{S1} = 2\,000\ I_A - 1\,000\ I_E$
$6 = 2\,000\ I_A + 2\,000\ I_C + 2\,000\ I_D - 3\,000\ I_E$
$- 6 = 2\,000\ I_B - 1\,000\ I_E$
$0 = 2\,000\cdot(I_A + I_B + I_C + I_D) - 4\,000\ I_E \Rightarrow$
$I_A + I_B + I_C + I_D = 2\cdot I_E$
Uvrštavanjem ove jednakosti u zadnju (5) sledi:
$0 = 4\,000\ I_E - 1\,000\cdot(I_A + I_B + I_C + I_D) = 4\,000\ I_E - 1\,000\cdot 2I_E = 2\,000\ I_E \Rightarrow I_E = 0$.
$- 6 + 1\,000\ I_E = 2\,000\ I_B \Rightarrow I_B = - 3$ mA.
Kako je: $I_{S1} = I_D - I_A \Rightarrow I_A = I_D - I_{S1}$; odnosno: $I_{S2} = I_C - I_D \Rightarrow I_C = I_D + I_{S2} \Rightarrow$
Za $I_E = 0 \Rightarrow 2\cdot I_E = 0 = I_A + I_B + I_C + I_D \Rightarrow I_D - I_{S1} + I_B + I_D + I_{S2} + I_D = 0 \Rightarrow 3\ I_D - 2 + (- 3) + 5 = 0 \Rightarrow$
$I_D = 0$ A; $I_A = 0 - 2 = - 2$ mA; $I_C = 0 + I_{S2} = 5$ mA.
Konačno, struje po granama iznose:
$I_1 = I_A = - 2$ mA; $I_2 = I_B = - 3$ mA; $I_3 = I_C = 5$ mA; $I_4 = I_D = 0$ A; $I_5 = I_E - I_A = 2$ mA;
$I_6 = I_E - I_B = 3$ mA; $I_7 = I_E - I_B = - 5$ mA; $I_8 = I_E - I_D = 0$ A.
Napone na krajevima strujnog generatora možemo izračunati iz prve i treće jednačine. Njihova rešenja su: $U_{S1} = 6$ V; odnosno, $U_{S2} = 6$ V.

Snage na krajevima generatora iznose:
$P_{E1} = E_1I_1 = 2$ mW; $P_{E2} = E_2I_2 = 32$ mW; $P_{S1} = U_{S1}I_{S1} = 12$ mW; $P_{S2} = U_{S2}I_{S2} = 30$ mW.

Snage na otpornicima su:
$P_{R1} = I_1^2R_1 = 4$ mW; $P_{R2} = I_2^2R_2 = 9$ mW; $P_{R3} = I_3^2R = 25$ mW; $P_{R4} = I_4^2R = 0$ W; $P_{R5} = I_5^2R = 4$ mW;
$P_{R6} = I_6^2R = 9$ mW; $P_{R7} = I_7^2R = 25$ mW; $P_{R8} = I_8^2R = 0$ W.

Čitalac neka proveri zakon o održanju energije (snage). Da li je ukupni zbir snaga koje daju generatori jednak zbiru svih snaga koje se troše na otpornicima (potrošačima)?

7.22. -----



$0 = I_A\cdot(R_1 + R_2 + R_3) – I_B R_2 – I_C R_3$ .... (1)
$E_3 – E_1 = I_B\cdot(R_2 + R_4) – I_A R_2 – I_D R_4$ ....(2)
$E_2 – E_3 = I_C\cdot(R_3 + R_5) – I_A R_3 – I_D R_5$ .....(3)
$\underline{0 = I_D\cdot(R_4 + R_5 + R_6) – I_B R_4 – I_C R_5}$ ...... (4)
Kako je $I_B – I_C = 0 \;\Rightarrow\; I_B = I_C$
$0 = 8 I_A – 6 I_B$
$– 10 = – I_A + 2I_B – I_D – E_3$
$15 = – 5I_A + 6I_B – I_D + E_3$
$0 = \quad – 2I_B + 4I_D \;\Rightarrow\; I_B = 2I_D$

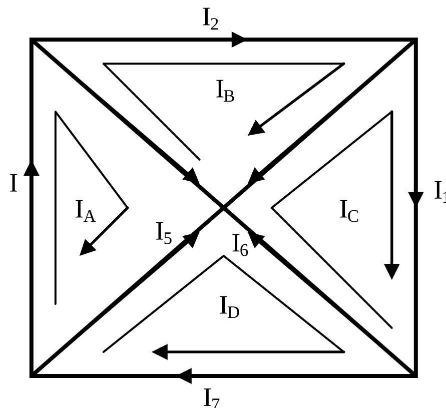
Daljim sređivanjem jednačina slede rešenja: $I_A = 1{,}5$ A; $I_B = 2$ A; $I_B = I_C = 2$ A; $E_3 = 11{,}5$ V.

a) $E_3 = 11{,}5$ V;

b) Struje po granama iznose: $I_1 = I_A = 1{,}5$ A; $I_2 = I_B – I_A = 0{,}5$ A; $I_3 = I_C – I_A$

$I_4 = I_D – I_B = – 1$ A; $I_5 = I_D – I_C = – 1$ A; $I_6 = – I_D = 1$ A.
Snage na otporima R_1 i R_6 su: $P_{R1} = I_1^2R_1 = 4{,}5$ W; $P_{R6} = I_6^2R_6 = 2$ W.

7.23. -----



$E = I_A\cdot(R_3 + R_5) – I_B R_3 – I_D R_5$ .... (1)
$0 = I_B\cdot(R_2 + R_4 + R_3) – I_A R_3 – I_C R_4$ ....(2)
$E_1 = I_c\cdot(R_4 + R_1 + R_6) – I_B R_4 – I_D R_6$ .... (3)
$\underline{0 = I_D\cdot(R_5 + R_6 + R_7) – I_A R_5 – I_C R_6}$ ....(4)
$200 = 35 I_A – 15 I_B – 20 I_D$
$0 = – 15 I_A + 45 I_B – 15 I_C$
$100 = \quad – 15 I_B + 45 I_C – 20 I_D$
$\underline{0 = – 20 I_A – 20 I_C + 60 I_D}$
Daljim rešavanjem navedenog sistema jednačina dobije se za prvu konturu vrednost struje:
$I_A = 12{,}208$ A.
Ovo je i vrednost struje generatora ems E ($I = I_A$), pa je snaga navedenog generatora :
P = E I = 2 441,6 W.

7.24. ----- vidi zad. 7.1; **7.25.** ----- vidi zad. 7.3; **7.26.** ----- vidi zad. 7.4;

7.27. ----- vidi zad. 7.5; **7.28**. ----- vidi zad. 7.6;

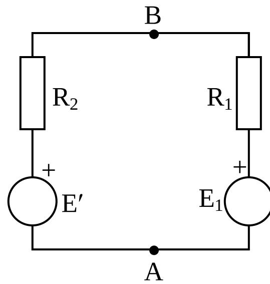
7.29. ----- $G_1 = 1/R_1 = 0{,}25$ S; $G_2 = 1/R_2 = 0{,}1$ S; $U_{AB} = (E_1G_1 + E_2G_2 + E_3G_3) / (G_1 + G_2 + G_3) \Rightarrow$
$20 = (10\cdot 0{,}2 + 20\cdot 0{,}1 + 25\cdot G_3) / (0{,}1 + 0{,}2 + G_3) \;\Rightarrow\; G_3 = 0{,}4$ S $\;\Rightarrow\; R_3 = 1 / G_3 = 2{,}5\ \Omega$.

7.30. ----- $G_1 = G_2 = 1/R = 1$ S; $U_{AB} = (E_1G_1 – E_2G_2) / (G_1 + G_2) = 2{,}5$ V;
$U_{AB}' = (E_1 – E_2') / (G_1 + G_2) = (10 – 2\cdot 5) / 2 = 0$ V. Napon opadne za 2,5 V (padne sa 2,5 V na 0 V).

7.31. ----- $G_1 = 1/2R = G_2 = G_3 = G$; $U_o = (E_1G_1 – E_2G_2) / (G_1 + G_2) = G\cdot(E_1 – E_2) / 3G = 18$ V;
$U_o' = (E_1G_1 – E_2'G_2) / (G_1 + G_2) = G\cdot(E_1 – E_2') / 3G = (E_1 – 4E_2) / 3 = (24 – 4\cdot 6) / 3 = 0$ V $\Rightarrow$
$I_o = U_o / 2R$; $I_o' = U_o' / 2R = 0$ A; $\Delta I_o = I_o – I_o' = I_o$. Dakle, struja padne sa vrednosti I_o na nulu.

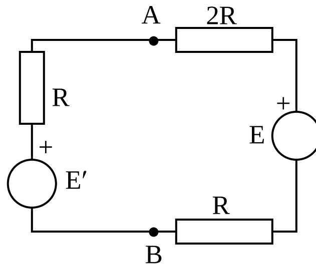
7.32. ----- 2V.

7.33. -----



$G_1 = G_2 = G = 1/R_1 = 0{,}1$ S; $E' = I_S \cdot R_2 = 100$ V;
$U_{AB} = (-E'G_2 - E_1G_1)/(G_1 + G_2) = 0{,}1\cdot(-100 - E_1)/2\cdot 0{,}1 \Rightarrow$
$U_{AB} = -50 - 0{,}5\,E_1$;
$U_{AB}' = (-E'G_2 + E_1G_1)/(G_1 + G_2) = -50 + 0{,}5\,E_1$;
Kako je $U_{AB}' = U_{AB}/3 \Rightarrow U_{AB} = 3U_{AB}' \Rightarrow$
$-50 - 0{,}5\,E_1 = 3\cdot(-50 + 0{,}5\,E_1) \Rightarrow E_1 = 50$ V.

7.34. -----



$I_o = E/4R = 5R/4R = 1{,}25$ A;
Kada je P UKLJUČEN , nastaje strujni generator koji nakon pretvaranja u naponski daje novu sliku, te sledi:
$E' = I_S\cdot R = 5R$; $I' = (E' - E)/4R = 0$ V $\Rightarrow U_{AB} = E' = E = 0$ V.
Priključenjem otpora R na tačke AB, tj. vraćajući naponski generator u strujni, kroz taj će proticati struja: $I_o' = U_{AB}/R \Rightarrow$
I_o' 5 A; $\Delta I = I_o' - I_o = 3{,}75$ A. Struja je porasla za 3,75 A.
Ili : $I_o'/I_o = 4 \Rightarrow I_o' = 4I_o$. Dakle, struja se povećala 4 puta.

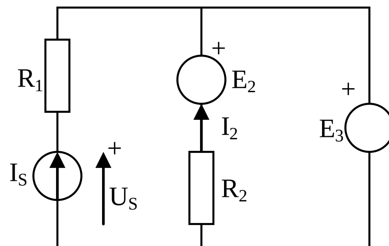
7.35. ----- Struja strujnog generatora I_S protiče i kroz otpor R_2, pa se ova cela grana može tretirati kao strujna grana (idealni strujni generator).
Otpornik R je jednak ukupnom otporu preostalog dela kola (kako bi snaga bila maksimalna), pa sledi:

$$R = R_1.$$

(NAPOMENA! Kod računanja ukupnog otpora kola u kojem se nalaze strujni i naponski generatori nestaju parametri E i I_S (ostaju R_g i R_S) . Umesto E napraviti kratku vezu (ostaje u kolu R_g), a I_s isključiti , tj. tu granu prekinuti (ostaje otpor R_S).

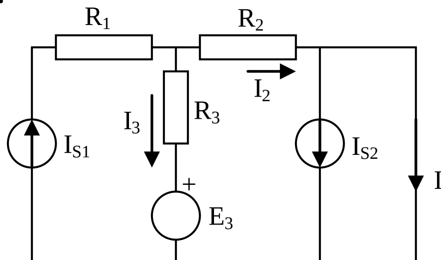
7.36. ----- 9,85 A.

7.37. -----



$U_S = P_S/I_S = 13$ V.
$U_S - I_SR_1 - E_3 = 0 \Rightarrow E_3 = U_S - I_SR_1 = 12$ V
(pol označen na slici).
$E_3 - E_2 + I_2R_2 = 0 \Rightarrow I_2R_2 = E_2 - E_3 = -2$ V $\Rightarrow$
$I_2 = -2/R = -1$ A.
Smer struje I_2 je suprotan od naznačenog.

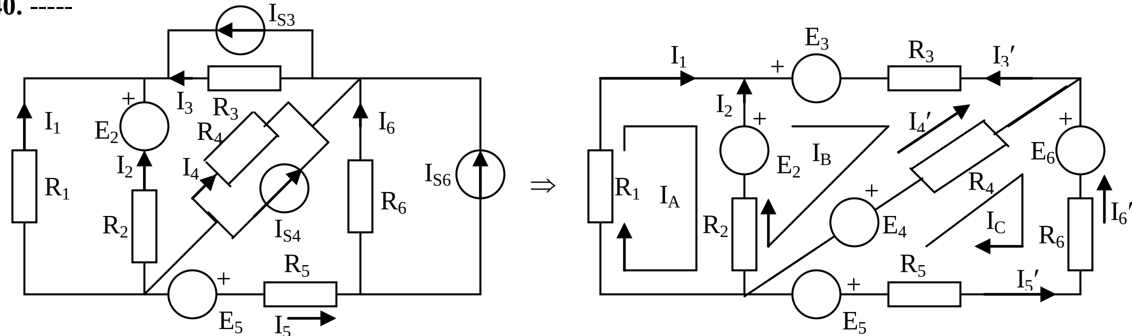
7.38. -----



$E_3 + I_3R_3 - I_2R_2 = 0$;
$I_{S1} = I_2 + I_3 \Rightarrow I_2 = I_{S1} - I_3 \Rightarrow$
$E_3 + I_3R_3 - (I_{S1} - I_3)\cdot R_2 = 0 \Rightarrow$
$1 + 300I_3 - 0{,}01R_2 + I_3R_2 = 0 \Rightarrow I_3 = 0{,}002$ A;
$I_2 = 0{,}01 - 0{,}002 = 0{,}008$ A = 8 mA;
$I_2 = I_{S2} + I \Rightarrow I = I_2 - I_{S2} = 8 - 15 = -7$ mA.

7.39. ----- Rešenje u zad. 7.20;

7.40. -----



Pretvarajući strujne generatore I_{S3}, I_{S4} i I_{S6} u naponske E_3; E_4 i E_6 nastaje nova slika sa sledećim (novim parametrima): $E_3 = I_{S3}\cdot R_3 = 50$ V; $E_4 = I_{S4}\cdot R_4 = 20$ V; $E_6 = I_{S6}\cdot R_6 = 45$ V.
Koristeći metodu konturnih struja nastaju jednačine (druga slika):

$-E_2 = I_A\cdot(R_1 + R_2) - I_B\cdot R_2 \quad\Rightarrow\quad -10 = 5\,I_A - 2\,I_B$

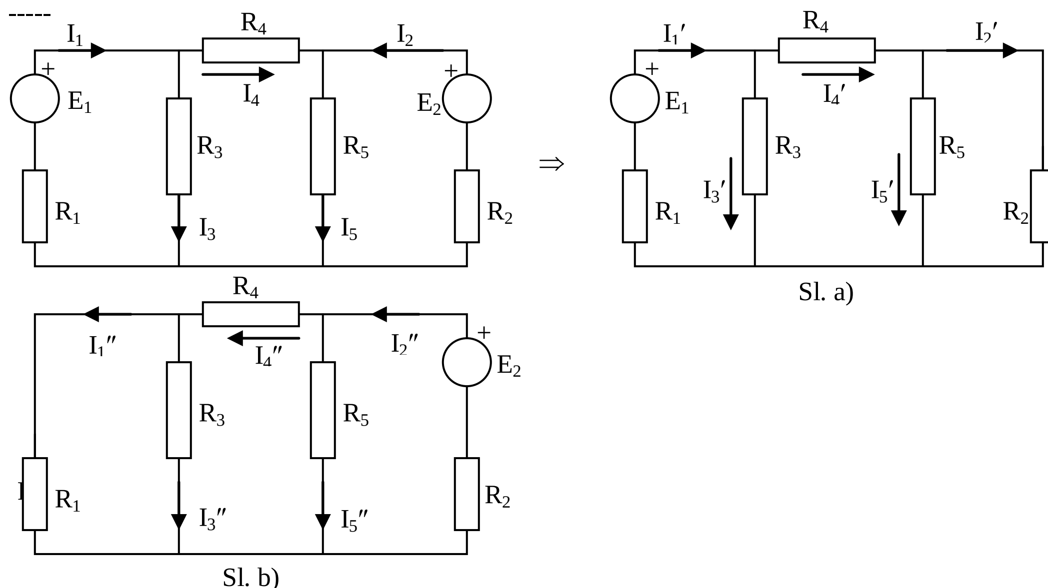
$E_2 - E_3 - E_4 = I_B\cdot(R_2 + R_3 + R_4) - I_A R_2 - I_C R_4 \quad\Rightarrow\quad -60 = -2\,I_A + 17\,I_B - 5\,I_C$

$\underline{-E_5 + E_4 - E_6 = I_C\cdot(R_4 + R_5 + R_6) - I_B R_4 \quad\Rightarrow\quad -45 = -5\,I_B + 21\,I_c}$

Rešenjem navedenog sistema jednačina nastaju rešenja konturnih struja koja iznose:
$I_A = -3{,}991$ A; $I_B = -4{,}978$ A; $I_C = -3{,}328$ A.
Struje po granama su: $I_1 = I_A = -3{,}991$ A; $I_2 = I_B - I_A = -0{,}987$ A; $I_5 = I_6' = -I_C = 3{,}328$ A;
$I_4' = I_C - I_B = 1{,}65$ A; $I_3' = -I_B = 4{,}978$ A; $I_5 = I_6 + I_{S6} \Rightarrow I_6 = I_5 - I_{S6} = 0{,}328$ A;
$I_3' = I_{S3} + I_3 \Rightarrow I_3 = I_3' - I_{S3} = -0{,}022$ A; $I_4' = I_4 + I_{S4} \Rightarrow I_4 = I_4' - I_{S4} = -2{,}35$ A.
$P_{R1} = I_1^2 R_1 = 47{,}784$ W; $P_{R2} = I_2^2 R_2 = 1{,}948$ W; $P_{R3} = I_3^2 R_3 = 0{,}005$ W; $P_{R4} = I_4^2 R_4 = 27{,}613$ W;
$P_{R5} = I_5^2 R_5 = 11{,}076$ W; $P_{R6} = I_6^2 R_6 = 1{,}614$ W;
$P_{E2} = E_2 I_2 = -9{,}87$ W (prima energiju, jer su E_2 i I_2 suprotnih smerova); $P_{E5} = E_5 I_5 = 66{,}56$ W;
$P_{S3} = U_{S3} I_{S3} = I_3 R_3 I_{S3} = 1{,}1$ W; $P_{S4} = U_{S4} I_{S4} = I_4 R_4 I_{S4} = 47$ W; $P_{S6} = U_{S6} I_{S6} = I_6 R_6 I_{S6} = -14{,}76$ W
Kako su U_{S6} (zbog struje I_6, koja određuje polaritet U_{S6}) i I_{S6} suprotnih smerova ovaj generator prima energiju (potrošač).
Proveriti zakon o održanju energije (snage).

7.41. ----- vidi rešenje u zad. 7.1; **7.42.** ----- vidi rešenje u zad.7.29;

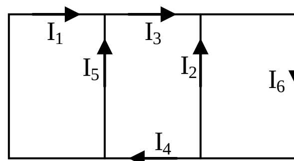
7.43. -----



Kada je prisutna samo ems E_1 nastaj sl. a), pa sledi:
$R_{25}' = R_2R_5 / (R_2 + R_5) = 0{,}8\ \Omega$; $R_{425}' = R_4 + R_{25}' = 5{,}8\ \Omega$; $R_{3425}' = R_3R_{425}' / (R_3 + R_{425}') = 2{,}685\ \Omega$;
$R_e' = R_1 + R_{3425}' = 4{,}685\ \Omega$.
$I_1' = E_1 / R_e' = 0{,}427$ A; $U_3' = I_1'R_{3425}' = 1{,}146$ V; $I_3' = U_3' / R_3 = 0{,}229$ A; $I_1' = I_3' + I_4' \Rightarrow I_4' = 0{,}198$ A;
$U_5' = I_4'R_{25}' = 0{,}158$ V; $I_5' = U_5' / R_5 = 0{,}04$ A; $I_2' = I_4' - I_5' = 0{,}158$ A.
Kada je prisutna samo ems E_2 nastaje sl. b), pa sledi:
$R_{13}'' = R_1R_3 / (R_1 + R_3) = 1{,}429\ \Omega$; $R_{413}'' = R_4 + R_{13}'' = 6{,}429\ \Omega$;
$R_{5431}'' = R_5R_{413}'' / (R_5 + R_{413}'') = 2{,}466\ \Omega$; $R_e'' = R_2 + R_{5431}'' = 3{,}466\ \Omega$.
$I_2'' = E_2 / R_e'' = 2{,}885$ A; $U_5'' = I_2''R_{5431}''\ 7{,}115$ V; $I_5'' = U_5'' / R_5 = 1{,}779$ A; $I_4'' = I_2'' - I_5'' = 1{,}106$ A;
$U_{13}'' = I_4''R_{13}'' = 1{,}581$ V; $I_3'' = U_{13}'' / R_3 = 0{,}316$ A; $I_1'' = U_{13}''\ R_1 = 0{,}791$ A.
Ponovnim udruživanjem ems E_1 i E_2 nastaje izvorna slika, iz koje slede konačna rešenja :
$I_1 = I_1' - I_1'' = - 0{,}364$ A; $I_2 = I_2'' - I_2' = 2{,}727$ A; $I_3 = I_3' + I_3'' = 0{,}545$ A; $I_4 = I_4' - I_4'' = - 0{,}908$ A;
$I_5 = I_5' + I_5'' = 1{,}819$ A. (NAPOMENA! Voditi računa o smerovima struja).

7.44. ----- $I_1 = 4$ A (prema dole); $I_2 = 3$ A (smer prema gore); $I_3 = 1$ A (smer prema gore).

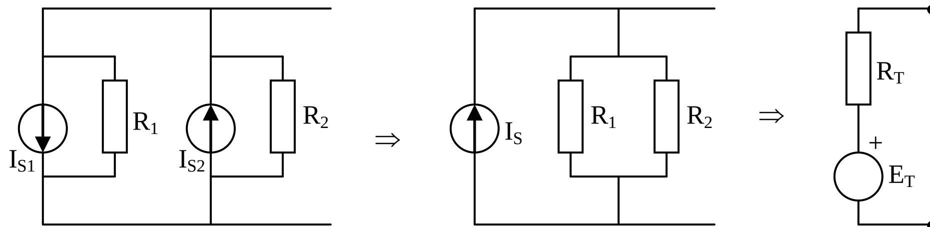
7.45. -----



$I_1 = 2{,}6875$ A; $I_2 = 0{,}5$ A; $I_3 = 0{,}375$ A;
$I_4 = 0{,}375$ A; $I_5 = - 2{,}3125$ A; $I_6 = 0{,}875$ A.
Smerovi struja su dati prema slici.

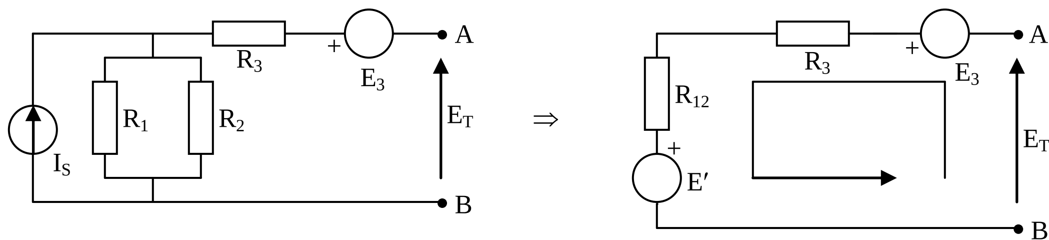
7.46. ----- $I_1 = 0{,}4$ A. Smer je dobro određen; **7.47.** ----- Rešenje u zadatku 7.31.

7.48. -----



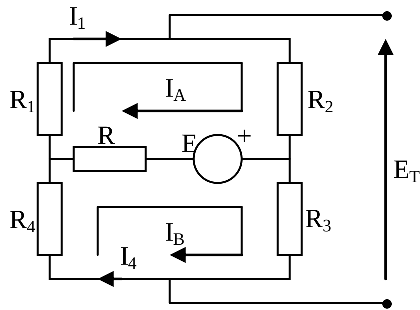
Pretvaranjem naponskih generatora u strujne i obrnuto, nastaju navedene šeme iz kojih sledi:
$I_{S1} = E_1 / R_1 = 50/15$ A; $I_{S2} = E_2 / R_2 = 70/9$ A; $I_S = I_{S2} - I_{S1} = 40/9$ A; $R_{12} = R_T = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) \Rightarrow$
$R_T = 5{,}625\ \Omega$; $E_T = I_S \cdot R_{12} = 25$ V.

7.49. -----



Pretvarajući naponski generator u strujni i obrnuto sledi:
$I_S = E_1 / R_1 = 6$ A; $R_{12} = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 6\ \Omega$; $E' = I_S \cdot R_{12} = 36$ V.
Obilazeći konturu u naznačenom smeru (druga slika), sledi: $E_T + E_3 - E' = 0 \Rightarrow E_T = E' - E_3 = 24$ V.
(Napomena! Kako je kontura u prekidu u njoj nema struje a samim tim i omskih padova napona.)

7.50. -----



Kolo sadrži dve konture, za koje se mogu postaviti sledeće jednačine:

$-E = I_A(R + R_1 + R_2) - I_B R \Rightarrow -50 = 20\, I_A - 0$

$E = I_B(R + R_3 + R_4) - I_A R \Rightarrow 50 = 25\, I_B - 0$

$I_A = -2{,}5$ A; $I_B = 2$ A.

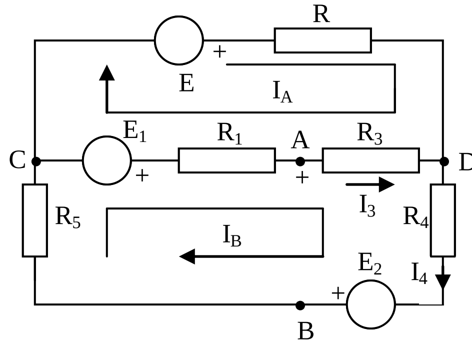
$I_1 = I_A = -2{,}5$ A; $I_4 = I_B = 2$ A.

Prema drugom Kirhofovom zakonu sledi:

$E_T + I_1R_1 + I_4R_4 = 0 \Rightarrow E_T = -I_1R_1 - I_4R_4 \Rightarrow$

$E_T = -(-2{,}5)\cdot 4 - 2\cdot 18 = 10 - 36 = -26$ V.

7.51. -----



$E - E_1 = I_A(R + R_1 + R_3) - I_B(R_1 + R_3)$

$E_1 + E_2 = I_B(R_1 + R_3 + R_4 + R_5) - I_A(R_1 + R_3)$

$-20 = 20\, I_A - 15\, I_B$

$125 = -15\, I_A + 25\, I_B$

Sistem jedn.daje rešenja: $I_A = 5$ A; $I_B = 8$ A $\Rightarrow$

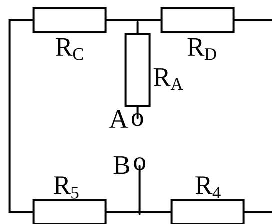
$I_3 = I_B - I_A = 3$ A; $I_4 = I_B = 8$ A.

$U_{AB} - I_3R_3 - I_4R_4 + E_2 = 0 \Rightarrow$

$E_T = U_{AB} = I_3R_3 + I_4R_4 - E_2 = 39$ V.

Otpor Tevenena ($R_{AB} = R_T$) naći će mo tako što će mo predhodno trougao otpora R, R_1 i R_3 pretvoriti u zvezdu otpora R_A, R_C i R_D.

$R_A = R_1R_3/(R_1 + R_3 + R) = 2{,}5\ \Omega$; $R_C = R_1R/(R_1 + R_3 + R) = 1{,}25\ \Omega$; $R_D = R_3R/(R_1 + R_3 + R) = 2{,}5\ \Omega$.



$R_T = R_A + (R_C + R_5)\cdot(R_D + R_4) / (R_C + R_5 + R_D + R_4) = 5{,}8\ \Omega$.

Vraćanjem otpora R_2 na Tevenenov generator (E_T , R_T), kroz njega će da protiče struja:

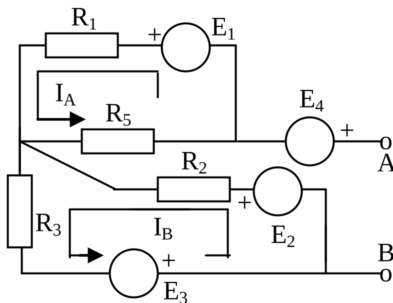
$I_2 = E_T / (R_T + R_2) = 39 / 7{,}8 = 5$ A. Ovo je struja koju pokazuje ampermetar ($I_A = I_2$) i njen smer je od tačke A ka tački B, jer je A na većem potencijalu od tačke B za 39 V ($U_{AB} = 39$ V).

7.52. ----- Isključenjem otpora R_3 između tačaka A i B između tih tačaka delovati će napon U_{AB}, koji će odgovarati naponu Tevenena. On iznosi $E_T = U_{AB} = 1$ V (primeniti metodu konturnih struja).

Otpor Tevenena je $R_T = R_{AB} = 1\ \Omega$.

Vraćajući otpor R_3 nazad, sledi: $I_3 = E_T / (R_T + R_3) = 0{,}5$ A.

7.53. ----- Struja koja protiče kroz R_4 je: $E_T / (R_T + R_4)$. Napon i otpor Tevenena (E_T i R_T) se dobije iz novonastale slike (isključiti otpor R_4):



$E_T - E_4 + I_AR_5 + I_BR_2 - E_2 = 0 \Rightarrow$

$E_T = E_2 + E_4 - I_A R_5 - I_BR_2$;

$I_A = E_1 / (R_1 + R_5) = 1{,}25$ A;

$I_B = (E_2 + E_3) / (R_2 + R_3) = 1$ A $\Rightarrow$

$E_T = U_{AB}' = -5$ V $\Rightarrow$ $U_{BA}' = 5$ V ($V_B > V_A$).

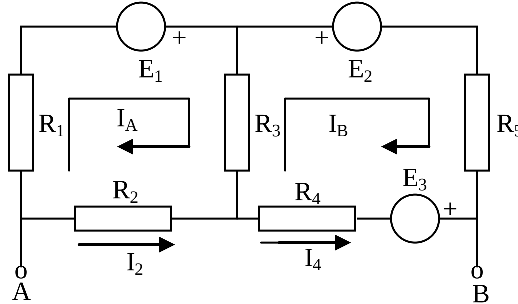
Otpor Tevenena je

$R_T = R_{AB}' = R_1\cdot R_5 / (R_1 + R_5) + R_2\cdot R_3 / (R_2 + R_3) = 4\ \Omega$.

Na kraju (vratiti otpor R_4), struja kroz otpornik R_4 iznosi:

$I_4 = U_{BA} / (R_T + R_4) = 0{,}5$ A (smer je od tačke B ka A).

7.54. ----- $R_T = (R_1 + R_5)\cdot(R_2 + R_4) / (R_1 + R_5 + R_2 + R_4) = 1\ \Omega$.
(NAOMENA! Otpornik R_3 nema nikakvog uticaja, jer zbog simetričnosti – ravnoteže mosta kroz njega ne teče nikakva struja. Samim tim on se može isključiti iz kola.)

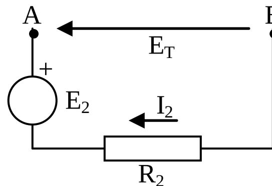


$E_1 = I_A\cdot(R_1 + R_2 + R_3) - I_B R_3$
$\underline{-E_2 - E_3 = = I_B\cdot(R_3 + R_4 + R_5) - I_A R_3}$
$5 = 3\,I_A - I_B$
$\underline{-8 = -I_A + 3\,I_B}$
$I_A = 0{,}875$ A; $I_B = -2{,}375$ A $\Rightarrow$
$I_2 = -I_A = -0{,}875$ A; $I_4 = -I_B = 2{,}375$ A.
$U_{AB}' - I_2R_2 - I_4R_4 + E_3 = 0 \Rightarrow$
$U_{AB}' = E_T = I_2R_2 + I_4R_4 - E_3 = -3{,}5$ V.

Kako je $U_{AB}' = -3{,}5$ V $\Rightarrow$ $U_{BA}' = 3{,}5$ V (Tačka B je na većem potencijalu od tačke A, te će struja kroz ovu granu teći od tačke B ka tački A.).
Vraćajući promenljivi otpornik R na tačke B i A, sledi:

a) $I = U_{BA}' / (R_T + R) = 3{,}5 / 2 = 1{,}75$ A ($R_T = R = 1\ \Omega$) $\Rightarrow$ $P_{max} = I^2R = 3{,}0625$ W.
b) $I_{max} = U_{BA}' / (R_T + 0) = 3{,}5$ A. Struja je u svakoj grani najveća kada je otpor u toj grani najmanji, tj. kada je on jednak nuli ($R = 0\ \Omega$).

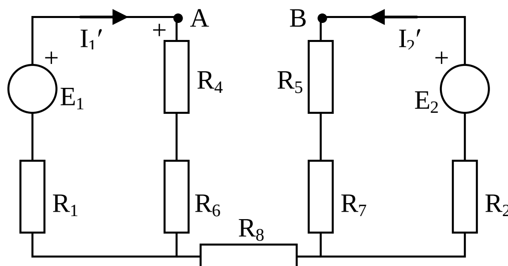
7.55. ----- Isključenjem promenljivog otpornika R kroz kolo će da protiče struja
$I_1' = I_2' = (E_1 + E_2) / (R_1 + R_2) = 1$ A.



$E_T - E_2 + I_2R_2 = 0 \Rightarrow E_T = E_2 - I_2R_2 = -40$ V ($U_{BA} = 40$ V).
$R_T = R_1R_2 / (R_1 + R_2) = 20\ \Omega$; $I = E_T / (R_T + R) = E_T / 2R = -1$ A.
(smer od B ka A) $\Rightarrow$ $P_{max} = I^2R = 20$ W.
$I_{max} = E_T / R_T = 2$ A ($R = 0\ \Omega$).

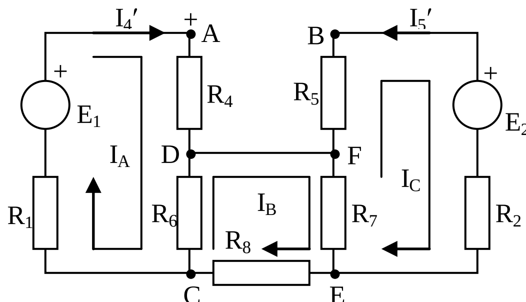
7.56. ----- $U_{CD} = -2$ V ($U_{DC} = 2$ V); **7.57.** ----- $R = 18\ \Omega$; $P = 5{,}56$ W.

7.58. ----- P ISKLJUČEN:



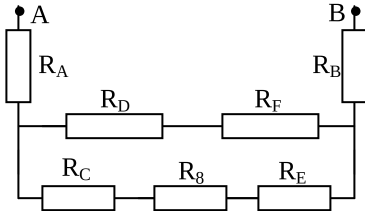
$I_1' = E_1 / (R_1 + R_2 + R_3) = 0{,}3$ A.
$I_2' = E_2 / (R_2 + R_5 + R_7) = 0{,}6$ A.
$U_{AB}' - I_1' R_4 - I_1' R_6 + I_2' R_7 + I_2' R_5 = 0 \Rightarrow$
$E_T = U_{AB}' = -10{,}5$ V ($U_{BA}' = 10{,}5$ V).
$R_T = (R_4 + R_6)\cdot R_1 / (R_4 + R_6 + R_1) + R_B +$
$+ (R_5 + R_7)\cdot R_2 / (R_5 + R_7 + R_2) = 18{,}75\ \Omega$.
$I_3 = E_T / (R_T + R_3) = -0{,}311$ A (od B ka A)

P UKLJUČEN:



$E_1 = I_A\cdot(R_1 + R_4 + R_6) - I_B R_6$
$0 = I_B\cdot(R_6 + R_7 + R_8) - I_A R_6 - I_C R_7$
$\underline{-E_2 = I_C\cdot(R_2 + R_5 + R_7) - I_B R_7}$
$12 = 40\,I_A - 20\,I_B$
$0 = -20\,I_A + 50\,I_B - 20\,I_C$
$\underline{-24 = \quad -20\,I_B + 40\,I_C}$
Rešenjem sistema jednačina dobiju se konturne struje: $I_A = 0{,}2$ A; $I_B = -0{,}2$ A; $I_C = -0{,}7$ A $\Rightarrow$
$I_4' = I_A = 0{,}2$ A; $I_5' = -I_C = 0{,}7$ A;

Koristeći drugi Kirhofov zakon, sledi:
$U_{AB}' - I_4'R_4 + I_5'R_5 = 0 \Rightarrow E_T = U_{AB}' = I_4'R_4 - I_5'R_5 = -7{,}5$ V ($U_{BA}' = 7{,}5$ V).
Da bi odredili otpor Tevenena predhodno trougao otpora R_1, R_4 i R_6 pretvoriti u zvezdu otpora R_A, R_C i R_D.
Na isti način trougao otpora R_5, R_2 i R_7 pretvoriti u zvezdu otpora R_B, R_F i R_E .
Tako nastaju otpori: $R_A = R_1R_4 / (R_1 + R_4 + R_6) = 1{,}875\ \Omega$; $R_C = R_1R_6 / (R_1 + R_4 + R_6) = 2{,}5\ \Omega$;
$R_D = R_4R_6 / (R_1 + R_4 + R_6) = 7{,}5\ \Omega$;
odnosno: $R_B = R_2R_5 / (R_2 + R_5 + R_7) = 1{,}875\ \Omega$; $R_E = R_2R_7 / (R_2 + R_5 + R_7) = 2{,}5\ \Omega$;
$R_F = R_5R_7 / (R_2 + R_5 + R_7) = 7{,}5\ \Omega$.

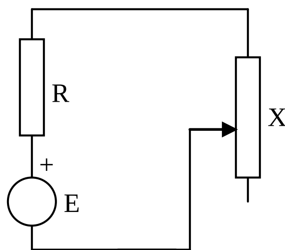


Kako su R_D i R_F redno vezani, odnosno R_C, R_E i $R_8 \Rightarrow$
$R_{DF} = R_D + R_F = 15\ \Omega$; $R_{CE8} = R_C + R_E + R_8 = 15\ \Omega \Rightarrow$
$R_P = R_{DF}\cdot R_{CE8} / (R_{DF} + R_{CE8}) = 15\cdot 15 / (15 + 15) = 7{,}5\ \Omega$.
Otpor Tevenena je $R_T = R_{AB} = R_A + R_B + R_P = 11{,}25\ \Omega$.
Konačno struja $I_3 = E_T / (R_T + R_3) = -0{,}286$ A. Smer struje I_3 je od tačke B ka tački A jer je $V_B > V_A$ za 7,5 V.

7.59. ----- $E_T = 0{,}643$ V; $R_T = R_1R_3 / (R_1 + R_3) + R_2R_4 / (R_2 + R_4) = 16{,}071\ \Omega$.
$I_5 = E_T / (R_T + R_5) = 0{,}0115$ A = 11,5 mA.

7.60. ----- $E_T = U_{AB}' = 5$ V; $R_T = R_{AB} = R_1R_2 / (R_1 + R_2) + R_3R_4 / (R_3 + R_4) = 4{,}5\ \Omega \Rightarrow$
$I_A = E_T / (R_T + R_A) = 1$ A.

7.61. -----



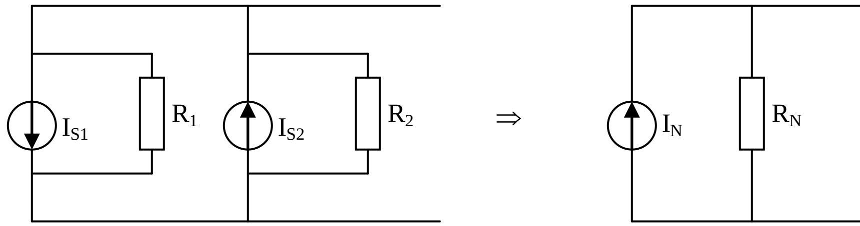
Pretvaranjem strujnih generatora u naponske i obrnuto, na kraju se dobije naponski (Tevenenov) generator (vidi sliku), čiji su parametri: $E_T = 15{,}714$ V; $R_T = 35{,}71\ \Omega$.

a) za $X = 0\ \Omega \Rightarrow I_o = E_T / R_T = 0{,}44$ A;
za $X = R_T \Rightarrow I_{35,71} = E_T / (R_T + X) = 0{,}22$ A;
za $X = 100\ \Omega \Rightarrow I_{100} = E_T / (R_T + X) = 0{,}116$ A.
Očito je da se struja smanjuje sa porastom otpornosti X. Čitaocu nije teško da na osnovu dobijenih podataka nacrta grafik. U cilju veće tačnosti može se uzeti još neka od vrednosti promenljivog otpora X.

b) za $X = 0\ \Omega \Rightarrow P_o = 0$ W;
za $X = R_T \Rightarrow P_{35,71} = P_{max} = I^2R = [E_T / (R_T + X)]^2\cdot X = 1{,}729$ W;
za $X = 100\ \Omega \Rightarrow P_{100} = [E_T / (100 + 35{,}71)]^2\cdot 100 = 1{,}34$ W.
Zaključak je da će snaga na promenljivom otporniku X da raste od 0 do 1,729 W (maksimalna snaga), sa porastom otpora od 0 do 35,71 Ω ($X = R_T$). Nakon ove vrednosti, sa porastom otpornosti X snaga se smanjuje. I u ovom slučaju, čitaocu neće biti teško da nacrta grafički dijagram [P = f (X)].

7.62. ----- Rešenje ovog zadatka nalazi se u zadatku 7.20.

7.63. -----

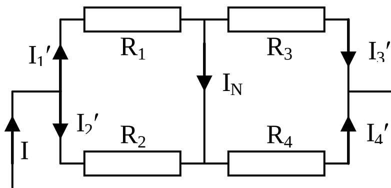


Nortonov (strujni) generator ima parametre I_N i R_N. Ti parametri su:
$I_N = I_{S2} – I_{S1} = E_1 / R_1 – E_2 / R_2 = 70 / 9 – 50 / 15 = 40 / 9$ A; $R_N = R_1R_2 / (R_1 + R_2) = 5{,}625\ \Omega$.

7.64. ----- $I_{S1} = E_1 / R_1 = 6$ A; $R_{12} = R_1R_2 / (R_1 + R_2) = 6\ \Omega$; $E_{12} = I_{S1} \cdot R_{12} = 36$ V;
$E_T = 36 – 12 = 24$ V; $R_T = R_{12} + R_3 = 11\ \Omega$; $I_N = E_T / R_T = 24 / 11 = 2{,}18$ A; $R_N = R_T = 11\ \Omega$.

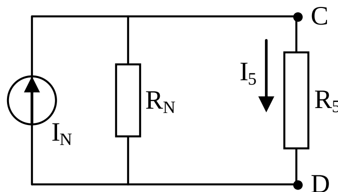
7.65. ----- Kako su za dati zadatak parametri Tevenenovog generatora $E_T = U_{AB} = – 26$ V;
$R_T = R_N = R_1R_2 / (R_1 + R_2) + R_3R_4 / (R_3 + R_4) = 8{,}24\ \Omega$ ($R = 0\ \Omega$).
$I_N = E_T / R_T = – 3{,}155$ A. Stvarni smer struje I_N je od tačke B ka tački A.

7.66. -----



$R_e' = R_1R_2 / (R_1 + R_2) + R_3R_4 / (R_3 + R_4) = 50/3\ \Omega$.
$I' = E / R_e' = 0{,}12$ A; $U_{12}' = I' \cdot R_{12} = 0{,}12 \cdot 200 / 30 = 0{,}8$ V.
$I_1' = U_{12}' / R_1 = 0{,}08$ A; $I_2' = U_{12}' / R_2 = 0{,}04$ A.
$U_{34}' = I' \cdot R_{34} = 0{,}12 \cdot 450 / 45 = 1{,}2$ V;
$I_3' = U_{34}' / R_3 = 0{,}04$ A.
$I_1' = I_N + I_3' \Rightarrow I_N = I_1' – I_3' = 0{,}04$ A.

Otpor Nortonovog generatora je $R_N = R_1R_3 / (R_1 + R_3) + R_2R_4 / (R_2 + R_4) = 16{,}071\ \Omega$.
Priključenjem otpornika R_5 na mesto kratke veze, a umesto predhodnog kola sada se priključuje Nortonov (strujni) generator sa parametrima I_N i R_N. Tako nastaje nova slika iz koje se lako izračuna tražena struja I_5 (dve varijante: 1. pretvoriti strujni generator u naponski, i 2. direktno iz Nortonovog generatora)



$U_{CD} = I_N \cdot [R_N \cdot R_5 / (R_N + R_5)] = 0{,}04 \cdot 16{,}071 \cdot 40/(16{,}071 + 40)$
$U_{CD} = 0{,}459$ V.Na kraju, struja koja protiče kroz otpor otpornosti R_5 iznosi
$I_5 = U_{CD} / R_5 = 0{,}0115$ A = 11,5 mA, u naznačenom smeru.

7.67. ----- Rešenje je u rešenju zadatka 7.60; **7.68.** ----- Rešenje je u rešenju zadatka 7.61;

7.69. ----- Rešenje je u rešenju zadatka 7.56; **7.70.** ----- Rešenje je u rešenju zadatka 7.58.

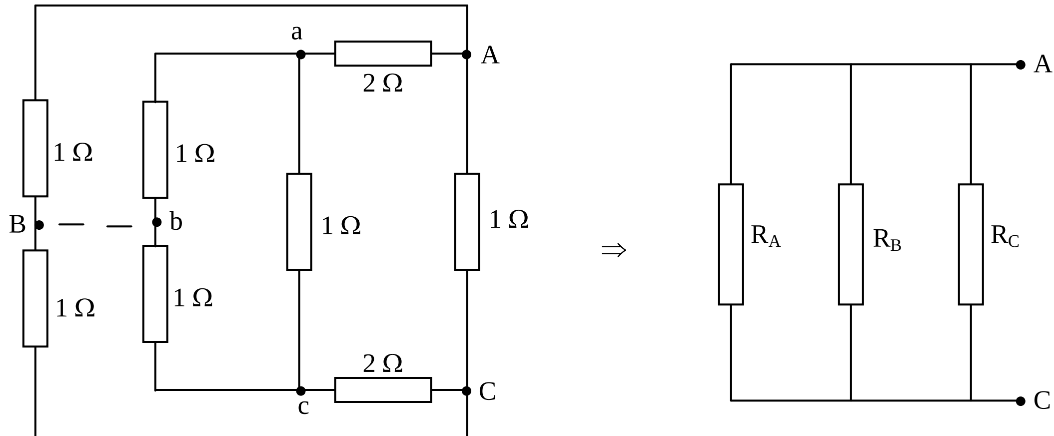
8.1. ----- a) Tačke C i D su na istom potencijalu ($V_C = V_D$) pa se otpornik otpornosti R_1 može isključiti, jer on u ovom slučaju nema nikakvog uticaja. Sledi,

R_{AB} = (R + R)·(2R + 2R) / (R + R + 2R + 2R = 4R/3 = 40/3 Ω.

b) $1/R_{CD}$ = 1/ (R + 2R) + 1 / R_1 + 1 / (R + 2R) = 7/60 ⇒ R_{CD} = 60/7 Ω.

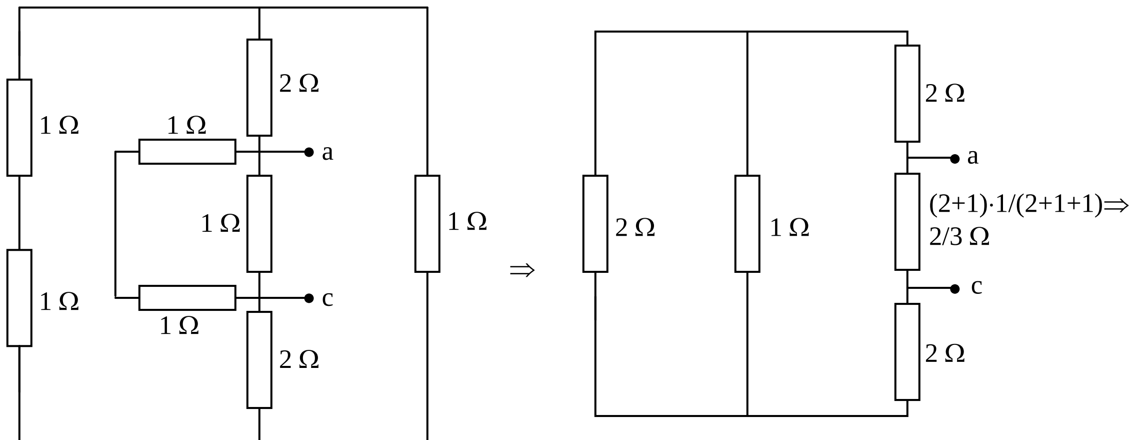
Za R_1' = $5R_1$ = 100 Ω ⇒ R / R_{CD}' = 1/50 + 1/100 + 1/30 = 23/300 ⇒ R_{CD}' 300/23 Ω.

8.2. ----- a) Tačke B i b su na istom potencijalu, pa se otpornik od 2 Ω između tih tačaka može isključiti, jer on nema nikakvog uticaja (kroz njega ne protiče struja).



R_A = 1+1 = 2 Ω; R_B = 2+ (1+1)·1 / (1+1+1) + 2 = 4 + 2/3 = 14/3 Ω; R_C = 1 Ω ⇒
$1/R_{AC} = 1/R_A + 1/R_B + 1/R_C$ = 1/2 + 3/14 + 1 = 24/14 ⇒ R_{AC} = 7/12 Ω.

b) Na isti način odredimo otpor između tačaka a i c. Tačke B i b su ponovo na istom potencijalu, pa sledi:

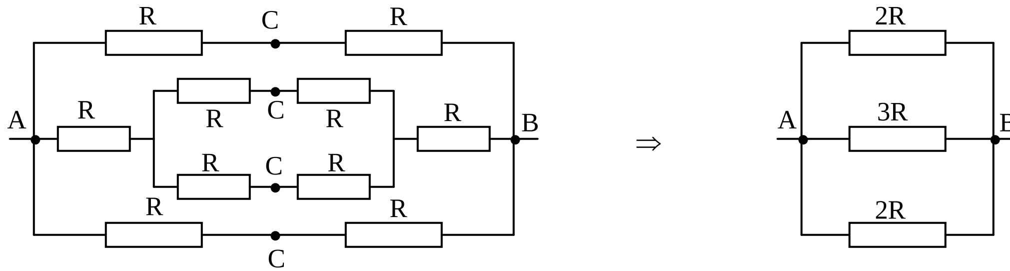


$$R_{ac} = \frac{(2/3)\cdot\left[2+2+2\cdot 1/(2+1)\right]}{2/3+2+2+2\cdot 1/(2+1)} = 2/3\cdot(4+2/3)/(2/3+4+2/3) = 7/12\ \Omega.$$

c) Kako su tačke B i C, kao i tačke b i c zbog simetrije (kada se računa sa priključcima između tačaka A i a) na istom potencijalu, možemo otpornike između tačaka B i C odnosno b i c isključiti (nemaju nikakav uticaj). U tom slučaju sledi: $1/R_{Aa}$ = 1 / (1+2+1) + 1/ 2 + 1 / (1+2+1) = 1/4 + 1/2 + 1/4 ⇒

R_{Aa} = 1 Ω.

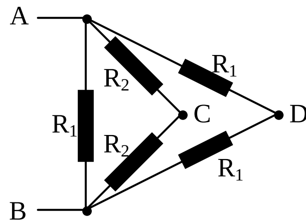
8.3. ----- Zbog simetrije dva otpornika se mogu izbaciti, jer su oni priključeni na tačke istog potencijala (tačka C), pa slika poprima sledeći izgled:



$1 / R_{AB} = 1 / 2R + 1 / 3R + 1 / 2R = 1 / R + 1 / 3R = 3 / 3R + 1 / 3R = 4 / 3R \Rightarrow R_{AB} = 3R / 4 = 7{,}5\ \Omega.$

8.4. ----- a) $R_{AB} = 7/12\ \Omega$; b) $R_{AC} = 3/4\ \Omega$; c) $R_{AD} = 5/6\ \Omega$. Vidi rešenje zadatka 4.14.

8.5. -----

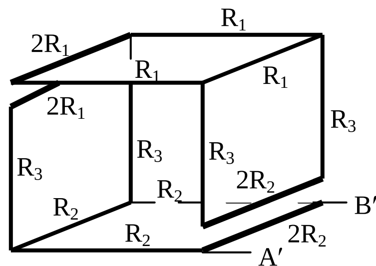


Tačke C i D su na istom potencijalu (princip simetričnosti), pa se otpornik između tih tačaka može izbaciti. U tom slučaju sledi (vidi sliku):

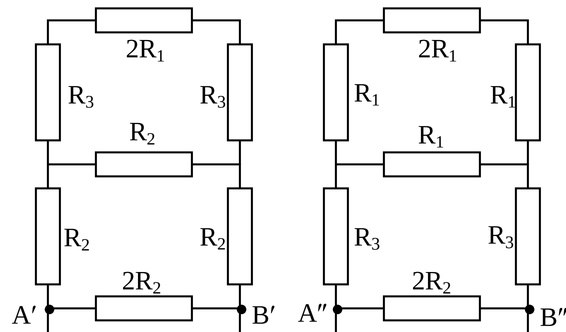
$1 / R_{AB} = 1 / R_1 +$! $/ 2R_1 + 1 / 2R_2 = 1/20 + 1/20 + 1/40 = 5/40 \Rightarrow$

$R_{AB} = 8\ K\Omega$.

8.6 -----







Sl.8.6. Sl.8.6.a) Sl.8.6.b)

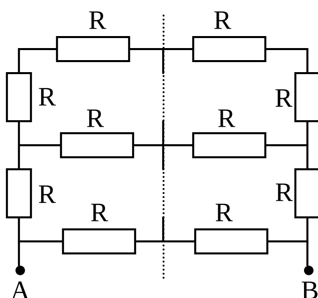
Data kocka (sl.8.6) se može podeliti u dve paralelne polovine (sl. 8.6 a. i sl. 8.6 b.). Ivica kocke koja se deli na dve polovine, zbog paralelne veze ima dva puta veći otpor od izvorne šeme ($2R_1$). Prva polovina kocke ima otpor $R_{AB}' = 11{,}85\ \Omega$, dok druga polovina kocke ima otpor $R_{AB}'' = 15{,}83\ \Omega$.

Konačno, ukupni otpor date kocke iznosi:

$$R_{AB} = R_{AB}' \cdot R_{AB}'' / (R_{AB}' + R_{AB}'') = 11{,}85 \cdot 15{,}83 / (11{,}85 + 15{,}83) = 6{,}778\ \Omega.$$

(NAPOMENA ! pogledati rešenje zadatka 4.14.a.)

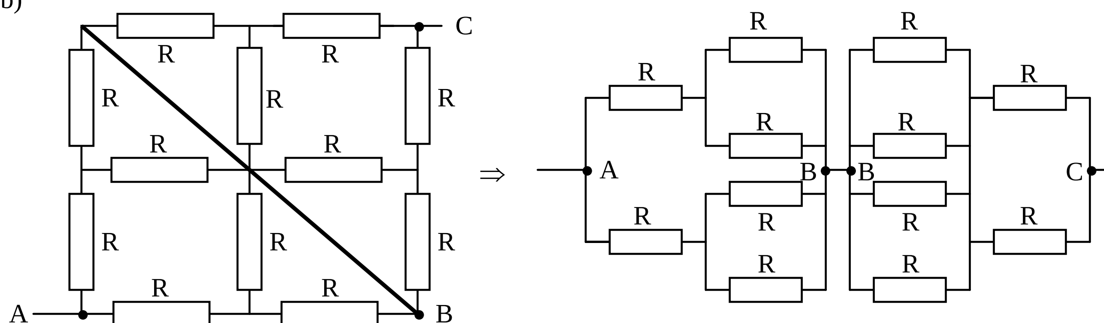
8.7. ----- a)



Isključenjem dva otpornika koji se nalaze između tačaka koje se nalaze na istom potencijalu, kolo dobija novi izgled (vidi sliku).
Rešenjem novonastalog kola (slike), dobije se ukupna otpornost između tačaka A i B, koja iznosi:

$R_{AB} = 6{,}25\ \Omega$.

b)



Ako tačke na istom potencijalu kratko spojimo, električno kolo poprima nacrtani izgled. Na osnovu ovih slika lako je odrediti ekvivalentni otpor između tačaka A i C. Konačno rešenje iznosi:

$R_{AC} = 7{,}5\ \Omega$.

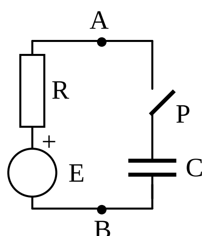
9.1. ----- Napunjeni kondenzator čini stacionarno stanje, a to znači da u kolu nemo protoka električne struje (ona je prisutna samo tokom punjenja ili pražnjenja kondenzatora). Kako su C i R u rednoj vezi, kroz otpornik R neće proticati struja, samim tim na njemu nema pada napona. Zbog toga je ukupni napon kojeg meri voltmetar V_2 jednak naponu kondenzatora. Dakle, voltmetri V_1 i V_2 mere isti napon od 24 V.

9.2. ----- $U_C = E = 100$ V. Vidi komentar u predhodnom zadatku.

9.3. ----- $W_C = QU_C/2 = U_C^2C/2 = 100^2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}/2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ J = 2,5 mJ.

Radi se o energiji kondenzatora. Ona je jednaka energiji koja se utrošila da bi se kondenzator napunio (nju pokriva izvor sa svojim jednim delom, dok drugi deo energije izvora se troši na gubitke – toplota). Tokom punjenja kondenzatora kroz kolo teče električna struja pa se usled njenog proticanja kroz otpornik R u njemu javljaju Džulovi gubici. Vreme punjenja je vrlo kratko (trenutno), a to znači da su Džulovi gubici (toplota) vrlo mali. U stacionarnom stanju (napunjen kondenzator) nema gubitaka, dok kondenzator poseduje određenu energiju koja se naziva **energija kondenzatora (** elektrostatička energija).

9.4. -----



Dato kolo se može transformisati u ekvivalentni naponski generator (vidi sliku), na koji se preko prekidača priključi kondenzator. Kod transformacije napon između tačaka A i B mora ostati isti.

Prvo pretvorimo nap. gen u strujni, te je $I_S' = E/R_g = 125$ A; $R_S' = R_g = 8\ \Omega$ Ova dva strujna gen. daju ekvivalentni sledećih parametre: $I_{Se} = I_S + I_S' = 125{,}2$ A; $R_{Se} = R \cdot R_S'/(R+R_S') = 7{,}968\ \Omega$.

Pretvaranjem ekvivalentnog strujnog generatora u naponski slede parametri za ekvivalentni naponski generator (na slici): $E_e = I_{Se} \cdot R_{Se} = 997{,}6$ V; odnosno $R_e = 7{,}968\ \Omega$.

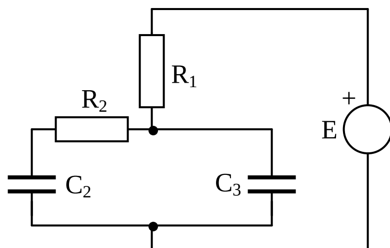
Priključenjem kondenzatora na ekvivalentni naponski generator (uključenje P), sledi

$U_C = E_e = 997{,}6$ V; $Q = U_C \cdot C = 49\,880 \cdot 10^{-6}$ C = 49,88 mC; $W_C = U_C \cdot Q/2 = 24{,}88$ J.

9.5. ----- Zbog simetrije (most u ravnoteži) prekidač nema nikakvog uticaja (na svim kondenzatorima vlada isti napon). Zbog toga na kondenzatorima ostaje ista količina naelektrisanja bez obzira u kojem je položaju prekidač. Ta količina naelektrisanja je za svaki kondenzator $Q_{C1} = Q_{C2} = Q_{C3} = Q_{C4} = Q = U_C \cdot C$.

Kako je $E = U_{C1} + U_{C2} = U_{C3} + U_{C4} \Rightarrow U_{C1} = U_{C2} = U_{C3} = U_{C4} = U_C = E/2 = 50\text{ V} \Rightarrow Q = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ C.

9.6. ----- Kako je otpor kondenzatora C_1 mnogo veći od otpora R_1 i R_2 (prekid kola), tokom punjenja kondenzatora kolo će biti zatvoreno preko R_1 i R_2. To praktično znači da se C_1 može smatrati isključenim iz kola, a samim tim i njegovo opterećenje je jednako nuli ($Q_1 = 0$ C). Na osnovu iznetog komentara nastaje nova slika:



$U_{C2} = U_{C3} = E$, jer u stacionarnom stanju nema pada napona U_{R1} odnosno U_{R2}.

$Q_2 = U_{C2} \cdot C_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ C = 2,5 μC

$Q_3 = U_{C3} \cdot C_3 = 10 \cdot 10^{-6}$ C = 10 μC

$Q_1 = U_{C1} \cdot C_1 = 0$ C.

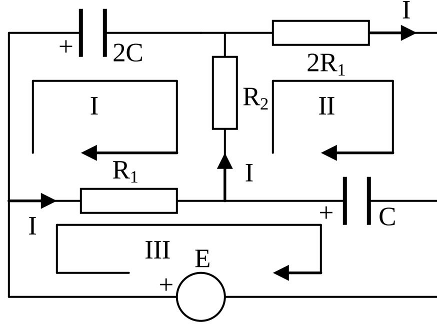
9.7. ----- Kolo je zatvoreno preko R_g, R_1 i R_2, te kroz ove otpore teče konstantna struja koja iznosi $I_2 = E / (R_g + R_1 + R_2) = 0{,}3$ A. (kondenzator stvara prekid kola, pa je R_3 isključen iz kola Na grani u kojoj se nalazi R_3 i C deluje napon U_2, koji je jednak $U_2 = I_2R_2 = 2{,}1$ V.

Kada je kondenzator napunjen (stacionarno stanje) na otporniku R_3 nema pada napona, pa je

$U_C = U_2 = 2{,}1\text{ V} \Rightarrow Q = U_C \cdot C = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$ C = 4,2 μC.

9.8. ----- Kada je prekidač isključen $\Rightarrow$ $I_2 = E / (R_g + R_1 + R_2) = 10/11$ A.
$U_{AB} = U_C = I_2R_2 = 40/11$ V $\Rightarrow$ $Q_C = U_C \cdot C = 36 \cdot 10^{-6}$ C = 36 μC.
Dakle, dok je P bio **isključen** u kondenzatoru je bila prisutna količina naelektrisanja od $Q_C = 36$ μC.
Kada se P **uključi** R_2 i R_3 su u paralelnoj vezi, pa je $R_{23} = R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3) = 2\ \Omega$ $\Rightarrow$
$I_{23} = E / (R_g + R_1 + R_{23}) = 10/9$ A; $U_C' = I_{23} \cdot R_{23} = 20/9$ V; $Q_C' = U_C' \cdot C = 22 \cdot 10^{-6}$ C = 22 μC.
Nakon uključenja prekidača u kondenzatoru vlada količina naelektrisanja od 22 μC (posle punjenj – u stacionarnom stanju).
Razlika između predhodne količine naelektrisanja (P isključeno) i krajnje (P uključeno) predstavlja količinu naelektrisanja koja će proteći kroz kondenzator C tokom njegovog ponovnog punjenja.
Sledi $\Delta Q = Q_C - Q_C' = 14$ μC.

9.9. -----



Koristeći metodu Kirhofovih pravila sledi:
$-U_{2C} + IR_2 + IR_1 = 0 \Rightarrow U_{2C} = I \cdot (R_1 + R_2);$
$U_C - IR_2 - I \cdot 2R_1 = 0 \Rightarrow U_C = I \cdot (2R_1 + R_2);$
$\underline{E - IR_1 - U_C = 0}$
$3Q/2C = IR_1 + IR_2$ ..... (1) $/ \cdot (-1)$
$2Q/C = 2IR_1 + IR_2$......... (2)
$\underline{E = IR_1 + 2Q/C}$ .... (3)
$-3Q/2C = -IR_1 - IR_2$ ...... (1)
$\underline{2Q/C = 2IR_1 + IR_2}$......... (2)
$Q/2C = IR_1$

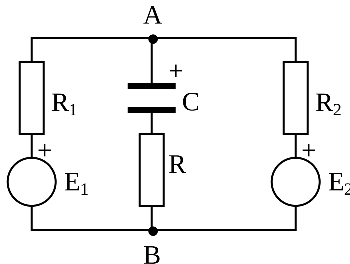
Umesto IR_1 (rešenje iz prve i druge jednačine) uvrstiti u treću jednačinu $Q/2C$ $\Rightarrow$
$E = IR_1 + 2Q/C = Q/2C + 2Q/C = 5Q/C.$

9.10. ----- Kroz kolo, nakon stacionarnog stanja, protiče struja $I = E / (18+100+2) = 5$ A.
Kako je $U_C = I \cdot 100 = 500$V $\Rightarrow$ $Q = U_C \cdot C = 5 \cdot 10^{-6}$ C = 5 μC.

9.11. ----- Kada se ploče kondenzatora kratko spoje (nema prekida te grane) sledi:
$I = E / (R + R_g)$ $\Rightarrow$ $E = I \cdot (R + R_g) = 11$ V. Ovo je ujedno i napon kondenzatora, jer je $U_C = E = 11$ V.
Količina naelektrisanja kondenzatora je
$Q = U_C \cdot C = U_C \cdot \varepsilon\ S/d = 11 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-4} / 0{,}2 \cdot 10^{-3} = 1{,}947 \cdot 10^{-10}$ C.

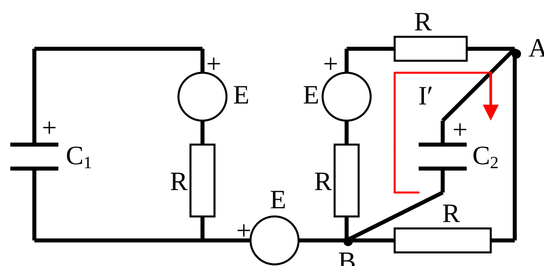
9.12. ----- Kako je napon kondenzatora jednak naponu na otporu R_2 ($U_C = U_2$), odrediti napon U_2. Prilikom ovoga računanja kondenzator možemo isključiti (prekid kola) jer on u stacionarnom stanju ne utiče na preostali deo kola. Napon U_2 se može odrediti na više načina (metoda kont. struja, metoda Tevenena, transformacija trougla otpora u zvezdu ....). Rešenje toga napona iznosi $U_2 = 63{,}54$ V.
Energija kondenzatora je $W = U_C \cdot Q / 2 = U_C^2 \cdot C / 2 = 63{,}54^2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} / 2 = 201{,}87 \cdot 10^{-3}$ J = 201,87 mJ.

9.13. -----



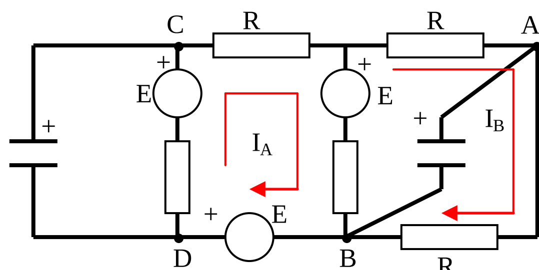
Metodom zajedničkog napona odredimo napon između tačaka A i B, a to je i napon na kondenzatoru U_C On iznosi :
$U_C = U_{AB} = (E_1/R_1 + E_2/R_2) / (1/R_1 + 1/R_2) = 7{,}5$ V.
Količina naelektrisanja je $Q = U_C \cdot C = 75 \cdot 10^{-6}$ C = 75 μC.
Kada se prekidač isključi (otvori) napon na kondenzatoru je jednak ems E_1, te je $U_C' = E_1 = 10$ V, pa je količina naelektrisanja u ovom slučaju jednaka $Q' = U_C' \cdot C = 100$ μC.
Protekla kol. naelektrisanja je $\Delta Q = Q' - Q = 25$ μC.

9.14. -----



$U_{C1}' = E = 1\,000$ V;
$Q_{C1}' = U_{C1}' \cdot C_1 = 2\,000 \cdot 10^{-6}$ C = 2 mC.
$I' = E / (R + R + R) = E / 3R$;
$U_{AB}' = U_{C2} = I' \cdot R = R \cdot E / 3R = 1\,000/3$ V.
$Q_{C2}' = U_{C2}' \cdot C_2 = 1\,000 \cdot 10^{-6}$ C = 1 mC.

Nakon zatvaranja prekidača kolo ima sledeći izgled:

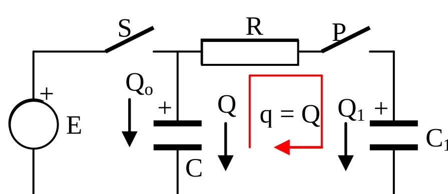


Primenom metode kont. struja sledi:
$2E - E = I_A \cdot 3R - I_B R$ ...... (1)
$E = I_B \cdot 3R - I_A R$ ...... (2)
$1\,000 = 3R \cdot I_A - RI_B$ /· 3
$1\,000 = - RI_A + 3RI_B$
$4\,000 = 8RI_A \Rightarrow I_A = 500 / R$

Uvrštavanjem vrednosti I_A u drugu jednačinu sledi rešenje za I_B i ono iznosi $I_B = 50 / R$.
Napon između tačke C i D je ujedno i napon na kondenzatoru C_1, pa sledi:
$U_{C1}'' = U_{CD}'' = E - I_A R = 1\,000 - (500/R) \cdot R = 500$V.
Kol. naelektrisanja C_1 je $Q_{C1}'' = U_{C1}'' \cdot C_1 = 1\,000 \cdot 10^{-6}$ C = 1 mC.
Napon između tačaka A i B je napon kondenzatora C_2 i iznosi $U_{C2}'' = U_{AB}'' = I_B \cdot R = (500/R) \cdot R = 500$ V.
Kol. naelektrisanja drugog kondenzatora je $Q_{C2}'' = U_{C2}'' \cdot C_2 = 1\,500 \cdot 10^{-6}$ C = 1,5 mC.
Konačno, protekla količina naelektrisanja, nakon zatvaranja prekidača iznosi:
- za prvi kondenzator $\Delta Q_1 = Q_{C1}'' - Q_{C2}' = -1$ mC (suprotnog smera);
- za drugi kondenzator $\Delta Q_2 = Q_{C2}'' - Q_{C2}' = 0{,}5$ mC.

9.15. ----- Pretvaranjem strujnog generatora u naponski dobiju se parametri naponskog generatora:
$E = I_S R_S = 1\,500$ V, odnosno $R_g = R_S = 100\ \Omega$.
Kako je napon na kondenzatoru jednak ems E ($U_C = E$), sledi:
$W_C = Q \cdot U_C/2 = E^2 \cdot C/2 = 56{,}25$ J.

9.16. ----- $Q_o = E \cdot C = 100 \cdot 10^{-6}$ C = 100 μC (S zatvoreno, a P otvoreno).

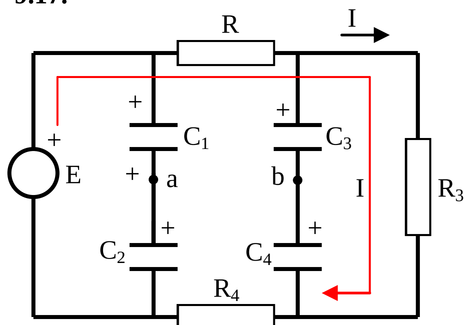


Kada je prekidač P **otvoren** (S zatvoren), energija kondenzatora C je $W = E \cdot Q/2 = 10 \cdot 10^{-3}$ J = 10 mJ. a kada je P **zatvoren a S otvoren** (ems E isključena), Prema Kirhofovim pravilima je:
$-(-Q/C) - Q_1/C_1 = 0$.. (2 K.p); $Q = Q_o - q$. (1 K.p.)
$Q_1 = q \Rightarrow -[-(Q_o - q)] / C - Q_1 / C_1 = 0 \Rightarrow$
$(Q_o - Q_1) / C - Q_1 / C_1 = 0 \Rightarrow Q_1 = 80 \cdot 10^{-6}$ C = 80 μC.
$Q = Q_o - q = 20$ μC.

Zadatak se mogao rešiti i na sledeći način:
$U = Q/C = Q_1/C_1 \Rightarrow Q/Q_1 = C/C_1 = 0{,}4 \Rightarrow Q_1 = 4Q \Rightarrow Q_o = Q_1 + Q = 5Q \Rightarrow Q = Q_o/5 = 20$ μC;
$Q_1 = 80$ μC.
Energije kondenzatora su: $W = (Q^2/C)/2 = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$ J = 0,4 mJ; $W_1 = (Q_1^2/C_1)/2 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ J = 1,6 mJ.
Ukupna (ekvivalentna) energija kola , posle zatvaranja prekidača P (S otvoren) je $W_e = W + W_1 = 2$ mJ.
Kako je energija napunjenog kondenzatora (pre uključenja P) bila jednaka $W_o = 10$ mJ, a ukupna energija kola posle zatvaranja prekidača P (kondezatora C i C_1) $W_o = 2$ mJ, sledi da je razlika između ovih energija utrošena na neku drugu energiju (energija je neuništiva). Ta druga energija može da pretstavlja određene gubitke, i to su

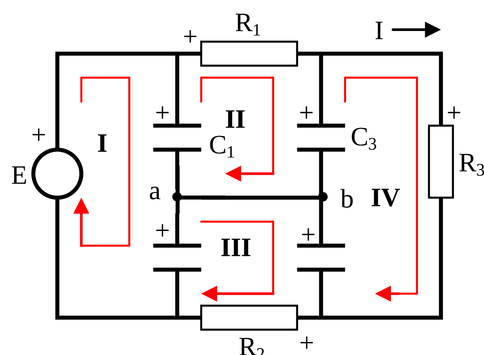
toplotni gubici koji se troše na zagrevanje otpornika R (Džulov zakon). Toplotna energija iznosi $W_J = W_R = W_o - W_e = 8$ mJ. Ova toplotna energija zavisi od vrednosti C, C_1 i E, što znači da **ona ne zavisi od vrednosti otpornika R**.

9.17. -----



$I = E / (R_1 + R_2 + R_3) = 2{,}5$ A.
$U_{C1} = Q_{C1}/C_1$, $U_{C2} = Q_{C2}/C_2 \Rightarrow U_{C1}/U_{C2} = C_2/C_1$, jer je $Q_{C1} = Q_{C2}$. $U_{C1} = U_{C2}\cdot C_2/C_1 = 1{,}5U_{C2}$.
$E - U_{C1} - U_{C2} = 0 \Rightarrow 120 = 2{,}5U_{C2} \Rightarrow U_{C2} = 48$ V, odnosno $U_{C1} = 72$ V.
$U_{C3} / U_{C4} = C_4/C_3 = 1 \Rightarrow U_{C3} = U_{C4} = U_{R3}/2 = IR_3/2 \Rightarrow U_{C3} = U_{C4} = 45$ V.
$Q_{C1} = Q_{C2} = U_{C1}\cdot C_1 = 2{,}88$ mC; $Q_{C3} = Q_{C4} = U_{C4}\cdot C_4 = 2{,}25$ mC.
$U_{ab} - U_{C2} + U_{R2} + U_{C4} = 0 \Rightarrow U_{ab} = U_{C2} - U_{C4} - IR_2 = -17$ V.

9.18. -----



Da bi odredili napone na kondenzatorima (U_{C1}; U_{C2}, U_{C3} i U_{C4}) treba primeniti metodu Kirhofovih pravila. Kondenzatori C_1 i C_3, odnosno C_2 i C_4 su u paralelnoj vezi, pa je (otpori R_1, R_2 i R_3 su praktično u kratkoj vezi), te je:

$Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4$............. (1)---- I Kir. zakon
$E - U_{C1} - U_{C2} = 0$ .... (2)---- II Kir. zakon
$- U_{R1} - U_{C3} + U_{C1} = 0$....... (3) 〃
$U_{C2} - U_{C4} - U_{R2} = 0$ .... (4) 〃
$U_{C4} + U_{C3} - U_{R1} = 0$ .... (5) 〃

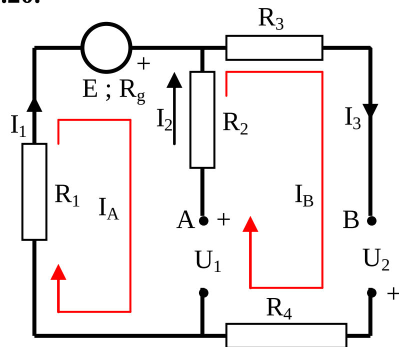
Struja u kolu (kroz otpornike R_1, R_2 i R_3) je ostala ista (predhodni zadatak). Dakle, $I = 2{,}5$ A.
Na otpornicima se stvara pad napona: $U_{R1} = IR_1 = 10$ V; $U_{R2} = IR_2 = 20$ V i $U_{R3} = IR_3 = 90$ V.
Kako je $Q_1 = U_{C1}\cdot C_1 = 40\cdot 10^{-6}U_{C1}$, $Q_2 = U_{C2}\cdot C_2 = 60\cdot 10^{-6}U_{C2}$, $Q_3 = 50\cdot 10^{-6}U_{C3}$ i $Q_4 = 50\cdot 10^{-6}U_{C4}$
Sređivanjem jednačina one dobijaju sledeći oblik::

$4U_{C1} - 6U_{C2} + 5U_{C3} - 5U_{C4} = 0$ .... (1)
$U_{C1} + U_{C2} = 120$ ....(2)
$- U_{C1} + U_{C3} = -10$ ....(3)
$- U_{C2} + U_{C4} = -20$ .... (4)
$U_{C3} + U_{C4} = 90$ ....(5)

Rešavanjem navedenog sistema jednačina dobiju se sledeća rešenja:
$U_{C1} = 63{,}5$ V; $U_{C2} = 56{,}5$ V; $U_{C3} = 53{,}5$ V i $U_{C4} = 36{,}5$ V.
Opterećenja kondenzatora su:
$Q_1 = U_{C1}\cdot C_1 = 2{,}54$ mC; $Q_2 = U_{C2}\cdot C_2 = 3{,}39$ mC; $Q_3 = U_{C3}\cdot C_3 = 2{,}675$ mC i $Q_4 = U_{C4}\cdot C_4 = 1{,}825$ mC.
(NAPOMENA! Kako su u sistemu jednačina četiri nepoznate, jednu jednačinu možemo izostaviti. To može biti jednačina jedne konture, tj 2, 3, 4 ili 5 jednačina. Jednačina po prvom Kirhofovom zakona ostati u sistemu jednačina . U protivnom rešenje bi bilo vrlo složeno.)

9.19. ----- $E = U_R + U_{2R}$. Kako je $U_{2R}/R = I\cdot 2R/I\cdot R = 2 \Rightarrow U_{2R} = 2U_R \Rightarrow U_R + 2U_R = 100 \Rightarrow U_R = 100/3$ V; $U_{2R} = 200/3$ V.
$U_C + U_{2C} = 100$; $U_C/U_{2C} = (Q/C) / (Q/2C) = 2 \Rightarrow U_C = 2U_{2C} \Rightarrow$
$2U_{2C} + U_{2C} = 100 \Rightarrow U_{2C}$ 100/3 V; $U_C = 200/3$ V.
Primenom II Kirh. zakona sledi $U_{AB} + U_C - U_R = 0 \Rightarrow U_{AB} = U_R - U_C = 100/3 - 200/3 = -100/3$ V.

9.20. -----



Ako kondenzator C izostavimo iz kola (prekid grane), tada kolo ima oblik koji je prikazan na slici. Metodom konturnih struja odrediti struje I_A i I_B.

Dakle, $E - U_1 = I_A \cdot (R_1 + R_g + R_2) - I_B R_2$ .... (1)

$\underline{U_1 + U_2 = I_B \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - I_A R_2}$........(2)

$-40 = 20 I_A - 10 I_B$

$\underline{200 = -10 I_A + 20 I_B}$

Rešenjem ovog sistema jednačina sledi:

$I_A = 4$ A a $I_B = 12$ A.

a) $I_1 = I_A = 4$ A; $I_2 = I_B - I_A = 8$ A; $I_3 = I_B = 12$ A.

Vraćanjem kondenzatora između tačaka A i B sledi (II Kirhofov zakon):

$U_{AB} - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 \Rightarrow U_{AB} = I_2 R_2 + I_3 R_3 = 176$ V. Ovo je ujedno napon kondenzatoru C, što znači da je $U_C = U_{AB} = 176$ V.

b) $Q = U_C \cdot C = 880$ μC.

c) $P_E = E \cdot I_1 = 160$ W; $P_{Rg} = I_1^2 R_g = 32$ W.

Korisna snaga koju daje generator je jednaka razlici proizvedene i snage gubitaka, dakle:

$P_K = P_E - P_{Rg} = 128$ W.

R E Š E N J A :
∗ M A G N E T I Z A M ∗

1.1------159; 79,5; 31,8 A/m.. **1.2.-----**38,8 A/m. **1.3.-----**4 A

1.4.-----188,4 A. Ovo rešenje je približno. Kod tačnijeg proračuna raditi kao i zadatak 1.33.

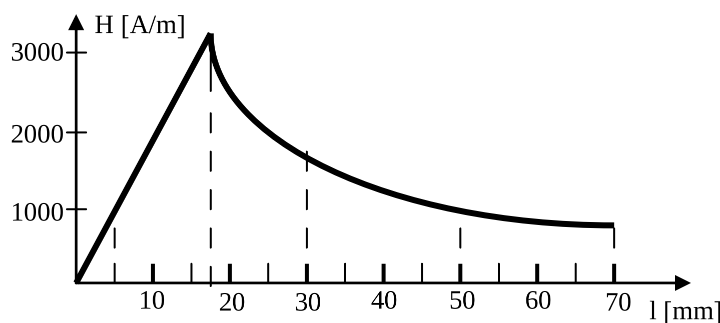
1.5.-----37,8 A/m. **1.6**-----900 nav. **1.7**.-----50 mA. **1.8.-----**2000 nav. **1.9**.-----50 000 A/m

1.10.-----300 A. **1.11**.-----32 cm. **1.12.-----**15 cm. **1.13.-----**6 A. **1.14.-----**5 000 A/m.

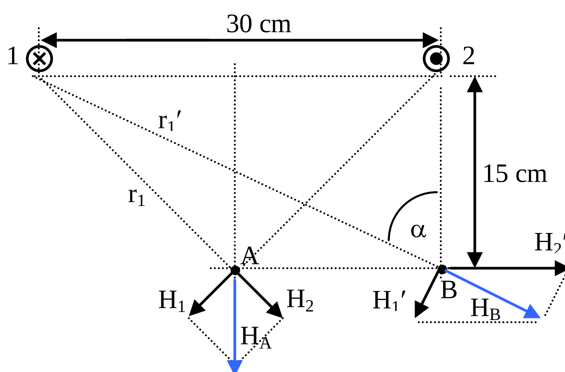
1.15.-----2 600 A/m

1.16. ---- Za: r = 0 ⇒ H = 0 A/m ; r = 5 mm ⇒ H = 910 A/m; r = 17,5 mm ⇒ 3 181 A/m; r = 30 mm ⇒ H = 1 860 A/m; r = 70 mm ⇒ H = 796 A/m.

Porastom r od 0 do R (poluprečnika provodnika) jačina magnetnog polja linearno se povećava (od 0 do 3 181 A/m). Daljim povećanjem rastojanja r od središta provodnika jačina magnetnog polj opada po hiperboli (nije linearno)



1.18. ----- a)



$H_1 = H_2 = I/2r_1\pi$

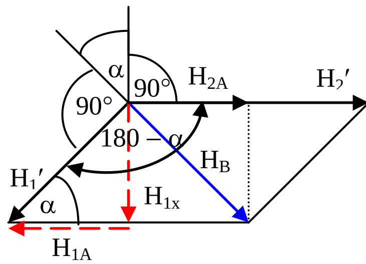
$H_1 = 15/2\ r_1\ \pi$,

$H_A = \sqrt{2}\ H_1 \Rightarrow$

$H_A = \sqrt{2} \cdot 15/2\sqrt{2} \cdot 0.15\ \pi$

$H_A = 15/0,3\pi = 15,9$ A/m.

b)



$H_B^2 = H_1'^2 + H_2'^2 - 2H_1'H_2' \cos\alpha$ (cos. teor.)

$H_1' = I/2r_1'\pi = 15/2\sqrt{0{,}15^2 + 0{,}3^2}\,\pi = 7{,}12$ A/m.

$H_2' = I/2\cdot 0.15\,\pi = 15/0{,}3\,\pi = 15{,}92$ A/m.

$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{15^2 + 30^2}} \Rightarrow \alpha = 63{,}43^o$$

$H_B = 14{,}24$ A/m. ili:

$H_B^2 = H_{1x}^2 + H_{2A}^2 = (H_1' \sin\alpha)^2 +$
$+ (H_2' - H_1' \cos\alpha)^2 = 6{,}37^2 + (15{,}92 - 3{,}18)^2 =$
$40{,}58 + 162{,}31 = 202{,}92 \Rightarrow H_B = 14{,}24$ A/m.

1.18. -----

$H_1 = I_1/2r_1\pi$;

$H_2 = I_2/2r_2\pi$

$r_1^2 = b^2 - h^2$; $r_2^2 = c^2 - h^2$

kako je površina pravouglog trougla jednaka ah/2, odnosno bc/2 (jer je c visina ža b; $b \perp c$)$\Rightarrow$

$ah = bc \Rightarrow h = bc/a = 12/5 = 2{,}4$ cm

$r_1 = 3{,}2$ cm; $r_2 = 1{,}8$ cm,

$H = H_1 + H_2 = 36{,}45$ A/m.

1.19. ---- Jačina magnetnog polja najjača je na površini provodnika (r=R), gde je $H = I/2r\pi = I/2R\pi$, a najslabija u samom centru gde je H = 0 A/m. Smer odrediti Amperovim pravilom desne ruke.

1.20. ----- $H_A = 0$ A/m, jer je unutrašnji deo isti kao i sam centar, jer u ovom prostoru nema magnetnih linija. Idući od tačke na unutrašnjoj površini r_1 ka tački na vanjskoj površini r_2 jačina magnetnog polja se linearno povećava pa je u tački na vanjskoj površini jednaka:

$H_B = I/2r_2\pi = 39.81$ A/m.

1.21. ----- H=0 A/m; **1.22.** ----- 35 A.

1.23. ----- a) $H = I/2r = 5/0.05 = 100$ A/m.

b) $H_A = I\cdot 2 \cos\alpha / 4\pi a$,

$\cos\alpha = d\pi/2/r = d\pi/2r$, $r^2 = (d\pi/2)^2 + a^2 = [(d\pi)^2 + a^2]/4 \Rightarrow$

$\cos\alpha = 0{,}9 \Rightarrow H_A = 5\cdot 2\cdot 0{,}9/4\pi\cdot 0{,}025 = 28{,}66$ A/m.

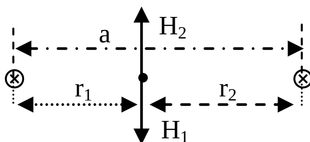
c) $H / H_A \cong 3{,}5$.

1.24. ----- $H_o = I_1/2r$, za kružno kolo; dok je jačina magnetnog polja koje stvara kvadratno kolo jednaka:

$H_{\square} = 2I/r\pi$,

Da bi ukupna jačina magnetnog polja bila jednaka 0 tada je $H_o = H_{\square} \Rightarrow I_1 / 2r = 2I / r\pi \Rightarrow I_1 = 4$ A.
Struja I_1 je suprotnog smera od struje I kako bi se polja ponoštila.

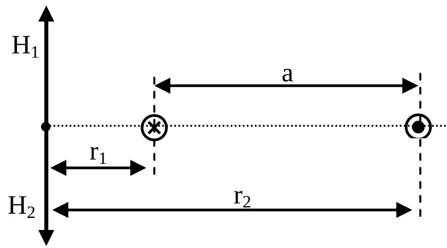
1.25. -----



$H_1 = H_2 \Rightarrow I_1/2r_1\pi = I_2/2r_2\pi \Rightarrow r_2 = 1{,}5r_1$ ($H_A = 0$ A/m)

$a = r_1 + r_2 = 25 \Rightarrow r_1 = 10$ cm; $r_2 = 15$ cm ;

1.26. -----



$H_A = 0 \Rightarrow I_1/2r_1\pi = I_2/2r_2\pi \Rightarrow r_2 = 1,5\, r_1$
$a = r_2 - r_1 = 25$ cm. $r_1 = 50$ cm; $r_2 = 75$ cm.
Tražena tačka se nalazi na istom pravcu kao i provodnici, ali sa leve strane provodnika, gde je jačina struje slabijeg inteziteta, kako bi se jačine magnetnog polja mogle izjednačiti (za $I_2 > I_1 \Rightarrow r_2 > r_1$).

1.27. -----

a) smer struja suprotan, $r_2/r_1 = I_2/I_1 = 2,5$
$r_1 = I_1/2\pi H_1 \cong 16$ cm, a $r_2 = I_2/2\pi H_2 \cong 40$ cm. $\Rightarrow a = r_1 + r_2 = 56$ cm.

b) smer struja isti : $a = r_2 - r_1 = 40 - 16 = 24$ cm. Tačka se nalazi na istom pravcu sa provodnicima, sa leve strane prvog provodnika ($I_1 < I_2$).

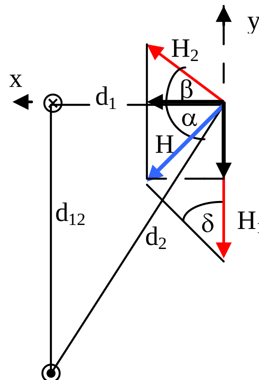
1.28. -----

a) Isto kao u predhodnom primeru, samo sa tom razlikom što se polja sada sabiraju $H_A = 2H_1 = 2H_2$.
$a = r_1 + r_2 = 56$ cm.

b) za suprotan smer struja $a = r_2 - r_1 = 24$ cm.

1.29. -----Tačka A i centar cilindričnog provodnika su iste jačine magnetnog polja, jer se tačka A može tretirati kao i sam centar provodnika. To znači da je $H_o = H_A = 0$ A/m.
$H_B = IR_{0B}/2r^2\pi \Rightarrow H_B \; I/2r\pi$ ($R_{0B} = r$), $H_B = 20/2\pi \cdot 0,1 = 31,85$ A/m.
Od tačke A do tačke B jačina magnetnog polja se linearno povećava.
$H_c = I/2r_c\pi = 15,92$ A/m.
$H_d = I/2r_d\pi = 6,08$ A/m.
Od tačke B pa do tačke D jačina mag. polja opada (po hiperboli), što je lako grafički predstaviti: H = f (r).

1.30. -----



$\text{tg}\,\alpha = d_{12}/d_1 = 80/40 = 2 \Rightarrow \alpha = 63,5°$
$d_2^2 = d_{12}^2 + \mathbf{d_1^2 = 80^2 + 40^2 \Rightarrow d_2 = 89,4}$ **cm.**
$H_1 = I/2d_1\pi = 200/2 \cdot 0.4\pi = 80$ A/m.
$H_2 = I/2d_2\pi = 200/2 \cdot 0,894\pi = 35,8$ A/m.
Projekcijom na x i y osu možemo odrediti rezultantno polje:
$H_{2x} = H_2\cos\beta = H_2\cos(90 - \alpha) = 35,8\cos 26,5° = 32,04$ A/m.
$H_{2y} = H_2\sin\beta = 35,8\sin 26,5 = 15,97$ A/m.
$H_{1y} = H_1 - H_{2y} = 80 - 15,97 = 64,03$ A/m. $\Rightarrow$
$H^2 = H_{2x}^2 + H_{1y}^2 = 64,03^2 + 32,04^2$
H = 71,6 A/m.

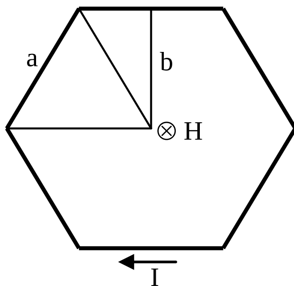
Zadatak se može rešiti i kosinusnom teoremom:

$$H^2 = H_1^2 + H_2^2 - 2H_1H_2\cos\delta \Rightarrow$$

$$H^2 = 80^2 + 35,8^2 - 2 \cdot 80 \cdot 35,8\cos[180 - (\alpha + 2\beta)] = 6400 + 1281,64 - 160 \cdot 35,8\cos 63,5° \Rightarrow$$

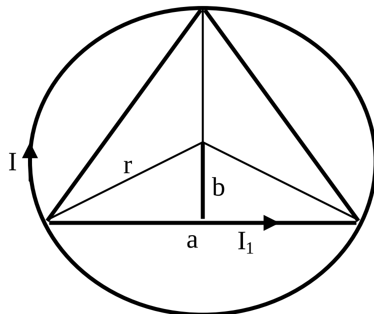
H= 71,6 A/m.

1.31. -----



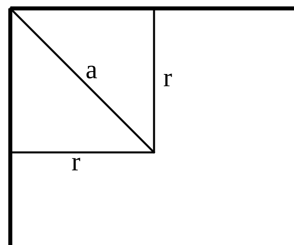
Jačina magnetnog polja H_1, kojeg stvara bilo koja od stranica šestougla iznosi:
$H_1 = (I/4b\pi) \cdot(\cos 60° + \cos 60°) = I\cos 60°/2b\pi$
$b^2 = a^2 – (a/_2)^2 = 10^2 – 5^2 = 75 \Rightarrow b = 8,65$ cm.
$H = 6 H_1 = 6\cdot50\cdot0,5/2\cdot0,0865\cdot\pi = 276,13$ A/m.
Za dati smer struje magnetne linije ulaze u ravan.

1.32. -----



$H_o = I/2r$, $a = \sqrt{3}r \Rightarrow r = a/1,73 \Rightarrow$
$H_o = 50\cdot1,73/2\cdot a = 43,3/a$ (A/m).
$H_\square = 3\cdot I_1\cdot 2 \cos 30°/4b\pi = 3\cdot I_1\cdot2\cdot1,73/2\cdot4\cdot b\cdot\pi = 0,4 I_1/b$ ˙
$b = r/2 = a/2\cdot1,73$, jer centar upisane kružnice kod jednakostraničnog trougla deli visinu u odnosu 1:2
(b: r =1:2) $b = a/3,46 . \Rightarrow b/a = 1/3,46$ Kako je $H_o = – H_\square$, odnosno
$H = 0$ A/m $\Rightarrow 43,3/a = 0,4 I_1/b \Rightarrow$
$I_1 = 43,3\cdot b/0,4\cdot a = 108,25\cdot b/a = 108,25/3,46 = 31,28$ A , smera suprotnog od smera struje I

1.33. -----



$H = 2 H_1 = 2 [I (\cos 45° + \cos 0°) / 4r\pi]$
$r = a / \sqrt{2} = 7.07$ cm
$H = 20 (0,707 + 1) / 2\cdot0,0707\pi = 76,89$ [A/m]

2.1.……$2{,}2\cdot10^{-5}$ T. **2.2.**……a) 2 T; b) $2\cdot10^{-2}$ T. **2.3.**……0,54 T. **2.4.**……$6{,}28\cdot10^{-4}$ T; 1,5 T.

2.5.……H=300 A/m (iz kar. magnetiziranja); $\mu_r = B/\mu_o H = 2654$.

2.6.……H= 20 000 A/m (kar. magn.), $I = Hl/N = 20\,000\cdot0{,}25/500 = 10$ A.

2.7.……a) 13,94 μT; b) 6,97 μT; c) 3,89 μT.

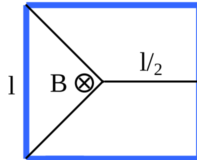
2.8.……a) 2 250 A/m b) 450 A/m c) 150 A/m d) 80 A/m e) 200 A/m f) 500 A/m.

2.9.……a) 1,1 T b) 1,18 T c) 0,25 T.

2.10.… a) 120 A/m, 2654; b)180 A/m,3539; c)3000 A/m,411,4; d)13 000 A/m, 110,2; e) ≅120 000, ≅15,3.

2.11. ……a) 0,14 T, 185,77; b) 0,35 T, 232,2; c) 0,41 T, 197,8; d) 1,15 T, 50,87.

2.12. -----



Magnetna indukcija koju stvara jedna stranica kvadrata iznosi:
$B_1 = \mu_o I(\cos 45° + \cos 45°) / 4a\pi$; $a = l/2 = 15$ cm.
Ukupna magnetna indukcija iznosi:
$B = 4\cdot4\pi\cdot10^{-7}\, 250\cdot2\cdot0{,}707 / 4\cdot0{,}15\pi = 0{,}95$ [mT].

2.13. ----- a) $I = I_1 + I_2$

$E_1 - I_1R_1 - IR_3 = 0$

$E_2 - I_2R_M - IR_3 - I_2R_2 = 0$

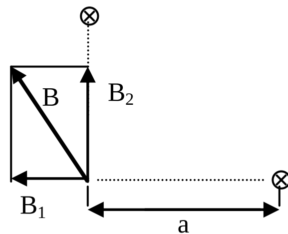
$E_1 = (R_1 + R_3)\, I_1 + R_3I_2$ $\Rightarrow$ $140 = 30I_1 + 10I_2$

$E_2 = R_3I_1 + (R_2 + R_3 + R_M)\, I_2$ $\quad 100 = 10I_1 + 30I_2$

$I_2 = 2$ A, $M = NI_2 = 100$ navojaka.

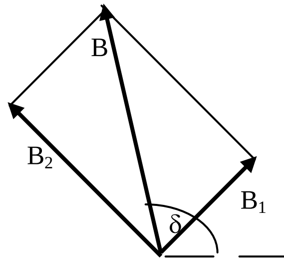
b) $H = IN/l = IN/2r\pi = 318$ A/m. c) $B= \mu_o\mu_r H = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot2\,000\cdot318 \cong 0{,}8$ [T]

2.14. -----



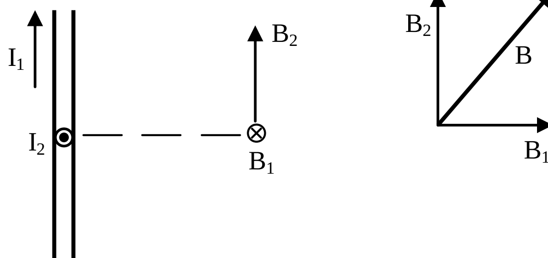
$a = 14{,}1/ 1{,}41 = 10$ cm.
$B_1 = 2\cdot10^{-7}\cdot I_1/a = 2\cdot10^{-5}$ [T],
$B_2 = 2\cdot10^{-7} I_2/a = 3\cdot10^{-5}$ [T],
$B^2 = B_1^2 + B_2^2 \Rightarrow B = 3{,}6\cdot10^{-5}$ [T].

2.15. -----



B = 0,22 T; δ = 93° 25′; Pravac i smer su dati na slici.

2.16. -----



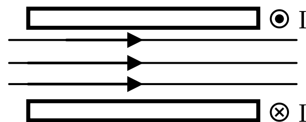
B = 0,11 mT.
Pravac i smer su prikazani na slici.

2.17. ----- B = 0,6 mT, pravac je normalan na ravan a smer ka posmatraču. [⊙]

2.18. ----- B = 2 T, pravac i smer se poklapa sa smerom kazaljke na satu.

2.19. ----- Koristeći izraz $B = \mu_o IN/2a\pi \Rightarrow B_A = 5$ mT; $B_B = 3{,}33$ mT; B_C 2,5 mT.

2.20. -----



Trake voda se mogu posmatrati kao strujne trake (listovi), čija je površinska gustina struje jednaka: $J_S = I/b$. Intezitet vektora magnetne indukcije dva strujna lista sa površinskim strujama iste gustine i pravca, ali suprotnog smera, izmedju listova, iznosi:

$$B= \mu_o J_S = \mu_o I/b.$$

Pravac i smer linija skiciran je na slici. Kako su magnetne linije izmedju listova najgušće i medjusobno paralelne, polje se može smatrati homogenim (konstantnim), zanemarujuci magnetne linije na samim ivicama listova (traka). Iznad listova polja se poništavaju, zbog suprotnih smerova struja. Slično se dogadja i kod jačine električnog polja kod kondezatora (E = U/d). Navedeni obrazac se može potvrditi na osnovu sledeće relacije : H = M/l = I/b; dakle; listove tretiramo kao jedan navojak, a za dužinu magnetnih linija uzima se poprečna širina trake b. Iz navedenog sledi da je jačina magnetnog polja izmedju traka (listova) jednaka površinskoj gustini struje J_S. Samim tim magnetna indukcija B iznosi: $B = \mu_o H = \mu_o I / b$.

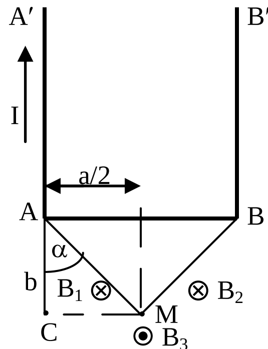
2.21. ----- Na osnovu uopštenog Amperovog zakona dobije se intezitet jačine magnetnog polja u jezgru od H = 477,5 A/m. Sa karakteristike magnetiziranja očita se magnetna indukcija od B = 1,08 T, pa je intezitet vektora magnetne polarizacije $J = B - \mu_o H = 1{,}08$ T, a intezitet vektora magnetizacije $M = J/\mu_o = 859$ kA/m. Na površini jezgra gustina ekvivalentnih struja je $J_{SA} = M$, što odgovara jačini struje u namotaju : $I = 2\pi R J_{SA}/N =$ 540 A. Prema tome, od struje u namotaju potiče 0,3/540 = 0,00056 jačine ukupne magnetne indukcije u jezgru, dok ostatak potiče od Amperovih struja. Jačina magnetnog polja u celini potiče od struje u namotaju.

2.22. ----- Uz date pretpostavke (b >> a), magnetno polje izmedju traka se može izračunati kao da potiče od dva strujna lista (zad. 2.20.) sa suprotnim smerovima struja. Dakle $H = J_S = I/b = 50/0{,}5 = 100$ A/m. Intezitet vektora magnetne indukcije iznosi: $B = \mu_o \mu_r H = 4\,\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 100 = 12{,}56$ [mT].

2.23. ----- $B_1 = 2\cdot10^{-7}\,\mu_r\,I/a_1 \Rightarrow I = B_1a_1/2\cdot10^{-7}\mu_r$
$B_2 = 2\cdot10^{-7}\mu_rI/a_2 = 2\cdot10^{-7}\mu_rB_1a_1/2\cdot10^{-7}\mu_ra_2 = B_1a_1/a_2 = 10^{-3}\cdot1/10^3 = 10^{-6}$ [T].

2.24. ----- $H = I/4a + 3I\cdot2\cos\alpha / 4h\pi$; $h^2 = a^2 - (a/2)^2 \Rightarrow h = a\sqrt{3}/2$
$B = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot50/4\cdot0{,}1 + 6\cdot50\cos60°/12{,}56\cdot1.73\cdot0.05 = 0{,}33$ [mT].
Smer magnetnih linija ulazi u ravan (Amperovo pravilo desne ruke).

2.25*. -----

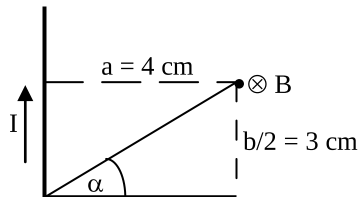


Dato kolo se može razdeliti u tri pravolinijska provodnika: A′A, B′B i AB koji će stvarati svoje magnetne indukcije B_1, B_2 i B_3. Ako provodnik A′A produžimo do tačke C, tada bi novi provodnik A′C stvarao magnetnu indukciju B_1' koja bi iznosila:
$B_1' = 4\pi\cdot10^{-7}I(\cos90°+\cos0°)/4a\pi/2 = 2\cdot10^{-4}$ [T].
Produženi deo provodnika AC stvarao bi magnetnu indukciju jačine B_1'', koja iznosi:
$B_1'' = 4\pi\cdot10^{-7}I(\cos90°+\cos\alpha)/4a\pi/2 = 1{,}732\cdot10^{-4}$ [T];
$\mathrm{tg}\,\alpha = 5/5\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 30°$.

Konačno $B_1 = B_1' - B_2'' = 0{,}268\cdot10^{-4}$ [T]. Kako je $B_1 = B_2 = 0{,}268\cdot10^{-4}$ T, jer je tačka podjednako udaljena od oba provodnika, kroz koje teče ista struja I, ali suprotnog smera. Zbog toga B_1 i B_2 imaju isti smer (ulaze u ravan), pa se sabiraju.

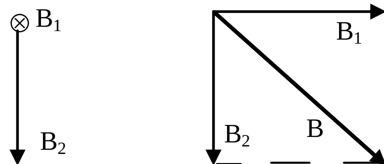
Magnetna indukcija trećeg provodnika AB iznosi: $B_3 = 4\pi\cdot10^{-7}I(\cos60° + \cos60°)/4b\pi = 0{,}5767\cdot10^{-4}$ [T]. Rezultantna magnetna indukcija iznosi $B = B_3 - (B_1 + B_2) = 0{,}0407\cdot10^{-4}$ [T] = 4,07 [μT], čiji smer je u pravcu magnetne indukcije B_3, tj. od ravne ka posmatraču.

2.26 *. --- .



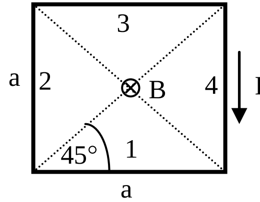
$\mathrm{tg}\,\alpha = 3/4 = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 36{,}87°$;
$B_1 = 4\pi\cdot10^{-7}I(\cos53{,}13° + \cos53{,}13°)/4\cdot0{,}04\cdot\pi = 0{,}75\ \mu T$
$B_2 = 4\pi\cdot10^{-7}I(\cos90° + \cos36{,}87°)/4\cdot0{,}03\cdot\pi = 0{,}6667\ \mu T$
$B = B_1 + B_2 = 1{,}42$ [μT], smera prema slici (ulazi u ravan)

2.27. ----



$H_1 = I_1/2R = 125$ A/m,
$H_2 = H_1 = 125$ A/m,
$H = \sqrt{2}\ H_1 = 176{,}25$ A/m.
$B = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}H = 0{,}22137$ [mT].

2.28 *. -----



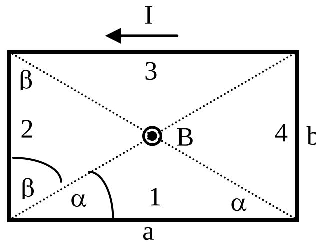
Kvadratnu konturu možemo posmatrati kao četiri pravolinijska provodnika, ograničenih dužina. Svaki od tih provodnika stvara u centru kvadrata magnetsku indukciju, koja iznosi: $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 \Rightarrow$

$$B_1 = \mu_o H_1 = \mu_o \frac{I}{a\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\cos 45^\circ + \cos 45^\circ\right) = \mu_o \frac{I}{a\pi} \cdot \cos 45^\circ = \frac{\mu_o \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot I}{a\pi}$$

Ukupna magnetska indukcija iznosi : $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 4B_1 \Rightarrow$

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_o I}{a\pi} [T]$$

2.29 *. -----



Razlaganjem konture na četiri pravolinijska provodnika, svaki od njih stvara svoju magnetsku indukciju, koja iznosi (vidi sliku)

$$B_1 = B_3 = \mu_0 \frac{I}{b\pi} \cdot \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\alpha) = \mu_o \frac{I}{b\pi} \cdot \cos\alpha = \mu_o \frac{I}{b\pi} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

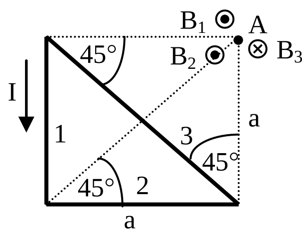
$$B_2 = B_4 = \mu_o \frac{I}{a\pi} \cdot \frac{1}{2}(\cos\beta + \cos\beta) = \mu_o \frac{I}{a\pi} \cdot \cos\beta = \mu_o \frac{I}{a\pi} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ukupna magnetna indukcija u centru pravougaone konture jednaka je: $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 2B_1 + 2B_2 \Rightarrow$

$$B = 2\mu_o \frac{I}{b\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\mu_o \frac{I}{a\pi} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\mu_o I}{\pi\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \frac{2\mu_o I}{ab\pi\sqrt{a^2 + b^2}} \left(a^2 + b^2\right) \Rightarrow$$

$$B = \frac{2\mu_o I\sqrt{a^2 + b^2}}{ab\pi} \ [T].$$

2.30*. -----



Struja u katetama trougla čini magnetsku indukciju u tački A čiji je intezitet jednak:

$$B_1 = \mu_o \frac{I}{2a\pi} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 45^\circ + \cos 90^\circ\right) = \mu_o \frac{I}{4a\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{8a\pi} = B_2$$

dok struja hipotenuze u tački A stvara indukciju B_3 inteziteta:

$$B_3 = \mu_o \frac{I}{d\pi} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 45^\circ + \cos 45^\circ\right) = \mu_o \frac{I}{\sqrt{2}a\pi} \cos 45^\circ = \frac{\mu_o I}{2a\pi}$$

Smer magnetske indukcije B_1 i B_2 je ka posmatraču, dok je B_3 od posmatrača.

Ukupna magnetska indukcija u tački A je: $B_A = B_3 - B_1 - B_2$ ($\overline{B}_A = \overline{B}_1 + \overline{B}_2 + \overline{B}_3$) $\Rightarrow$

$$B_A = B_3 - 2B_1 = \frac{\mu_o I}{2a\pi} - \frac{2\sqrt{2}\mu_o I}{8a\pi} = \frac{2\mu_o I}{4a\pi} - \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{4a\pi} = \frac{\mu_o I}{4a\pi}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Dakle, $B_A = \frac{\mu_o I}{4a\pi}\left(2 - \sqrt{2}\right)$, sa smerom u pravcu indukcije B_3, tj od posmatrača (u pravcu pogleda).

2.31*. -----

$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$, gde je: B_1 …. indukcija najdužeg pravolinijskog provodnika, $B_2 = B_3$ .. indukcija kraćih pravolinijskih provodnika i B_4…. indukcija savijenog provodnika. Pojedinačne indukcije, čiji je smer isti (ka posmatraču), iznose:

$$B_1 = \mu_o \frac{I}{2a\pi} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 45^\circ + \cos 45^\circ\right) = \frac{\mu_o I}{2a\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{4a\pi},$$

$$B_2 = B_3 = \mu_o \frac{I}{2a\pi} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos 45^\circ + \cos 90^\circ\right) = \frac{\mu_o I}{4a\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{8a\pi} \quad \text{i}$$

$$B_4 = \frac{1}{2} \cdot \mu_o \frac{I}{2a} = \frac{\mu_o I}{4a}.$$

Ukupna indukcija za tačku O je:

$$B = \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{4a\pi} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{8a\pi} + \frac{\mu_o I}{4a} = \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{4a\pi} + \frac{\sqrt{2}\mu_o I}{4a\pi} + \frac{\mu_o I}{4a} = \frac{\mu_o I}{4a\pi}\left(2\sqrt{2} + \pi\right).$$

Smer rezultantne magnetske indukcije je ka posmatraču, kao i svih pojedinačnih.

3.1. ----- a) 0,02 T; b) 40 A/m; c) $5\cdot10^{-4}$ H/m; d) 400.

3.2. ----- a) 0,8 T; b) H = 5 000 A/m (iz kar. magnetiziranja) I = Hl/N = 3 A; c) $\mu_r = B/H\mu_o = 127{,}4$.

3.3. ----- a) 1 T; b) 156 A; c) 312. **3.4**….. 4 mWb. **3.5**…. 4 μWb. **3.6**……1 000 A.

3.7. …. 1,42 A. **3.8.** ….. 26,6. **3.9.** …. 1 500 A/m; $92\cdot10^{-8}$ Wb. **3.10.** ……1 115 A/m; $4\cdot10^{-7}$ Wb.

3.11. ..... 0,8 T; 625.

3.12. ---- $H = IN/D'\pi = 3\,474$ A/m; B = 1,45 (iz k. mag.); $\Phi = B\,S = B\,(d/2)^2\pi = 1{,}45\cdot10^{-4}\pi = 4{,}55\cdot10^{-4}$ Wb.

3.13. ….$S=(d/2)^2\pi = 3{,}14\cdot10^{-4}\ m^2$, $B = \Phi/S = 1{,}4$ T; H = 2350 A/m (iz kar. magn.)$\Rightarrow$ I = Hl/N = 3,86 [A].

314. …. suprotno od smera kazaljke na satu, jer je $N_1I_1 > N_2I_2$. **3.15.** …. 1 A.. **3.16.** ….. $2{,}28\cdot10^{-4}$ Wb.

3.17. …$l = (6+5)\pi/2 = 17{,}3$ cm. H = 2 600 A/m; $B = \mu_oH = 0{,}327\ \mu T$; $S = 0{,}58^2\pi/4$; Φ B S =0,086 μWb.

3.18. … $B_1S_1=B_2S_2 \Rightarrow \mu_oH_1d_1^2\pi/4 = \mu_oH_2d_2^2\pi/4 \Rightarrow d_1^2/d_2^2 = H_2/H_1 = IN_2l/IN_1l = N_2/ N_1 \Rightarrow d_2 = 2.2$ cm..

3.19. … $\Phi_2 = 1{,}2\ \Phi_1 \Rightarrow \mu_o\cdot0.5I\cdot N_1d_2^2\pi/4l_1 = \mu_o\ I\cdot N_1d_1^2\pi/4l_1 \Rightarrow d_2^2/d_1^2 = 2{,}4 \Rightarrow d_2 = 3{,}87$ cm.

3.20. … Dužina jednog navojka iznosi: $l_1 = d\pi = 3.14\cdot20 = 62{,}8$ mm = 0,0628 m.
Broj navojaka prigušnice iznosi: $N = l/l_1 = 15{,}7/0{,}0628 = 250$ navojaka.
Otpor prigušnice iznosi: $R = \rho l/S = 0{,}0175\cdot15{,}7/1 = 0{,}275\ \Omega$.
Struja u namotu prigušnice je jednaka: $I = E/(R+r) = 12/(0{,}525+0{,}275) = 15$ A.
Poprečni presek prigušnice je: $S_p = (d/2)^2\pi = 0{,}02^2\cdot3{,}14/4 = 3{,}14\cdot10^{-4}\ m^2$.
Na kraju magnetni fluks iznosi: $\Phi = BS_p = \mu_oINS_p/l_p = 250\cdot4\cdot3{,}14\cdot10^{-7}\cdot15\cdot3{,}14\cdot10^{-4}/0.5 = 3\cdot10^{-6}$ [Wb].

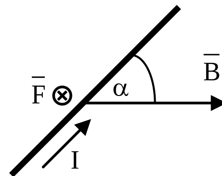
3.21. … a) $H = IN/l = 1\,500\cdot0{,}6/0{,}5 = 1\,800$ A/m.
B = 1,45 T, očitano iz karakteristike magnećenja.
$\Phi = BS = 1{,}45\cdot3\cdot10^{-4} = 4{,}35\cdot10^{-4}$ Wb.
b) $\Phi' = B_oS = \mu_oHS = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot1\,800\cdot3\cdot10^{-4} = 6{,}8\cdot10^{-7}$ [Wb].

4.1…..8 N; **4.2.** ...….0,8 T; **4.3.** ……2,3 m; **4.4.** ….1,2 A; **4.5.**….4,4 m; **4.6.** …..30°;

4.7…. $F = F_A = 12$ N, smer prema dole.

4.8. …..1,275; 0,9 mNm; **4.9.** …. 0,24 mNm; **4.10.** …. 160 Nm;

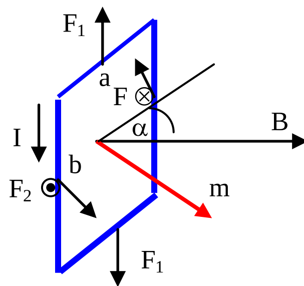
4..11.--. a) 2,5 N;
b) 5 N; Smer pomeranja ptrovodnika se poklapa sa smerom pogleda (ulazi u ravan). Kod promene smera struje menja se i smer elektromagnetne sile. Smer elektromagnetne sile se odredi odgovarajućim pravilom (pravilo leve ruke ili tri prsta desne ruke)



4.12.-- $F_1 = F_2 = BI_1l_1\sin\alpha = 1\cdot20\cdot0{,}5 = 10$ N$\Rightarrow I_2 = F_2/Bl_2 = 10/1\cdot1 = 10$ A. Kako se provodnici privlače, tj. smer sile F_2 je suprotan sili F_1, sledi da će struja I_2 imati suprotan smer u odnosu na struju I_1.

4.13.-- $F= q\cdot v \times B = q\ v\ B \sin\alpha = 3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot2\cdot10^{7}\cdot0{,}2\cdot\sin 30°\ 0{,}64\cdot10^{-12}$ [N].,

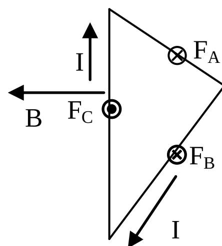
4.14. ----- a)



$F_1 = BIa\sin\alpha = 1\cdot10\cdot0{,}05\cdot\sin 30° = 0{,}25$ [N].
$F_2 = Bib\sin 90° = 1\cdot10\cdot0{,}03 = 0{,}3$ [N].

b) $m= IS = Iab = 10\cdot0{,}05\cdot0{,}03 = 150\cdot10^{-4}$ [Am^2].
c) $M = mB\sin\alpha = 150\cdot10^{-4}\cdot1\cdot0{,}5 = 7{,}5$ [mNm],
Spreg sila F_2 deluje na konturu tako da njena ravan dođe pod normalan ugao u odnosu na vektor magnetne indukcije B, što se vidi na slici. Sile F_1 se međusobno poništavaju.

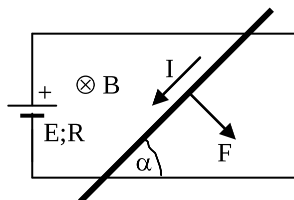
4.15. …



a) 15/4 N; 5/4 N; 5 N; a pravci i smerovi sila su dati na slici;

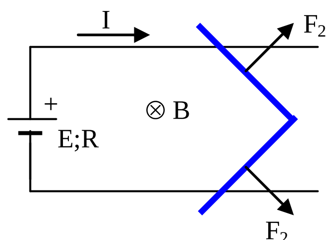
b) Kako je $F_C = F_A + F_B$ (vektorski), ove sile čine spreg sila koje teže da okrenu konturu tako da njegova ravan bude normalna na vektor B.

4.16. ….



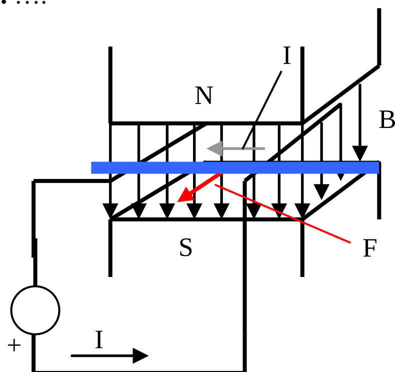
F = 0,6 N, a pravac i smer su prikazani na slici.

4.17. ….



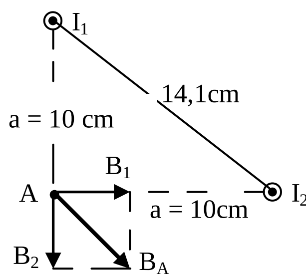
$F_1 = F_2 = 0{,}338$ N, a pravac i smer su prikazani na slici.

4.18. ….



$B = \Phi/S = \Phi/ab = 480\cdot10^{-6}/0{,}06\cdot0{,}08 = 0{,}1$ [T].
$F = BIl = BIa \Rightarrow I = F/Ba = 24\cdot10^{-3}/0{,}1\cdot0{,}06 = 4$ [A].
Smer struje I je obeležen na slici (pravilo leve ruke).

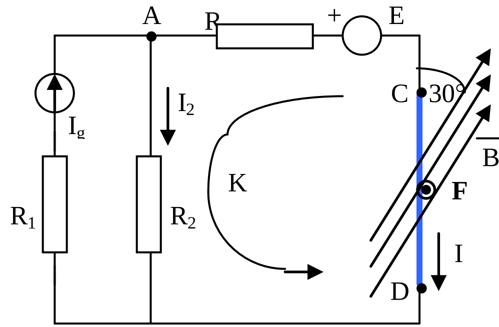
4.19. ….



a) $a^2 + a^2 = 14{,}1^2 = 200 \Rightarrow a = 10$ cm.;
$B_1 = 2\cdot10^{-7}I_1/a = 2\cdot10^{-7}\cdot10/0{,}1 = 2\cdot10^{-5}$ [T],
$B_2 = 2\cdot10^{-7}I_2/a = 2\cdot10^{-7}\cdot15/0{,}1 = 3\cdot10^{-7}$ [T],
$B_A^2 = B_1^2 + B_2^2 = 4\cdot10^{-10} + 9\cdot10^{-10} = 13\cdot10^{-10} \Rightarrow$
$B_A = 3{,}6\cdot10^{5}$[T].

b) $F_1 = B_1I_3l_3 = 2\cdot10^{-5}\cdot10\cdot1 = 20\cdot10^{-5}$ [N],
$F_2 = B_2I_3l_3 = 3\cdot10^{-5}\cdot10\cdot1 = 30\cdot10^{-5}$ [N]
$F_3^2 = F_1^2 + F_2^2 = 400\cdot10^{-10} + 900\cdot10^{-10} = 1\ 300\cdot10^{-10}$
$\Rightarrow \quad F_3 = 36{,}056\cdot10^{-5}$ [N].

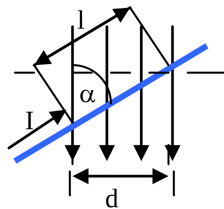
4.20. ….



a) $F = Bil \sin(\angle Bl)$; $\sin 150° = \sin 30° = 0{,}5$.
$I = 10 \cdot 10^{-6}/1 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ [mA], i ima smer prema dole (od tačke C ka D).

b) Za pretpostavljeni smer struje I_2 za čvor A$\Rightarrow$
$I_g = I_2 + I \Rightarrow I_2 = I_g - I$
za konturu K : $E + IR - I_2R_2 = 0 \Rightarrow$
$E = I_gR_2 - IR_2 - IR = I_gR_2 - I (R_2 + R)$
$I_g = [E + I (R_2 + R)]/R_2 = 2$ [mA].

4.21. -----



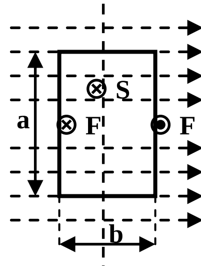
$F = BIl \sin \alpha$; $\cos(90 - \alpha) = d/l = \sin \alpha \Rightarrow l = d/\sin \alpha$
$F = BI\sin \alpha \cdot d/\sin \alpha = BId = 0{,}54 \cdot 6 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2}$
$F = 0{,}1137$ [N].

4.22. ----- $F = M/r = 147{,}15/ 44 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2} = 668$ N $\Rightarrow I = F/Bl = 668/0{,}72 \cdot 200 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 23{,}2$ [A]

4.23. ----- a) $F = BIl = BIl \cdot n \cdot N/2 = 0{,}7 \cdot 51 \cdot 20 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 10^{-2} = 1\,700$ [N],
b) $M = F \cdot r = 1\,700 \cdot 14 \cdot 10^{-2} = 238$ [Nm].

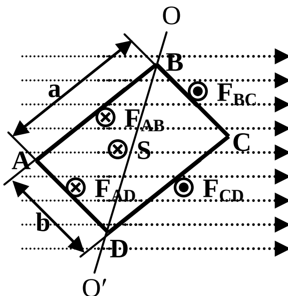
4.24. -----

a)



Sila na provodnik u magnetnom polju iznosi: $\mathbf{\overline{F} = I \cdot \overline{B} \times \overline{l}}$ $\Rightarrow$
Sila na provodnik b jednaka je 0, jer su B i l kolinearni ($F = BIb\sin\alpha$),
Sila na provodnike a iznosi: $F_a = BIa \sin 90° = 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$ N. Smer ovih sila dat je na slici. Spreg sila F_a zakreće konturu u istom pravcu sve dok ravan konture ne dodje pod 90° u odnosu na vektor indukcije B.
Moment je jednak: $\mathbf{\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F}}$ $= F_ab = BIab = BIS = Bm \Rightarrow$
$M = 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 5$ [Nm]

b)



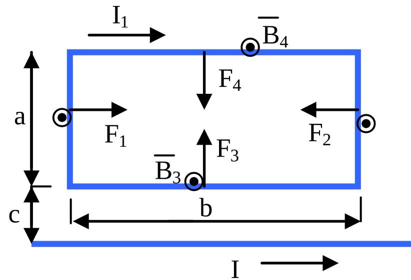
Sila na provodnik AB iznosi: $F_{AB} = BIa\sin45° = 5\sqrt{2}$ N, a na provodnik AD: $F_{AD} = BIb\sin45° = 2{,}5\sqrt{2}$ N $F_{CD} = F_{AB}$; $F_{OC} = F_{AD}$
Provodnik AB stvara momenat koji iznosi $M_{AB} = F_{AB} \cdot d/2$,
Provodnik AD stvara momenat: $M_{AD} = F_{AD} \cdot d/2$.
Leva polovina konture stvara momenat: M_{DAB}
Ukupni momenat jednak je ; $M = 2\, M_{DAB}$.
Matematički se može dokazati da je ukupni momenat jednak:
$\mathbf{M = I \cdot \overline{S} \times \overline{B}}$ $= ISB \sin \alpha \Rightarrow M = BIS$
Kontura će se okrenuti oko centralne osi OO′ (dijagonale BD) , samim tim momenat je ostao isti kao i pod a, uz uslov da je ravan konture pod istim uglom u odnosu na vektor indukcije B (u ovom primeru 0° $\Rightarrow \alpha = 90°$).

4.25.-----400 N; **4.26**.-----10 N; **4.27**.-----sila se menja u granicama od 0 do 9 N.

4.28.----- a) B = 0,5 T; b) l_1 = 40 cm; c) $0{,}75F = BIl_1 \Rightarrow 0{,}75F/F = I_1Bl/Ibl \Rightarrow I_1 = 0{,}75\ I = 7{,}5$ [A].

4.29.----- $F = NBIl = 30\cdot0{,}3\cdot0{,}04\cdot0{,}001 = 3{,}6\cdot10^{-4}$ [N] $\Rightarrow M = Fb = 3{,}6\cdot10^{-4}\cdot2\cdot10^{-2} = 7{,}2\cdot10^{-6}$ [Nm],
$M_k = 7{,}2\cdot10^{-6}/90 = 0{,}08\cdot10^{-6}$ [Nm/°].

4.30. -----



Sile F_1 i F_2 se međusobno poništavaju. Da bi kolo slobodno lebdilo mora biti ispunjen sledeći uslov:
$F_r = G \Rightarrow F_3 - F_4 = F_r = G$,jer je $B_3 > B_4 \Rightarrow$
$F_3 = B_3I_1b = \mu_oII_1b/2\pi c$;
$F_4 = B_4I_1b = \mu_oII_1b/2\pi(c+a)$, jer je indukcija koju stvara provodnik na rastojanju c: $B_3 = \mu_oI/2\pi c$
a indukcija koju stvara provodnik na rastojanju c + a iznosi: $B_4 = \mu_oI / 2\pi\cdot(c + a)$.
$F_r = \mu_oII_1ab/2\pi c(c+a) \Rightarrow I_1 = F_r2\pi c(c+a)/\mu_oIab \Rightarrow$
F_r = 417 [A], smer struje I_1 je naznačen na slici.

4.31----- 0 N; **4.32.**----- 0 N; **4.33.**----- gore; **4.34.**----- gore; **4.35**.----- miruje;

4.36.----- ne može se ostvariti stabilan položaj; **4.37**.----- 1,2 N; **4.38**.----- M = 0 Nm.

4.39.----- $M = BIab = 1\cdot25\cdot0{,}2\cdot0{,}1 = 0{,}5$ Nm.

4.40. ----- Primenom jednačine: $F = Q\ v \times B \Rightarrow F = Q\ B\ v \sin\alpha$; (α je ugao izmedju $\overline{\mathbf{B}}$ i $\overline{\mathbf{v}}$), sledi redom od 1 do 8:
$F_1 = Q\ v\ B \sin 90° = Q\ v\ B$ (ka 2); $F_2 = Q\ v\ B$ (ka 6); $F_3 = Q\ v\ B$ (ka 3); $F_4 = Q\ v\ B\ \sqrt{2}/2$ (ka 8);
$F_5 = Q\ v\ B$ (ka 1); $F_6 = F_7 = 0$; $F_8 = Q\ v\ B\ \sqrt{2}/2$ (ka 4).
Navedene sile (samim tim i formule), predstavljaju tzv. Lorencovu silu, koja se primenjuje kod količine naelektrisanja (elementarnog), koje se kreće u magnetnom polju.

5.1.----- a) $2\cdot10^{-7}$ [N], prtovodnici se privlače; b)----- $2\cdot10^{-7}$ [N], provodnici se odbijaju.

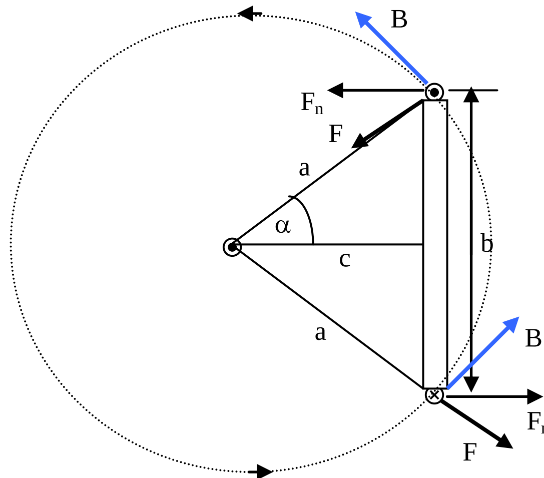
5.2.-----58,8 cm. **5.3.**----- 0,4 [N]. **5.4.**----- 0,5 m. **5.5.**----- 8 333 [N]. **5.6.**----- 2 [N/m].

5.7.-----380 [A]. **5.8.**----- 0,036 [Nm].

5.9. ----- $F_1 = F_3 = F_{21} + F_{31} = 2\cdot10^{-7}\cdot1\cdot100\cdot100\cdot1/0{,}1 + 2\cdot10^{-7}\cdot1\cdot100\cdot100\cdot1/0{,}2 = 20\cdot10^{-3} + 10\cdot10^{-3} = 30$ [mN], $F_2 = F_{12} - F_{32} = 0$ [N], Zbog istih smerova struja svi se provodnici međusobno privlače, tj. prvi provodnik nastoji da se pomeri u levo, treći u desno, dok drugi provodnik ostaje na istom mestu, jer se sile F_{12} i F_{32} zbog istog inteziteta a suprotnih smerova međusobno poništavaju.

5.10. ----- $F_1 = F_{21} + F_{31} = 2\cdot10^{-7}\cdot1\cdot10\,000\cdot5\,000\cdot1/0{,}125 + 2\cdot10^{-7}\cdot1\cdot10\,000\cdot5\,000\cdot1/0{,}25 \Rightarrow$
$F_1 = 10/0{,}125 + 10/0{,}25 = 120$ [N], provodnik se odbija, dakle pomera u levu stranu.
$F_2 = F_{12} + F_{32} = 80 + 2\cdot10^{-7}\cdot1\cdot5\,000\cdot5\,000\cdot1/0{,}125 = 80 + 5/0{,}125 = 80 + 40 = 120$ [N], drugi provodnik se pomera u desnu stranu (prvi ga odbija a drugi privlači).
$F_3 = F_{13} - F_{23} = 40 - 40 = 0$ [N], treći provodnik ostaje na istom mestu, jer ga prvi zbog suprotnih smerova struja nastoji pomeriti u desno (odbija), dok ga drugi zbog istih smerova struja privlači, odnosno nastoji pomeriti u levu stranu. Kako je rezultantna sila jednaka nuli trecći provodnik će ostati u stanju mirovanja. Sva navedena objašnjenja odgovaraju samo u početku, jer nakon bilo kojeg pomeranja inteziteti sila se menjaju, što dovodi do novog odnosa sila.

5.11. -----



$F = BI_2a$; $B = \mu_oI_1/2a\pi \Rightarrow F = \mu_oI_1I_2a/2a\pi = \mu_oI_1I_2/2\pi = 4\pi\cdot10^{-7}\cdot100\cdot10/2\pi = 2\cdot10^{-4}$ [N];
$c^2 = a^2 - (b/2)^2 \Rightarrow c = 9{,}2$ [cm],
$\cos\alpha = F_n/F \Rightarrow F_n = F\cos\alpha = F\cdot c/a = 1{,}84\cdot10^{-4}$ [N].
$M = F_nb = 1{,}84\cdot10^{-4}\cdot8\cdot10^{-2}$
$M = 1{,}47\cdot10^{-5}$ [Nm], smer zakretanja je suprotan smeru kazaljke na satu.

6.1.-------1 000; **6.2**.-------0,66 $\cdot 10^{-6}$ Wb/A; **6.3**.-------7,96 A; **6.4**.-------a) 0,24 A; b) 2,7 A;

6.5.-------a) 875 mA; 1 A;

6.6. …..

$l = 2(0{,}6+1) + 4(2r\pi/4) = 3{,}2 + 2\cdot 0.2\cdot\pi = 4{,}456$ [m],

$B = \Phi/S = 1{,}6\cdot 10^{-3}/0{,}4\cdot 0{,}4 = 10^{-2}$ [T] $\Rightarrow H = B/\mu = 0.01/0{,}003 = 3{,}33$ [A/m],

$H = IN/l \Rightarrow N = Hl/I = 3{,}33\cdot 4{,}456/0{,}5 = 29{,}71$

N = 30 navojaka.

6.7. ……

$B = \Phi/S = 0{,}1765\cdot 10^{-3}/(7{,}5\cdot 10^{-3})^2\pi = 1$ [T],

H = 11 000 A/m --- iz karakteristike magnetisanja,

$H_o = B/\mu_o = 1/4\pi\cdot 10^{-7} = 796\,178$ A/m

$M = H\,l_\mu + H\,l_o = 11\,000\,(D\pi - l_o) + 796\,178\,l_o = 11\,000\cdot(200\cdot\pi - 2)\cdot 10^{-3} + 796\,178\cdot 2\cdot 10^{-3}$

M = 8 478,36 [A].

6.8. …..

$B = \Phi/S = 10^{-4}/1^2\pi\cdot 10^{-4} = 1/\pi = 0{,}32$ [T],

$l_u = D\pi = 0{,}2\cdot 3{,}14 = 0{,}628$ [m],

$l_\mu = l_u - l_o = 628 - 1 = 627$ [mm] $\cong 628$ [mm] $\cong 0{,}628$ [m],

$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_u/4 = 157$ [mm],

Iz kar. magnetisanja sledi:

$H_1 = 100$ [A/m]---za dinamo lim

$H_2 = 30$ [A/m]--- za čelični lim

$H_3 = 110$ [A/m]--- za liveni čelik

$H_4 = 125$ [A/m]--- za liveno gvozđe

$H_o = B_o/\mu_o = 0{,}32/4\pi\cdot 10^{-7} = 253\,560$ [A/m]

$M = H_1l_1 + H_2l_2 + H_3l_3 + H_4l_4 + H_ol_o = (H_1 + H_2 + H_3 + H_4)\cdot 0{,}157 + 253\,560\cdot 10^{-3}$

M = 310,865 [A/m].

6.9. …..

$B_\Pi = B_o/0{,}9 = 1{,}2/0{,}9 = 1{,}33$[T]…. za Π deo magnetnog kola

$B_\square/B_\Pi = (\Phi/S_\square)/(\Phi/S_\Pi) = S_\Pi/S_\square \Rightarrow B_\square = B_\Pi\cdot S_\Pi/S_\square = 1{,}33\cdot 0{,}025\cdot 0{,}025/\,0{,}025\cdot 0{,}03 = 1{,}11$ [T].. za ravni deo magnetnog kola (pravougaoni).

Iz karakteristike magnetisanja se očita : $H_\Pi = 800$ [A/m], odnosno $H_\square = 400$ [A/m].

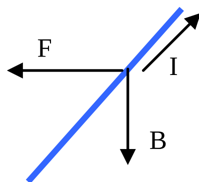
$M = H_\Pi l_\Pi + H_\square l_\square + 2\,H_ol_o$; $l_\square = 25 + 2\cdot(30/2 - 25/2) + 2\cdot 2r\pi/4 = 25 + 5 + 39{,}25 = 69{,}25$ [mm]

$l_\Pi = 50 + 2\cdot(95 - 0{,}25) + 2\cdot 2r\pi/4 = 50 + 189{,}5 + 39{,}25 = 278{,}75$ [mm]

$M = 800\cdot 0{,}2788 + 400\cdot 0{,}0693 + 2\cdot 1{,}2/4\pi\cdot 10^{-7} = 223{,}04 + 27{,}6 + 477{,}71 = 728{,}35$ [A]

$M = I\,N \Rightarrow I = M/N = 728{,}35/222 = 3{,}28$ [A]

6.10. -----



a) $R_{\mu e} = R_\mu + R_{\mu o} = l/\mu_o\mu_rS + l_o/\mu_oS = (l + l_o\mu_r)/\mu_o\mu_rS$

$l \cong 3\,(a - c) + (a - c - l_o) = 3\cdot 9 + 8{,}5 \cong 35{,}5$ [cm],

$\Phi = M/R_{\mu e} = \mu_o\mu_rSIN\,/\,(l + l_o\mu_r) = 40{,}7$ [μWb],

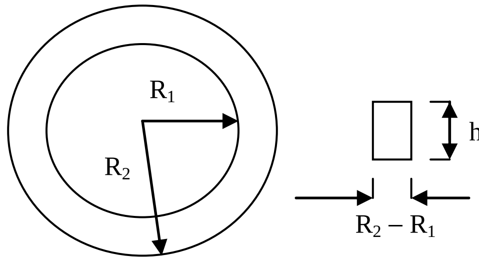
$B = \Phi/S = 40{,}7\cdot 10^{-6}/10^{-2}\cdot 10^{-2} = 40{,}7\cdot 10^{-2}$ [T] = 0,407 [T],

b) $F = BI_pc = 0{,}407\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-2} = 0{,}407\cdot 10^{-5} = 4{,}07$ [μN],

pravac i smer se dobije pravilom leve ruke, a samim tim provodnik će se pomerati u levu stranu (naznačeno na slici).

c) $H_o = B/\mu_o = 323\,000$ [A/m], $H = B/\mu_o\mu_r = 1\,079$ [A/m] .

6.11. -----



$S = (R_2 – R_1)\cdot h = (12 – 8)\cdot 15 = 60$ [cm],
$B = \Phi/S = 0{,}025/60\cdot 10^{-4} = 4{,}17$ [T],
$l = 2(R_1+R_2)\pi/2 = 0{,}628$ m
$H = M/l = 1000/0{,}628 = 1\,592{,}36$ [A/m],
$\mu = B/H = 4{,}17/1\,592{,}36 = 0{,}00262$ [H/m],
$\mu_r = \mu/\mu_o = 0{,}00262/4\pi\cdot 10^{-7} = 2\,085{,}99$

6.12. ----- Kako je aktivna dužina provodnika 2 cm $\Rightarrow S = 2\cdot 2$ cm^2.
Sila na provodnik kroz koji protiče struja : $F = BIl$, te je indukcija u vazdušnom procepu jednaka: $B = F/Il_o \Rightarrow$
$B = 18\cdot 10^{-3}/1\cdot 2\cdot 10^{-2} = 0{,}9$ [T], $B_1 = B_o = 0{,}9$ [T], Fluks je u celom kolu isti pa sledi: $\Phi = B_1S_1 = B_2S_2 \Rightarrow$
$B_2 = B_1S_1/S_2 = 0{,}9\cdot 4/6 = 0{,}6$ [T]
Iz krive magnećenja za liveni čelik očita se za B_1 $H_1 = 250$ [A/m], a za B_2 $H_2 = 130$ [A/m]
$NI = H_ol_o + H_1l_1 + H_2l_2 = Bl_o/\mu_o + H_1l_1 + H_2l_2 = 0{,}9\cdot 10^{-3}/4\pi\cdot 10^{-7} + 250\cdot 0{,}1 + 130\cdot 0{,}3 = 780{,}56$ [A/m]
$I = 780{,}56/N = 780{,}56/2000 = 0{,}39$ [A]

6.13. ---- Jačinu magnetnog polja u jezgru nađemo po obrascu: $H = IN/2R\pi$. Magnetnu indukciju očitamo sa karakteristike magnećenja. Magnetni fluks izračunamo po relaciji: $\Phi = BS$. Za date jačine struja sledi:
$I = 0{,}25$ A $\Rightarrow H = 199$ A/m , $\Phi = 104$ μWb;
$I = 0{,}5$ A $\Rightarrow H = 398$ A/m, $\Phi = 116$ μWb;
$I = 0{,}75$ A $\Rightarrow H = 597$ A/m, $\Phi = 124$ μWb;
$I = 1$ A $\Rightarrow H = 796$ A/m, $\Phi = 127$ μWb.

6.14. ---- Zadatak se rešava na isti način kao i predhodni,što znači da je jačina magnetnog polja ostala ista, a samim tim, nakon očitavanja magnetne indukcije sa karakteristike magnećenja sledi:
za dinamo lim:
$I = 0{,}25$ A $\Rightarrow \Phi = 84$ μWb, $I = 0{,}5$ A $\Rightarrow \Phi = 115$ μWb, $I = 0{,}75$ A $\Rightarrow \Phi = 128$ μWb, $I = 1$ A $\Rightarrow \Phi + 133$ μWb.
za čelečni lim:
$I = 0{,}25$ A $\Rightarrow \Phi = 118$ μWb, $I = 0{,}5$ A $\Rightarrow \Phi = 132$ μWb, $I = 0{,}75$ A $\Rightarrow \Phi = 137$ μWb, $I = 1$ A $\Rightarrow \Phi = 141$ μWb.

6.15. ---- Podelom jezgra na pet slojeva dobiju se srednji poluprečnici slojeva 33 mm, 39 mm, 45 mm, 51 mm, i 57 mm. Na osnovu ovih poluprečnika dobije se srednja jačina magnetnog polja (idući redom):
193 (965) A/m, 163 (816) A/m, 141 (707) A/m, 125 (624) A/m, I 112 (558) A/m.
U zagradama su data rešenja za jačinu struje od 1 A, a van zagrada za struju od 0,2 A. Iz krive magnetiziranja se očita magnetna indukcija koja iznosi(redom):
1,03 (1,28) T; 0,98 (1,27) T; 0,92 (1,26) T; 0,89 (1,24) T; i 0,84 (1,22) T.
Površina jednog sloja iznosi $1{,}8\cdot 10^{-4}$ m^2 , pa je trazeni fluks jednak $\Phi = 0{,}9$ (1,13) mWb.
Na srednjoj liniji torusa jačina magnetnog polja iznosi $H = 141$ (707) A/m, pa je magnetna indukcija $B = 0{,}92$ (1,26) T.
Površina poprečnog dela torusa je $S = 9\cdot 10^{-4}$ m^2, pa je magnetni fluks približno jednak $\Phi = 0{,}85$ (1,13) mWb.

6.16. ---- Postupak rešavanja je isti kao u predhodnom zadatku . Na osnovu dobivenih podataka sledi konačno rešenje za magnetni fluks koji iznosi : za jezgro od dinamo lima $\Phi = 0{,}56$ (1,17) mWb, dok za čelični lim $\Phi = 0{,}97$ (1,26) mWb.

6.17. ---- Srednja dužina gornjeg dela kola iznosi $l_1 = 14{,}36$ cm, a donjeg $l_2 = 5{,}64$ cm. Inteziteti magnetnih indukcija iznose $B_1 = 1{,}17$ T, a $B_2 = 0{,}875$ T, pa se iz kar. magnetisanja očita jačina magnetnog polja koja iznosi $H_1 = 460$ A/m i $H_2 = 6\,800$ A/m. Kako je (uopšteni Amperov zakon): $M = IN = H_1l_1 + H_2l_2 \Rightarrow I = 4{,}5$ A.

6.18. ---- Magnetna indukcija srednje grane iznosi: $B_2 = 1{,}1 \cdot B_o = 0{,}11$ T. Kako je magnetno kolo simetrično, tj. magnetomotorne sile i magnetni otpori leve i desne strane kola su iste pa sledi: $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_1 \Rightarrow$
$B_2 S_2 = B_1 S_1 + B_1 S_1 \Rightarrow B_2 = 2B_1$, jer je magnetni fluks, a samim tim i magnetna indukcija leve i desne grane jednaka. Indukcije leve i desne grane kola iznosi: $B_1 = B_2 /2 = 0{,}055$ T.
Srednja dužina leve i desne strane iznosi : $l_1 = 2 \cdot (a/_2 - d_1) + (b - 2d_1) + 2 \cdot (1/4) \cdot d_1 \pi = 2 \cdot 3 + 2 + 3{,}14 \Rightarrow$
$l_1 = 11{,}14$ cm; $l_2 = b - d_1 - l_o = 3{,}9$ cm. Iz karakteristike magnetisanja očita se jačina magnetnog polja: $H_1 = 15$ A/m i $H_2 = 30$ A/m. Na osnovu Amperovog zakona (druki Kirhofov zakon za magnetno kolo) sledi: $IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_o l_o$; Kako je $H_o = B_o/\mu_o$. Iz navedene jednačine izračuna se broj navojaka N, jer je sve ostalo poznato. Rešenjem jednačine dobije se N = 82 navojka.

Ako u predhodnoj jednačini zanemarimo magnetne padove napona u jezgri (zbog zanemarivanja magnetnih otpora jezgra), jednačina glasi: $IN = H_o l_o \Rightarrow N = 80$ navojaka. Iz datih rešenja se vidi da su razlike vrlo male, pa se kod manje preciznih računajna (pogonska) kola rešavaju ovim drugim načinom (mnogo jednostavnije i kraće).

6.19. ---- Kod zanemarivanja magnetnog otpora jezgra (reluktanse) dobije se jednačina: $IN = H_o l_o \Rightarrow$
$H_o = 600\,000$ A/m, odnosno $B_o = \mu_o H_o = 0{,}754$ T. Kako je $B_2 = 1{,}1 \cdot B_o = 0{,}829$ T, Indukcija leve i desne grane kola je jednaka i iznosi $B_1 = B_2/2 = 0{,}0415$ T.

6.20. --- -a) Ako se zanemari magn. rasipanje u procepu sledi jednačina: $IN = Hl + H_o l_o$. Kako je $B = B_o \Rightarrow$
$B = 0{,}43$ T, a iz kar. magnetisanja $H = 120$ A/m.
$H_o = B_o/\mu_o = 342\,357$ A/m
Rešenjem početne jednačine dobije se za jačinu struje vrednost $I = 2{,}01$ A.
b) $B = 1{,}2 \cdot B_o = 0{,}516$ T.
Iz kar. magnetisanja sledi $H = 140$ A/m, dok je $H_o = B_o/\mu_o = 342\,357$ A/m.
Rešenjem jednačine: $IN = Hl + H_o l_o \Rightarrow I = 2{,}06$ A.

6.21. ----- $l_1 = l_3 = 2 \cdot (a/_2 - d) + (b - 2d) + 2 \cdot (1/4) d\pi = 2 \cdot (3-1) + (4-2) + \pi/2 = 7{,}57$ cm,
$l_2 = b - d = 4-1 = 3$ cm.
$B_3 = \Phi_3/S_3 = 50 \cdot 10^{-6}/10^{-4} = 0{,}5\ T \Rightarrow H_3 = 130$ A/m (iz kar. magn.).
$H_3 l_3 = H_2 l_2 \Rightarrow H_2 = 328\ A/m \Rightarrow B_2 = 1{,}1$ T (kar. magn.). Kako je $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \Rightarrow B_1 S_1 = B_2 S_2 + B_3 S_3 \Rightarrow$
$B_1 = B_2 + B_3 = 1{,}1 + 0{,}5 = 1{,}6\ T \Rightarrow H_1 = 4\,000$ A/m (iz kar. magn.).
Rešenjem jednačine $I_1 N_1 = H_1 l_1 + H_2 l_2 \Rightarrow I_1 = 6{,}25$ A.

6.22. ----- $l_1 = l_3 = 7{,}57$ cm; $l_2 = 3$ cm (predhodni zadatak).
Metodom kirhovovih pravila (uopšteni Amperov zakon) postavimo sledeći sistem jednačina:
$N_1 I_1 - H_1 l_1 + H_2 l_2 - N_2 I_2 = 0 \Rightarrow 0{,}0757\,H_1 - 0{,}03\,H_2 = -30$
$N_1 I_1 - H_1 l_1 - H_3 l_3 + N_3 I_3 = 0 \Rightarrow 0{,}0757\,H_1 + 0{,}0757\,H_3 = 90$
$N_2 I_2 - H_2 l_2 - H_3 l_3 + N_3 I_3 = 0 \Rightarrow 0{,}03\,H_2 + 0{,}0757\,H_3 = 120$
Uvodjenjem smene: $x = 0{,}0757\,H_1$; $y = 0{,}03\,H_2$ i $z = 0{,}0757\,H_3$, sistem jednačina glasi:
$x - y = -30$; $x + z = 90$ i $y + z = 120$.
Kako navedeni sistem jednačina matematički nije rešiv (ima bezbroj rešenja), rešenje se može pronaći postepenim uvrštavanjem nepoznatih (približavanjem konačnom rešenju).Na samom početku je veoma bitno da znamo red veličina nepoznatih (jačina magnetnog polja). Kroz desnu granu kola svi fluksevi su istog smera (Φ_1,Φ_2 i Φ_3), pa je i jačina magnetnog polj u toj grani najjača ($H_1 > H_2, H_2$). Takođe je bitno da se ima u vidu da je $\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 \Rightarrow B_3 S = B_1 S + B_2 S \Rightarrow B_3 = B_1 + B_2$ (zakon održanja magnetnog fluksa – prvi kirh. zak.). Ako za navedeni sistem jednačina uzmemo sledeca rešenja: $x_1 = 1$; $y_1 = 31$ i $z_1 = 89 \Rightarrow H_1 = 1/0{,}075 = 13{,}2$ A/m; $H_2 = 31/0{,}03 = 1\,033$ A/m; $H_3 = 89/0{,}0757 = 1\,175$ A/m. Za $x_2 = 2\ (3) \Rightarrow H_1 = 26\ (\ 39{,}6\ )$ A/m; za $y_2 = 32\ (33)$ $\Rightarrow H_2 = 1067\ (\ 1100\ )$ A/m; $z_2 = 88\ (\ 87\ ) \Rightarrow H_3 = 1162\ (\ 1149{,}3\ )$ A/m. Za $z < 87 \Rightarrow y \Rightarrow 33 \Rightarrow H_3 < H_2$, što je praktično nemoguće. Na osnovu navedenih rešenja za jačine magnetnog polja mogu se uzeti sledeće približne vrednosti: $H_1 = 26$ A/m; $H_2 = 1067$ A/m; $H_3 = 1162$ A/m. Iz karakteristike magnetisanja se očitaju vrednosti za intezitet vektora magnetne indukcije koji iznosi: $B_1 = 0{,}02$ T; $B_2 = 1{,}36$ T; $B_3 = 1{,}38$ T. Konačno, magnetni fluks iznosi: $\Phi_1 = B_1 S = 2\ \mu$Wb; $\Phi_2 = B_2 S_2 = 136\ \mu$Wb; $\Phi_3 = B_3 S_3 = 138\ \mu$Wb.

6.23.----- Kako nema rasipanja magnetsko polje u svakom poprečnom preseku kola je isto (homogeno). Ako označimo sa B i H magnetsku indukciju i jačinu polja u jezgru, a sa B_o i H_o u procepu (vazduhu), sledi:

$$M = IN = Hl + H_o l_o \; ; \quad \text{gde je} \quad I = \frac{E}{R} = 3[A], \;\; a \quad H_o = \frac{B_o}{\mu_o} = \frac{B}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 796180 \cdot B \quad (B_o = B).$$

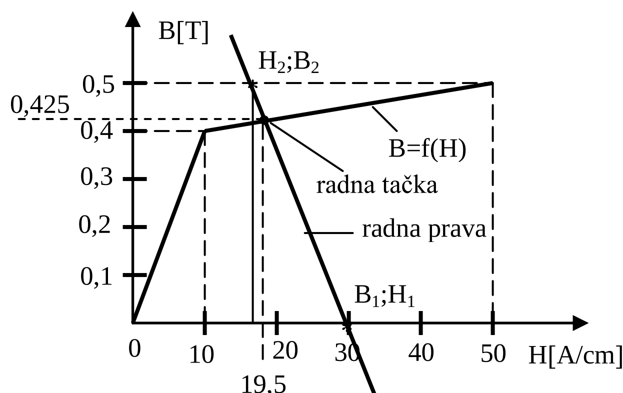
Uvrštavanjem ovih vrednosti u jednačinu Amperovog zakona (Drugi Kirhofov zakon za magnetizam), sledi: $3 \cdot 1000 = H \cdot 1 + 796180 \cdot B \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-3} \;\Rightarrow\; 3000 = H + 2500B$. Ova jednačina predstavlja jedan pravac, koji se može nazvati radnim pravcem, jer na njemu se mora naći vrednosti B i H. Da bi se odredile vrednosti za B i H treba nacrtati radni pravac na datu karakteristiku magnetisanja. Gde se seče radni pravac sa karakteristikom magnetisanja, tu su vrednosti za B i H iste, što i predstavlja rešenje zadatka.

Dakle, radni pravac (prava)

$$H + 2500\,B = 3000$$

- za $B_1 = 0$ [T] $\Rightarrow$ $H_1 = 3000$ [A/m] = 30 [A/cm] a za $B_2 = 0{,}5$ [T] $\Rightarrow$ $H_2 = 1750$ [A/m] = 17,5[A/cm]..

Kako je predhodna jednačina jednačina prave, dovoljno je odrediti dve tačke kroz koje prolazi data prava. Na osnovu ovih podataka nacrtamo pravu na dijagramu koji predstavlja karakteristiku magnetisanja (vidi sliku).



Sa dijagrama se očita tačka u kojoj se seku radna prava i karakteristika magnetisanja. To je tačka u kojoj je: $B \approx 0{,}425$ T i $H = 19{,}5$ A/cm.
Kako je $B = B_o = 0{,}425$ T $\Rightarrow$
$H_o = B_o/\mu_o = 338375{,}2$ [A/m].

6.24. ----- $IN = Hl + H_o l_o \;\Rightarrow\; 2\,500 = 0{,}25H + \dfrac{B_o}{\mu_o} \cdot 10^{-3} \;\Rightarrow\; H + 3184{,}71B - 2\,500 = 0 \;\; (B = B_o)$.

Jednačina $H + 3\,184{,}7 \cdot B - 2\,500 = 0$ predstavlja jednačinu prave, koja se naziva radna prava, jer se na njoj mora pronaći tačka pri kojem radi magnetno kolo. Kako ta tačka mora zadovoljiti i karakteristiku magnetisanja, tj mora se nalaziti i na njoj, sledi da se radna tačka nalazi na preseku radne prave i karakteristike magnetisanja. Uvrštavanjem proizvoljnih vrednosti za B, u navedenu jednačinu, dobiju se vrednosti za H, a samim tim može se ta prava ucrtati u postojeći grafik (karakteristiku magnetisanja $B = f (H)$). Ako pretpostavimo da je magnetska indukcija redom 0; 2 i 3 T, sledi

$B_1 = 0$ T $\Rightarrow$ $H_1 = 10\,000$ A/m; $B_2 = 1$ T $\Rightarrow$ $H_2 = 6\,815{,}29$ A/m i $B_3 = 3$ T $\Rightarrow$ $H_3 = 445{,}87$ A/m. Kako je na karakteristici magnetiosanja za B = 1 T H = 1 000 A/m očito je da će prava seći datu karakteristiku u vrednosti B = 1 T, jer je to maksimalna vrednost koju postiže magnetska indukcija. Čitaocu se preporučuje da nacrta pravu i da pronađe radnu tačku (presek prave i karakteristike magnetisanja).

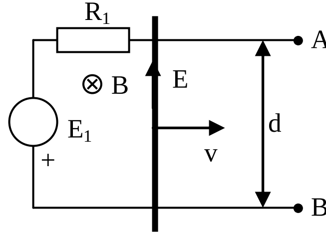
Konačna rešenja su: $B = B_0 = 1$ T $\Rightarrow$ $H = 6\,815{,}29$ A/m; $H_o = B_o/\mu_o = 1/4\pi \cdot 10^{-7} = 796\,178$ [A/m].

7.1. --- $E = -N d\Phi/dt = -N(B_2 - B_1)S/dt = -150\cdot(0,6-0,4)\cdot 10\cdot 10^{-4}/0,2 = -0,16$ V.

7.2. ----- $E = Blv \Rightarrow l = E/Bv = 0,4$ m; $dS = l\cdot s = l\cdot v\cdot dt = 0,4\cdot 0,2\cdot 1 = 0,08$ m^2 .

7.3. ----- 20V

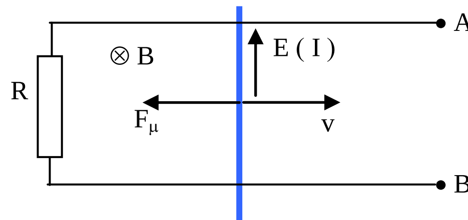
7.4.



$E = Blv = 1,2\cdot 20\cdot 10^{-2}\cdot 20\cdot 10^{-2} = 0,048$ V,
Smer ind. ems E se odredi pravilom desne ruke, pa je ona smera kao na slici. Kako će na struju u kolu istovremeno delovati i E_1 i E (u istom smeru), sledi da će struja u kolu biti jednaka : $I = (E_1 + E)/(R_1 + R) = 2,048/0,3 = 6,83$ A.
$E_1 - I R_1 + U_{AB} = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{U_{AB} = I R_! - E_1 = -0,634}$ **V.**

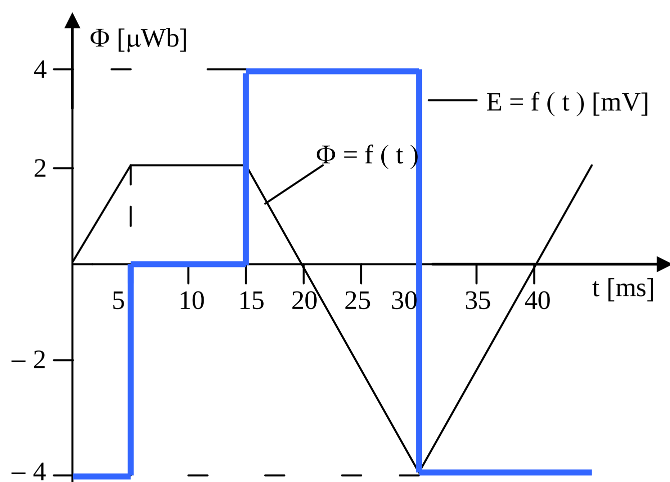
7.5. ….. 6,4 V. **7.6.** ….. a) 0,24 V; b) 0,17 A; c) $P = E\,I = 0,041$ W. **7.7.** ….. 0,13 T.

7.8. ----- $E = Blv = 24$ V $\Rightarrow I = E/R = 240$ A $\Rightarrow F_\mu = BIl = 288$ N.
Na provodnik istovremeno deluju dve sile. Prva sila pomera provodnik brzinom v u naznačenom smeru i to je mehanička sila F_m, dok druga sila, elektromagnetna F_μ, deluje na provodnik u suprotnom smeru, i ona nastaje usled pojave indukovane struje koja protiče kroz provodnik. Da bi se provodnik pomerao konstantnom brzinom ove dve sile moraju biti jednake, ali suprotnih smerova. Primenom pravila leve ruke (za elektromagnetnu silu) dobijemo smer sile F_μ, dok pravilom desne ruke predhodno odredimo smer indukovane ems E (odnosno struje). Na osnovu navedenih konstatacija dobiju se smerovi za elektromagnetnu i indukovanu elektromotornu silu, koji su dati prema slici.



7.9. … 0,6 T. **7.10.**….. 100 m/s. **7.11.** ….. 4 V. **7.12.** ….. 40. **7.13.** ….. 2,5 μWb/s.

7.14. -----

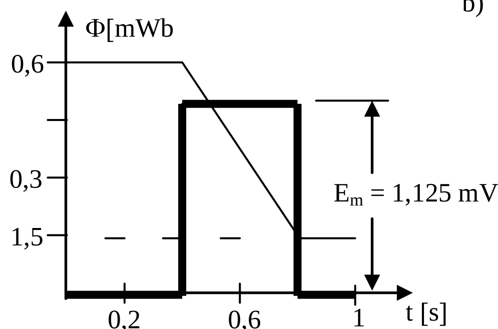


za $dt_1 = 5$ ms $\Rightarrow d\Phi_1 = 2\ \mu$Wb $\Rightarrow$
$e_1 = -\ d\Phi_1/dt_1 = -\ 2\cdot10^{-6}/5\cdot10^{-3} \Rightarrow$
$e_1 - 0{,}4$ mV.
$dt_2 = (15 - 5) = 10$ ms $\Rightarrow d\Phi = 0\ \mu$Wb
$\Rightarrow\ e_2 = 0$ mV, $dt_3 = 15$ ms $\Rightarrow$
$d\Phi_3 = -4 - 2 = -6\ \mu$Wb $\Rightarrow e_3 = 0{,}4$ mV,
$dt_4 = 10$ ms $\Rightarrow d\Phi_4 = 0 - (-4) = 4\ \mu$Wb
$\Rightarrow\ e_4 = -\ 0{,}4$ mV.

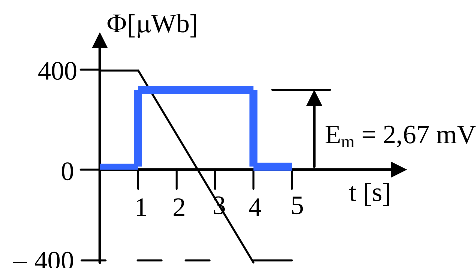
Da se primetiti da sa porastom fluksa indukovana ems je negativna, a sa opadanjem fluksa ona je pozitivna (što je potvrđeno Lencovim pravilom). Ako je fluks konstantan (od 5 do 15 ms) indukovana ems je jednaka nuli (nema promene fluksa) . Dijagram ind. ems. e u zavisnosti od vremena t, dat je na slici (napon je u mV).

7.15. ----

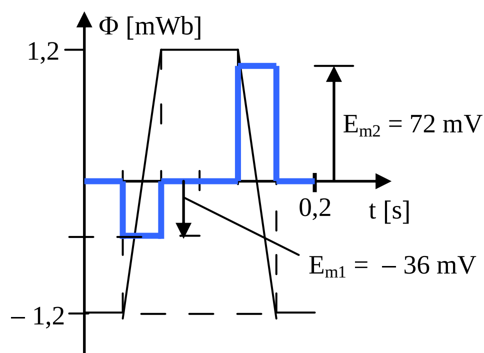
a)



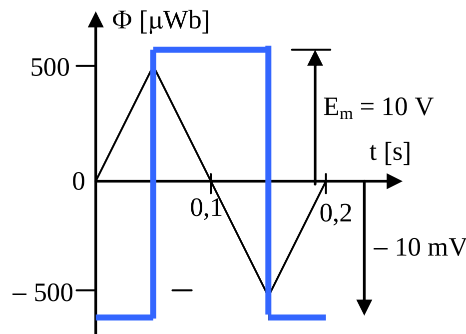
b)



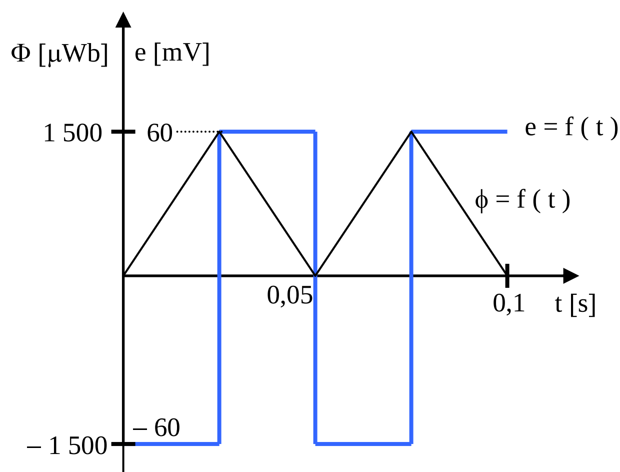
c)



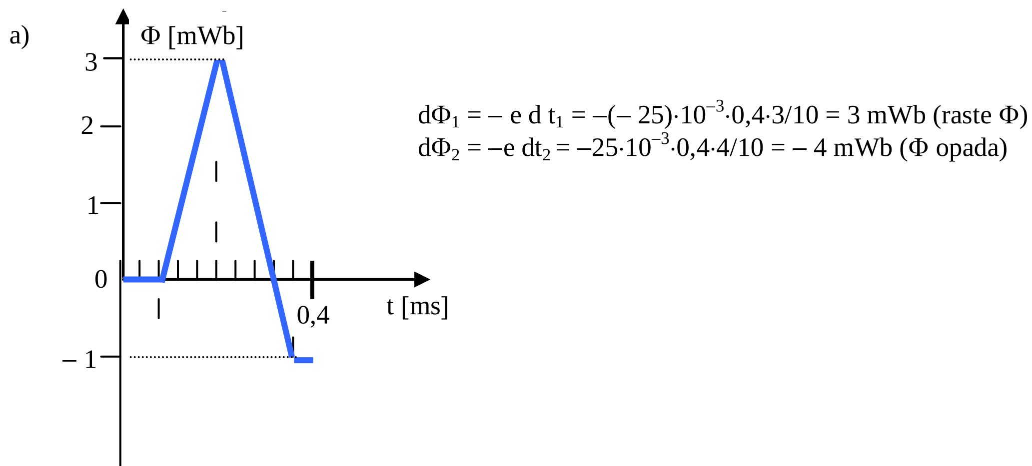
d)



e)

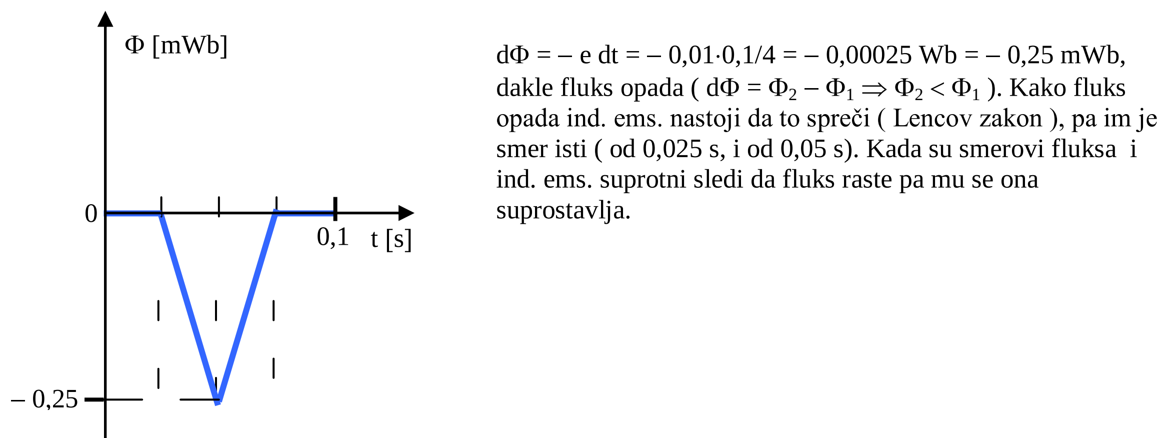


7.16. -----



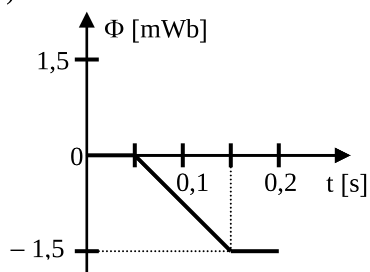
$d\Phi_1 = -\,e\,d\,t_1 = -(-\,25)\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}4\cdot 3/10 = 3$ mWb (raste Φ)
$d\Phi_2 = -e\,dt_2 = -25\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}4\cdot 4/10 = -\,4$ mWb (Φ opada)

b)



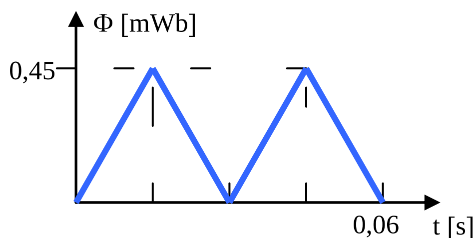
$d\Phi = -\,e\,dt = -\,0{,}01\cdot 0{,}1/4 = -\,0{,}00025$ Wb $= -\,0{,}25$ mWb, dakle fluks opada ($d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 < \Phi_1$). Kako fluks opada ind. ems. nastoji da to spreči (Lencov zakon), pa im je smer isti (od 0,025 s, i od 0,05 s). Kada su smerovi fluksa i ind. ems. suprotni sledi da fluks raste pa mu se ona suprostavlja.

c)



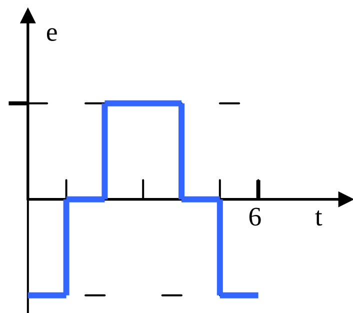
$e = -\,d\Phi/dt \Rightarrow$
$d\Phi = -\,e\,dt = -\,15\cdot10^{-3}\cdot(0{,}15 - 0{,}05) = 0{,}0015$ Wb.
$d\Phi = -\,e\,dt = -\,0{,}015\cdot0{,}2/2 = 0{,}0015$ Wb = 1,5 mWb
Sva navedena rešenja se odnose na početni fluks od 0 Wb.
Ako je početni fluks veći od nule, za tu vrednost se ceo grafik podiže prema gore, i obrnuto.

d)

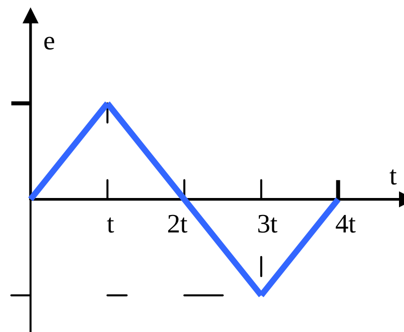


$d\Phi = -\,e\,dt = 0{,}03\cdot0{,}06\cdot1/4 = 0{,}45$ mWb, s tim da fluks raste i suprotnog je smera od e, dakle, raste u plusu.

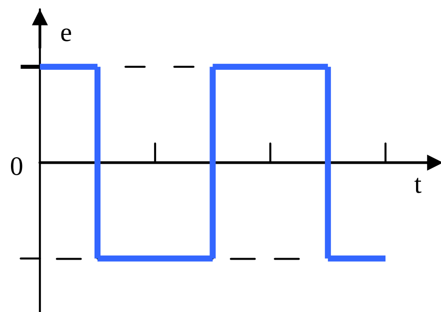
7.17. ----



7.18. ------



7.19. ----



7.20. ---- $d\Phi = e\,dt = 0{,}02\cdot1 = 20$ mWb $\Rightarrow$ $\Phi_2 - \Phi_1 = 20$ mWb $\Rightarrow \Phi_2 = 20\cdot10^{-3} + \Phi_1 = 25$ mWb.

7.21. ---- $E = -\,d\Phi/dt = -\,(\Phi_2 - \Phi_1)/dt = -\,(0{,}24 - 0{,}15)/3 = -\,0{,}09/3 = -\,0{,}03$ V = 30 mV.

7.22. ---- Kako provodnik pri pomeranju ne seče linije magnetnog polja (nema promene fluksa) u njemu neće doći do indukovane ems. e, pa sledi da je : e = 0 V

7.23. ---- 120 V; 25 ms.

7.24. ---- a) 0,8 V; b) 5 A; 4 W; 2 N; c) 80 A; 64 W; 32 N.

7.25. ---- $E = I R_g = B \cdot b \cdot v \Rightarrow B = I R_g / bv = 0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 / (0{,}03 \cdot 4 \cdot 10^{-2}) = 0{,}8333$ T.

7.26. ---- a) $E = B\,l\,v$

$B = \mu\, I\, N / l = 12{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 8 / 0{,}01 = 0{,}00603$ T $= 6{,}03$ mT

$l = 2 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 5$ m

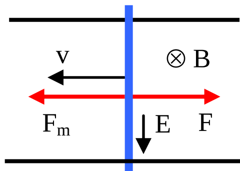
$v = d \cdot \pi \cdot n / 60 = 5 \cdot 3{,}14 \cdot 250 / 60 = 65{,}42$ cm/s $= 0{,}6542$ m/s.

$E = 0{,}00603 \cdot 5 \cdot 0{,}6542 = 0{,}0197$ V $= 19{,}7$ mV

b) Kako je indukovana ems. E proporcionalna brzini, tj. broju obrtaja (uz konstantnu indukciji i dužinu provodnika) , može se pisati:

$n' : n = E' : E \Rightarrow n' = E' / n \cdot E = 10 \cdot 10^{-3} / 250 \cdot 19{,}7 \cdot 10^{-2} = 126$ [ob / min.]

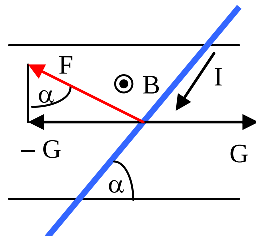
7.27. ----



Ako se provodnik pomera u naznačenom smeru (zbog delovanja neke spoljne sile F_m mehaničke prirode), u njem će se indukovati ems koja iznosi : $e = Blv = 12$ V. Smer te sile se odredi pravilom desne ruke, i njen smer je prema dole (obeležen na slici).
Kroz kolo će da protiče struja $I = e / R = 12 / 5 = 2{,}4$ A.

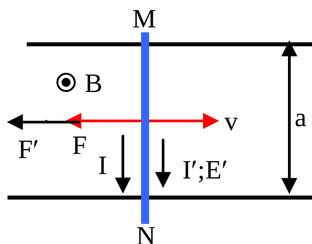
Na strujni provodnik koji se nalazi u magnetnom polju delovati će elektromagnetna sila F koja je jednaka:
$F = BIl = 1{,}2 \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}5 = 1{,}44$ N. Smer elektromagnetne sile odredimo pravilom leve ruke, što znači da ta sila nastoji da provodnik pomeri u desnu stranu (suprotno od mehaničke sile).
Da bi se provodnik pomerao konstantnom brzinom ove dve sile moraju da se izjednače (kako bi brzina kretanja ostala nepromenjena). Sledi da je mehanička sila koja deluje na provodnik u smeru njegovog pomeranja (u pravcu vektora v) jednaka $F_m = 1{,}44$ N.

7.28. -----



Da bi se provodnik pomerao konstantnom brzinom mora ukupna suma svih sila koje deluju na njega biti jednaka nuli. Smer magnetne indukcije mora biti ka posmatraču (linije izlaze izravne), kako bi elektromagnetna sila bila suprotna sili G.
$\sin\alpha = G / F \Rightarrow G = F \sin\alpha = B\,I\,l' \sin\alpha$, gde je l' ukupna dužina provodnika koja je jednaka:
$l' = l / \sin\alpha \Rightarrow G = BIl \sin\alpha / \sin\alpha = BIl = 5 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 2{,}5$ N.

7.29. ----- a)



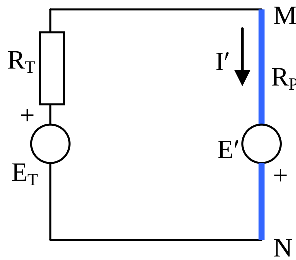
Otpor provodnika iznosi $R_p = r \cdot a = 5 \cdot 0{,}2 = 1\ \Omega$.
Metodom zajedničkog napona nađemo napon između tačaka M i N, koji iznosi:
$U_{MN} = (E/R + E/R) / (1/R + 1/R + 1/R_P) \Rightarrow$
$U_{MN} = (3 + 3) / (0{,}25 + 0{,}25 + 1) = 6 / 1{,}5 = 4$ V $\Rightarrow$
$I = U_{MN} / R_P = 4 / 1 = 4$ A, čiji je smer od tačke M ka tački N (od većeg potencijala ka manjem).
Jačina električnog polja iznosi: $E_P = U_{MN} / a = 4 / 0{,}2 = 20$ V/m.
Na ukočeni provodnik kroz koji teče struja deluje elektromagnetna sila koja iznosi : $F = B\,I\,a \Rightarrow$
$F = 1{,}2$ N, i smer ove sile je sa desna na levo (vidi sliku), a on se odredi pravilom leve ruke (ili neko drugo pravilo).

b) U provodniku koji se kreće brzinom v indukuje se ems. E′, koja je jednaka: $E' = B\,a\,v = 1{,}5\cdot 0{,}2\cdot 1o = 3$ V. Smer ove sile možemo odrediti pravilom desne ruke, i njen smer je od tačke M ka tački N.

Da bi odredili struju u provodniku, možemo se poslužiti Tevenenovom metodom. Zamislimo da provodnika nema, napon između tačaka M i N možemo odrediti metodom zajedničkog napona, a taj napon predstavlja napon tevenena U_T, i on iznosi :

$$U_T = (E/R + E/R) (1/R + 1/R) = (3 + 3) / (0{,}25 + 0{,}25) = 12 \text{ V.}$$

Otpor tevenena jednak je: $R_T = R\cdot R / (R + R) = 16 / 8 = 2\ \Omega$



Kako i napon tevenena U_T i indukovana ems E′ teraju struju I′ u istom smeru, od tačke M ka tački N, ona je jednaka:

$I' = (U_T + E') / (R_T + R_P) = 5$ A, sa smerom od tačke M ka N.

Na provodnik sada deluje elektromagnetna sila F′ koja iznosi:

$F' = B\,I'\,a = 1{,}5\cdot 5\cdot 0{,}2 = 1{,}5$ N. Smer ove sile je sa desna u levo, tj. nastoji provodnik da pomeri suprotno od mehaničke sile koji provodnik pomera s leva u desno. Ove dve sile se kompenziraju, pa se provodnik pomera stalnom brzinom v.

Intezitet električnog polja u ovom slučaju iznosi:

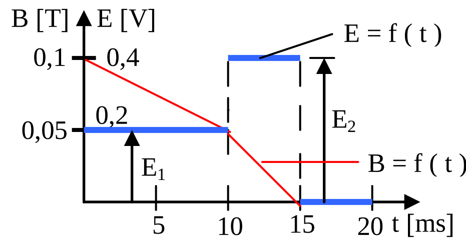
$E'_P = U'_{MN} / a = (U_T + E') / a = (12 + 3) / 0{,}2 = 25$ V/m.

7.30. ---- U provodniku se indukuje ems E koja iznosi: $E = B\,a\,v \sin\alpha = 0{,}1\cdot 1{,}2\cdot 30\cdot 0{,}5 = 1{,}8$ V.
Smer ems je od tačke N ka tački M , pa će kroz provodnik teći struja u istom smeru čiji intezitet iznosi:

$I = E / (R + R_P) = E / (R + r\cdot a) = 1{,}8 / (1{,}2 + 0{,}5\cdot 1{,}2) = 1$ A.

Snaga koju prima otpornik R iznosi: $P = I^2 R = 1^2\cdot 1{,}2 = 1{,}2$ W.

7.31. ----



$E_1 = -\,d\Phi/dt = -\,SdB/dt = 0{,}2$ V;
$E_2 = 0{,}4$ V.

7.32. ---- a) Da; b) 15 Wb/s. **7.33.** ---- $U_i = 5{,}6\cdot 10^{-4}$ V. **7.34.** ---- E = 25 mV.

7.35. ---- $Q = C\cdot E = C\cdot Nd\Phi/dt = C\cdot NSdB/dt = 12{,}56\cdot 10^{-8}$ [C].

7.36. ---- a) nula; b) $E = d\Phi/dt = SdB/dt = a^2 dB/dt \Rightarrow E = a^2 B/t$ [V].

7.37. ---- $E = -\,N\,d\Phi/dt = -\,N(\Phi_2 - \Phi_1)/(t_2 - t_1) = -\,N\cdot(-2\Phi)/t = 2N\Phi/t = 2NS_oB/t \Rightarrow$
$Q = I\cdot t = (E/R)\cdot t = 2NS_oB/R$; Kako je $R = \rho l/S = \rho N2r\pi/S$, gde je $2r\pi$ obim jednog navojka, a S poprečni presek žice. S_o je presek navoja i on je jednak: $S_o = r^2\pi$. Sledi: $Q = 2Nr^2\pi B/(\rho N2r\pi/S) \Rightarrow$
$Q = rSB/\rho$

7.38. ---- $E = Nd\Phi/dt = NSdB/dt = Nr^2\pi B/t = 0{,}25\cdot\pi$ V,
$R = \rho l/S = 0{,}0178\cdot N\cdot 2r\pi/S = 0{,}178\cdot\pi$
$I = E/R = 0{,}25\pi/0{,}178\pi = 250/178 = 1{,}4$ A

7.39. ---- $P = I^2R = E^2/R$; $E = NSdB/dt = 1000\cdot 40\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-3} = 4\cdot 10^{-3}$ V $\Rightarrow$ $P = (4\cdot 10^{-3})^2 / 160 = 10^{-7}$ W.

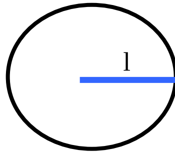
7.40. ---- $B = \mu\cdot H = 4\pi\cdot 10^{-7}H \Rightarrow E = NSdB/dt = \mu NSdH/dt = 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1000\cdot 4\cdot 10^{-4}\cdot 8 = 16\cdot 8\cdot\pi\cdot 10^{-8}$ V $\Rightarrow$
$P = E^2/R \cong 10^{-13}$ W.

7.41. ---- $E = Blv\sin\alpha = Blv\sin 60° = Blv\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow I = \frac{E}{R} = \frac{\sqrt{3}Blv}{2R}$

7.42. ---- $E = Blv = 10^{-7}$ V. Kroz sijalicu će proticati struja od $I = E/R = 2\cdot10^{-7}$ A. Ova struja će stvarati elektromagnetnu silu koja će delovati na provodnik, čiji je smer suprotan od smera v, a intezitet te sile je: $F = BIl = 2\cdot10^{-12}$ N. Da bi brzina pomeranja stranice bc ostala ista pre i posle uključenja sijalice (dakle pre i posle struje I), navedena elektromagnetna sila treba da se poništi. To će se postići tako što će na dati provodnik delovati dodatna mehanička sila $F_m = -F = -2\cdot10^{-12}$ N (tj. u istom smeru kao i v). Navedena konstatacija se može objasniti i Lencovim pravilom, po kojem indukovana struja sprečava pomeranje provodnika (dakle vrši njegovo usporavanje). To se sprečava dodatnom silom (F_m) koja treba da održi istu brzinu (potpomaže v).

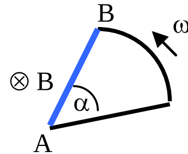
7.43. ---- $E = Blv = 0{,}5\cdot10^{-2}$ V. Da bi žica klizila stalnom brzinom elektromagnetna sila F i sila teže mg moraju da se ponište (izjednače). U protivnom došlo bi do ubrzanja.
Dakle, $F = mg = 10^{-2}$ N [$F = -mg$] $\Rightarrow$
$BIl = 10^{-2} \Rightarrow I = 10^{-2}/10^{-2}\cdot0{,}5 = 2$ A $\Rightarrow R = E/I = 0{,}5\cdot10^{-2}/2 = 0{,}25\cdot10^{-2}$ [Ω] = 2,5 [mΩ].

7.44. ----



Provodnik pri kružnom rotiranju seče magnetni fluks po površini $S_o \Rightarrow$
$S_o = l^2\pi = 0{,}04\pi\ m^2$
Brzina promene megnetne indukcije jednaka je: $dB/dt = 4\cdot2/1 = 8$ T/s.
(može se izračunati brzina promene po jednom obrtaju. Tada je vreme jednog obrtaja $dt_1 = dt/4 = 0{,}25$ s $\Rightarrow dB/dt = 2/0{,}25 = 8$ T/s).
Indukovana ems je jednaka:
$E = d\Phi/dt = S_o dB/dt = 0{,}04\cdot\pi\cdot8 = 0{,}32\cdot\pi \cong 1$ [V].

7.45. ----



Rotirajući vektor AB oko tačke A ima ugaonu brzinu ω koja je jednaka: $\omega = \alpha/t$ [rad/s]. Pri tom rotiranju provodnik čija je dužina ujedno poluprečnik kružnog isečka čini površinu, koja je jednaka:
$S_i = l^2\pi\cdot\alpha/2\pi = l^2\cdot\alpha/2 = l^2\cdot\omega t/2$.

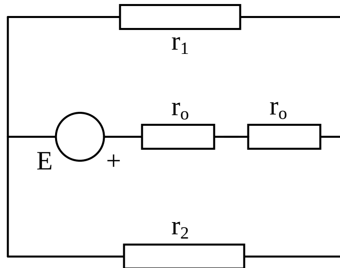
(Napomena: α je u radijanima. Ako se α izrasi u ° površina kružnog isečka je: $S_i = l^2\pi\cdot\alpha/360$.).
Iz izraza $\omega = \alpha/t \Rightarrow \alpha = \omega t$.
Indukovana ems će kod kružnog rotiranja provodnika, oko jednog njegovog kraja biti jednaka:
$E = d\Phi/dt = S_i dB/dt = l^2\cdot\alpha B/2t = l^2\omega tB/2t = l^2\omega B/2$. Dakle, kod kružnih rotacija indukovana ems je jednaka:

$$E = \frac{l^2\omega B}{2}\ [V]$$

Pošto je $B = \mu H = 800\cdot4\pi\cdot10^{-7} \Rightarrow E = 0{,}3^2\cdot50\cdot12{,}56\cdot10^{-7}\cdot800/2 = 2{,}26\cdot10^{-3}$ [V] = 2,26 [mV].

7.46. ---- $E = Bl^2\omega/2 \Rightarrow \omega = 2E/Bl^2 = 12{,}5$ rad/s.
Kako je $\omega = \alpha/t \Rightarrow \alpha = \omega t$, te za jedan obrtaj $\alpha = 2\pi = \omega t \Rightarrow \omega = 2\pi/t$. Ako ovaj izraz pomnožimo sa l (dužina štapa – poluprečnik kruga) sledi: $\omega l = 2\pi l/t = O/t = v$. Dakle brzina po obimu kruga jednaka je:
$v = \omega l = 12{,}5\cdot0{,}2 = 2{,}5$ m/s.

7.47. ---- Ugaona brzina jednaka je $\omega = \alpha/t \Rightarrow \alpha = \omega t = 10\pi/12$ rad. Pokretni i nepokretni pravolinijski provodnik (žica) će zaklapati ugao od $\alpha_u = \alpha + \pi/6 = \pi$ [rad] = 180° . Kružna kontura se sastoji iz dva paralelna otpora iste otpornosti (iste dužine), koje iznose $r_1 = r_2 = \rho\cdot 2R\pi/2S = 86\cdot\pi\cdot 10^{-5}\ \Omega$. Otpor pravolinijskih provodnika (poluprečnika) jednak je $r_o = \rho R/s = 86\cdot 10^{-5}\ \Omega$.



$E = R^2\omega B/2 = 0{,}2^2\cdot(5/12)\cdot\pi\cdot 0{,}1/2\ 0{,}04\cdot 5\cdot\pi\cdot 0{,}1/24 \Rightarrow$
$E = 2{,}62\cdot 10^{-3}$ V.
$r_u = 2r_o + r_1\cdot r_2/(r_1+r_2) = 307{,}02\cdot 10^{-5}\ \Omega$.

$I = E / r_u = 0{,}85$ A.

7.48. ----

a) U predhodnom zadatku je : $E' = 2{,}62$ mV; $r_e' = 3{,}07$ mΩ, a $I' = 0{,}85$ A.
Za isti ugao između pokretne i nepokretne žice kao u predhodnom zadatku ($\alpha_e = 150° + 30° = 180°$) sledi da je isti i ukupni otpor celog kola, tj. $r_e = 3{,}07\cdot 10^{-3}\ \Omega \Rightarrow E = I\cdot r_e = 3{,}07$ mV.
Kako je $E = R^2\omega B/2 \Rightarrow \omega = 2E/R^2B = 1{,}535$ rad/s.

b) Pokretna žica je prešla ugao od $150° = 5\pi/12$ rad, te je : $\omega = \alpha/t \Rightarrow t = \alpha/\omega = 1{,}7$ s.

c) Za $t_2 = 2$ s $\Rightarrow \alpha_2 = \omega t_2 = 1{,}535\cdot 2 = 3{,}07$ rad $= 3{,}07\cdot 180/\pi\ ° = 176° \Rightarrow \alpha_e = \alpha_2 + 30° = 206$
Ovaj ugao u odnosu na ugao (360 – 206) se odnosi kao otpori (dužine) r_1 i r_2 na kružnoj konturi. Dakle,
$r_1 : r_2 = 206:154 = 1.34 \Rightarrow r_1 = 1.34\cdot r_2$. Zbir otpora r_1 i r_2 jednak je ukupnom otporu kružne konture:
$r_1 + r_2 = 1{,}34\cdot r_2 + r_2 = 2{,}34\cdot r_2 = \rho\cdot 2R\pi/S = 0{,}0172\cdot 2\cdot 0{,}2\cdot\pi/4 = 5{,}4$ m$\Omega \Rightarrow r_2 = 2{,}31$ mΩ; $r_1 = 3{,}09$ mΩ.
$r_e = 2r_o + r_1r_2/(r_1+r_2) = 2\cdot 0{,}86 + 2{,}31\cdot 3{,}09/(2{,}31+3{,}09) = 1{,}72 + 7{,}14/5{,}4 = 1{,}72 + 1{,}32 = 3{,}04$ mΩ.
$I_e = E/r_e = 3{,}07\cdot 10^{-3}/3{,}04\cdot 10^{-3} = 1{,}01$ A.

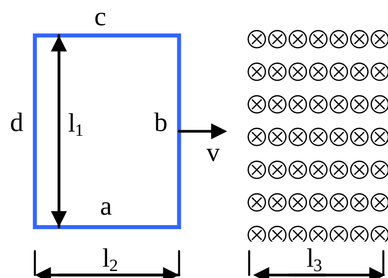
d) Struja će biti maksimalna kada je ekvivalentni otpor najmanji. Kako su otpori pravolinijskih provodnika konstantni, sledi da će ekvivalentni otpor zavisiti od otpora r_1 i r_2 na kružnoj konturi. Zbog njihove paralelne veze njihov ekvivalentni otpor će biti manji što je jedan od njih manji, dakle što je ugao između njih manji. Za ugao između pravolinijskih provodnika ≅ 0°, jedan od otpora kružne konture je ≅ 0 $\Rightarrow r_e \cong 2r_o \Rightarrow$ struja je maksimalna (za ugao 0° nema strujnog kola)
Maksimalni otpor će biti kada je ugao jednak 180°, jer je $r_1\cdot r_2/(r_1 + r_2)$ najveće. To znači da će u ovom slučaju struja biti minimalna.

7.49. ---- a) $E = Blv = 0{,}02\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5 = 0{,}003$ V = 3 mV; $R = 0{,}5 + 1\cdot 3/(1+3) = 1{,}25\ \Omega$
$I = E/R = 0{,}003/1{,}25 = 0{,}0024$ A = 2,4 mA
b) $R' = 0{,}5 + 1 = 1{,}5\ \Omega \Rightarrow I = E/R = 0{,}003/1{,}5 = 0{,}002$ A = 2 mA.

7.50. ---- a) $I = (E+E_i)/(r+R) = (E+l^2\omega B/2)/(r+R) = (2E + l^2\omega B) / (2 (r + R)$
b) $U_{AO} = E_i - IR = l^2\omega B/2 - (2E + l^2\omega B)\cdot R / 2 (r + R) = (l^2\ \omega Br - 2ER) / (2 (r + R)$
c) $E_i' = -E \Rightarrow E = -l^2\omega B / 2 \Rightarrow \omega = -2E / l^2B$.
Dakle, štap treba da rotira u suprotnom smeru ugaonom brzinom $\omega' = 2E/l^2B$, kako bi se ems E i indukovana ems E′ međusobno poništile (E + E′ = 0).

7.51. ---- $S_O = (0{,}2/2)^2\pi = 0{,}0314\ m^2$; $S_{\square} = a^2 = (O/4)^2 = 0{,}0247\ m^2$
$dS = S_O - S_{\square} = 0{,}0067\ m^2$
a) $E = dS\cdot dB/dT = dS\cdot B/t \Rightarrow Q = I\cdot t = E\cdot t/R = dS\cdot B/R = 13{,}4\cdot 10^{-6}$ C.
b) $Q = S_{\square}\cdot B/R = 49{,}4\cdot 10^{-6}$ C.

7.52. ----



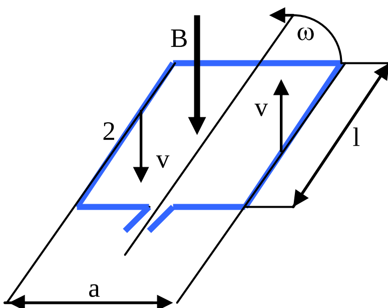
Pokretni ram treba posmatrati kao četiri pravolinijska provodnika (a,b,c i d). Kako c i d ne presecaju magnetni fluks u njima se ne indukuje ems ($E_A = E_C = 0$). U Delu rama b i d dužine l_1 se indukuje ems E_B, odnosno E_D. Obe indukovane ems su smera prema provodniku c (pravilo desne ruke), što znači da je ukuna ems jednaka jednoj od njih – kada se samo jedan od tih provodnika nalazi u magnetnom polju čija je aktivna dužina jednaka l_3.

Kada su oba dela u magnetnom polju , tada je ukupna indukovana ems jednaka $E = E_A - E_B = 0$ (jer su suprotnih smerova gledajući na struju u datoj konturi). Iz navedenog sledi da je aktivna dužina za datu konturu onaj put koji će preći konturu dok se u magnetnom polju indukcije B nalazi samo jedan od ravnih provodnika (b, odnosno d). To je put l_2 (dok b ulazi u magnetno bolje – d je van njega) + l_2 (dok d izlazi iz magnetnog polja indukcije B – b je van toga polja). Dakle: $l = 2l_2$. Kako je indukovana ems jednaka $E = Bl_1v \Rightarrow E = Bl_1 \cdot 2l_2/t$.
Toplotna energija iznosi: $W = I^2 Rt \Rightarrow W = [(Bl_1 \cdot 2l_2/t / R]^2 \cdot R \cdot t = B^2 l_1^2 \cdot 4l_2^2 / Rt = (2B^2 \cdot l_1^2 \cdot l_2/R) \cdot (2l_2 / t)$
$\Rightarrow W = 2B^2 \cdot l_1^2 \cdot v / R \Rightarrow v = W \cdot R / 2B^2 \cdot l_1^2 \cdot l_2 = 4$ m/s.

7.53. ---- $E = S \cdot dB / dt = 100 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-5}$ V.
$Q = E \cdot C = 5 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 50 \cdot 10^{-11}$ C = 500 pC.

7.54. ---- $E = NS \cdot 2dB/dt = 80 \cdot (d/2)^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}/0,2 = 0,2412$ V
$Q = It = (E/R) \cdot t$; $R = \rho \cdot l/S_O = \rho \cdot N \cdot d \cdot \pi/S_O = 0,017 \cdot 80 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot \pi/1 = 0,3416\ \Omega$
$Q = (0,2414/0,3416) \cdot 0,2 = 0,1412$ C

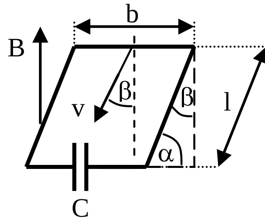
7.55. ----



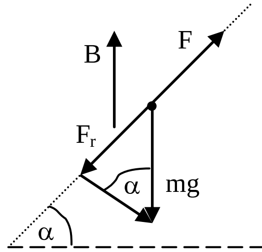
Ram koji rotira u magnetnom polju oko svoje ose ugaonom brzinom ω svojim aktivnim delovima (pravolinijski provodnik 1 i 2) preseca magnetni fluks indukcije B. Prilikom rotacije ugao između B i v se stalno menja, a samim tim menja se i indukovana ems u ramu.Kada su B i v međusobno normalni indukovana ems je maksimalna, a kada su u istom pravcu indukovana ems je jednaka nuli ($e = Blv\sin\alpha$). Koristeći pravilo desne ruke, lako je ustanoviti da će se u aktivnim delovima rama (1 i 2) indukovati ems koje teraju struju u istom smeru, te je:
$E = E_1 + E_2$.

Za jedan obrtaj rama indukovana ems je jednaka:
$E' = E_1' + E_2' = Blv + Blv = 2Blv \Rightarrow E' = 2Bl \cdot a\pi/t = 2BS\pi/t = BS \cdot 2\pi/t = BS\omega = \Phi\omega$.
Za n obrtaja, brzina je n puta veća, te sledi da je ukupna indukovana ems je:
$E = n \cdot BS\omega = n \cdot \mu \cdot H \cdot S \cdot \omega = n \cdot \mu \cdot H \cdot S \cdot 2\pi/t \Rightarrow$
$E = 14 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,59 \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot \pi = 8,78 \cdot 10^{-3}$ [V] = 8,78 [mV].

7.56. ----



Poznato je: m,α,b,B i l. Treba odrediti: t i v
Provodnik koji klizi brzinom v u odnosu na magnetnu indukciju B zatvara ugao β, koji iznosi: $\beta = 90° - \alpha$.
Ind. ems u provodniku koji klizi iznosi: $e = Bbv\sin(90° - \alpha) = Bbv\cos\alpha$.
Na provodnik će delovati gravitaciona sila koja je jednaka: $G = mg\sin\alpha$.
Usled ove sile provodnik se kreće određenom brzinom, što će dovesti do pojave indukovane struje u provodniku, koja iznosi: $I = Q/t = EC/t \Rightarrow$
$I = C\cdot B\cdot b\cdot v\cdot\cos\alpha/t = CBb(v/t)\cdot\cos\alpha = CBba\cos\alpha$;
gde je **a = v/t**.... ubrzanje provodnika.



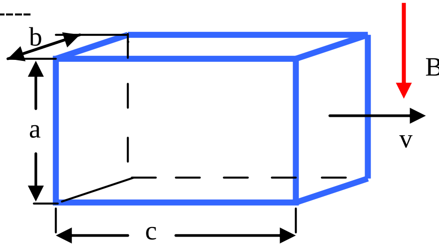
Zbog indukovane struje dolazi i do elektromagnetne sile, koja će delovati na provodnik u suprotnom smeru (Lencovo pravilo), i ona iznosi:
$F = BIb\sin(90° - \alpha) = BIb\cos\alpha$
Gravitaciona sila i elektromagnetna sila stvaraju ukupnu silu F_r koja iznosi
$F_r = G - F = mg\sin\alpha\ \alpha - BIb\cos\alpha = mg\sin\alpha - (CBba\cos\alpha)\cdot Bb\cos\alpha \Rightarrow$
$F_r = mg\sin\alpha - CB^2b^2a\cos^2\alpha$. Ova rezultantna sila dovodi do ubrzanog kretanja provodnika i ona je jednaka: $F_r = ma \Rightarrow$
$ma = mg\sin\alpha - CB^2b^2a\cos^2\alpha \Rightarrow a(m + CB^2b^2\cos^2\alpha) = mg\sin\alpha \Rightarrow$

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + CB^2b^2\cos^2\alpha}$$

Iz relacije za ubrzanje vidimo da je ono konstantno (početna brzina je bila jednaka nuli a krajnja l/t), pa će pređeni put s biti jednak: $s = l = at^2/2 \Rightarrow t^2 = 2l/a \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{mg\sin\alpha}\left(m + CB^2b^2\cos^2\alpha\right)}$

Šipka će na kraju imati brzinu: $v = a\cdot t \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2lmg\sin\alpha}{m + CB^2b^2\cos^2\alpha}}$

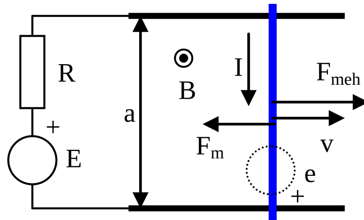
7.57. -----



a) $E = S\cdot dB/dt = b\cdot c\cdot dB/dt = b\cdot(c/t)\cdot B = \mathbf{bvB} = U_i$;
gde je b dužina provodnika.

b) Ako izraz: $U_i = Bbv$ podelimo sa b $\Rightarrow$
$U_i/b = Bv = E'$, dobije se izraz za jačinu električnog polja koja će delovati na krajevima provodnika (čija je dužina jednaka b), gde je E' jačina električnog polja kojeg stvaraju stranice površine c·a, usled njihove potencijalne razlike (napona U_i). Ovu jačinu električnog polja možemo posmatrati isto kao kod električnih kondenzatora, čije ploče imaju površinu $S = c\cdot a$ i nalaze se na međusobnom rastojanju b. Na pločama površine c·a prisutna je gustina naelektrisanja koja je jednaka: $\sigma = Q / S = Q / c\cdot a$. Kako je jačina električnog polja između dveju ravni (kondenzatora): $E' = Q / \varepsilon_o S \Rightarrow$
$E' = Q / \varepsilon_o\cdot a\cdot c = U_i / b \Rightarrow \sigma = Q / S = \varepsilon_o\cdot E' = \varepsilon_o\cdot U_i / b = \varepsilon_o\cdot Bbv / b = \boldsymbol{\varepsilon_o\cdot B\cdot v}$

7.58*. -----



Usvojimo smer magnetske indukcije ka posmatraču, kao što je prikazano na slici. Da bi se šipka kretala konstantnom brzinom na nju moraju delovati uravnotežene sile (mehanička sila $\mathbf{F_{meh}}$ i elektromagnetna sila $\mathbf{F_m}$) suprotnih smerova.

Elektromagnetnu silu stvara struja koja prolazi kroz provodnik, u datom smeru (dlan leve ruke), i ona iznosi:

$$F_m = BIa = F_{meh}$$

(vektori B i a su međusobno normalni, pa je sila maksimalna)

Usled pomeranja šipke u magnetnom polju u njoj se indukuje elektromotorna sila koja iznosi:

$$e = Bav = E_i$$

jer je $B \perp v \perp a$.

Smer indukovane ems E_i , po Lencovom pravilu, će nastojati da se suprostavi pomeranju provodnika u pravcu v svojim magnetnim poljem, pa se njen smer poklapa sa smerom struje (dlan desne ruke).

Prema Drugom Kirhofovom zakonu,sledi

$E - IR + e = 0.$

Iz izraza $F_m = BIa \Rightarrow I = F_m/Ba$, pa se Drugi Kirhofov zakon može napisati:

$$E - \frac{F_m}{Ba} \cdot R + Bav = 0 .$$

Množeći celu jednačinu sa Ba sledi: $EBa - F_mR + B^2a^2v = 0 \Rightarrow B^2a^2v + EBa - F_mR = 0.$

Uvrštavanjem pojedinačnih vrednosti, dobija se kvadratna jednačina:

$$40B^2 + 20B - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2B^2 + B - 1 = 0.$$

Rešenjem kvadratne jednačina dobiju se dva rešenja za magnetsku indukciju:

$$B_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \quad B_1 = 0{,}5\ T; \ \ B_2 = -1\ T.$$

Za $B_1 = 0{,}5\ T \Rightarrow$ $e_1 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 10 = 10$ V, $I_1 = F_m/Ba = 10 / 0{,}5 \cdot 2 = 10$ A.

U drugom slučaju (sa B = – 1 T) indukovana ems je $e_2 = -20$ V, a struja $I_2 = -5$ A.

Iz dobijenih rešenja se vidi da će se provodna šipka pomerati konstantnom brzinom v u magnetnom polju indukcije $B_1 = 0{,}5$ T (sa smerom kako je označen na slici) . U protivnom, ako je smer magnetske indukcije suprotan od naznačenog na slici, tada će provodnik da se pomera konstantnom brzinom v u zadatom smeru ako je vrednost magnetske indukcije $B_2 = -1$ T (znak ″–″ govori samo o smeru polja). Očito je da će u ovom slučaju i smer struje I i smer indukovane ems E_i biti suprotan u odnosu na prvo rešenje.

Dakle, rešenja ovog zadatka su:

$$B_1 = 0{,}5\ T \ \text{ i } \ B_2 = -1\ T;$$

Snaga koju proizvodi naponski generator je:

$P_{E1} = EI_1 = 10 \cdot 10 = 100$ W, dok je za drugo rešenje $P_{E2} = EI_2 = 10 \cdot (-5) = -50$ W.

Pri prvom rešenju generator daje snagu od 100 W (ponaša se kao izvor), dok kod drugog rešenja generator prima energiju, snage 50 W, pa se on ponaša kao potrošač (snaga negativna).

Ukupna snaga koju daje naponski generator (na njegovim stezaljkama) je:

$P_{KE1} = U \cdot I_1 = (E - I_1R)\, I_1 = (10 - 10 \cdot 2) \cdot 10 = -100$ W.

Snaga Džulovih gubitaka u samom naponskom generatoru je $P_{R1} = I_1^2R = 200$ W.

U drugom slučaju ($I_2 = -5$ A), sledi .

$P_{KE2} = U \cdot I_2 = (E - I_2R) \cdot I_2 = (10 + 5 \cdot 2) \cdot (-5) = -100$ W, a snaga Džulovih gubitaka je: $P_{R2} = I_2^2R = 50$ W.

Snaga mehaničkog rada je $P_{meh} = F_{meh} \cdot v = 100$ W. Vidimo da je $P_{meh} = P = 100$ W, što je u skladu sa održanjem snaga.

8.1. … $-38{,}4$ V; 19,2 V. **8.2**…… -5 V; **8.3**…… -18 V, 7,2 H; **8.4**…… $-0{,}12$ V, $2{,}4\cdot10^{-4}$ Wb;

8.5. … 20 μH; **8.6.** … 1 mH; **8.7**. … 115 m;

8.8. … $L = N^2\,\Lambda = N^2\cdot\mu\,S / l = N^2\,\mu\,r^2\,\pi / l$

Kako je ukupna dužina provodnika l_P jednaka: $l_p = 2\,r\,\pi\,N \Rightarrow N = l_p / 2\,r\,\pi \Rightarrow L = (\,l_p / 2\,r\,\pi\,)^2\cdot\mu\,r^2\,\pi / l$
$L = l_p^{\,2}\cdot\mu / 4\,\pi\,l \Rightarrow l_p^{\,2} = 4\,\pi\,l\cdot L / 4\cdot\cdot10^{-7}\cdot\mu_r = l\cdot L / 10^{-7}\cdot\mu_r = 2\cdot0{,}8 / 1200\cdot10^{-7} = 1{,}333\cdot10^4 \Rightarrow l = 115{,}47$ m.

8.9. ---- $L = N^2\,\Lambda = N^2\,\mu\,S / l = 300^2\cdot4\cdot\pi\cdot10^{-7}\cdot4\cdot10^{-4} / 0{,}4 = 1{,}13\cdot10^{-4}$ H.

Kako je ukupni fluks jednak: $\Phi = N\cdot\Phi_1$ (Φ_1 je fluks kojeg stvara jedan navojak), sledi da je induktivnost kola jednaka: $L = N\Phi_1 / I = \Phi / I \Rightarrow I = \Phi / L = 7\cdot10^{-6} / 1{,}13\cdot10^{-4} = 6{,}2\cdot10^{-2}$ A = 62 mA.

8.10. ---- Pravolinijski provodnik stvara magnetnu indukciju B_1 koja prolazi kroz solenoid (njegovu poprečnu površinu). Prema Bio-Savarovom zakonu ona iznosi: $B_1 = 2\cdot10^{-7}I_1 / a$. Srednja udaljenost solenoida od provodnika iznosi: $a = (\,R_1 + R_2\,) / 2 = 0{,}11$ m $\Rightarrow B_1 = 18{,}2\cdot10^{-7}I_1$.

Provodnik svojim magnetnim fluksom stvara u navoju induktivnost (uzajamnu) koja iznosi $L_{12}=N\Phi_{12} / S$
$L_{12} = N\,S\cdot18{,}2\cdot10^{-7}\cdot I_1 / I_1 = 18{,}2\cdot10^{-7}\cdot N\cdot S$

Površina pravougaonog torusa iznosi: $S = h\cdot(\,R_2 - R_1\,) = 8\cdot10^{-4}$ m^2 $\Rightarrow L_{12} = 8000\cdot8\cdot10^{-4}\cdot18{,}2\cdot10^{-7} \Rightarrow$
$L_{12} = 11{,}65$ μH.

Kako je uzajamna induktivnost ista sledi da je induktivnost kalema na provodnik jednaka ($L_{21} = L_{12} = L_m$), induktivnosti provodnika na kalem. Dakle: $L_{12} = L_{21} = L_m = 11{,}65$ μH.

8.11. **----** $L_1 = N^2\,\Lambda_1 = 10^6\cdot12{,}56\cdot10^{-7}\cdot(3\cdot10^{-2})^2\pi / 0{,}4 = (\,3\cdot10^{-2}\pi\,)^2$
$L_2 = N^2\Lambda_2 = 10^6\cdot12{,}56\cdot10^{-7}\cdot(\,1{,}5\cdot10^{-2}\,)^2\pi / 0{,}4 = (\,1{,}5\cdot10^{-2}\pi\,)^2$
$L_{12}^{\,2} = k^2\cdot L_1\cdot L_2 = 0{,}2^2\cdot(\,3\cdot10^{-2}\pi\cdot1{,}5\cdot10^{-2}\pi\,)^2 \Rightarrow L_{12} = 0{,}2\cdot4{,}5\cdot\pi^2\cdot10^{-4} = 0{,}887$ mH.

8.12. ---- L = 3,39 mH.

8.13. ---- $L_1 = N_1^{\,2}\cdot\mu_o\,\mu_r\,S / l_1$; $L_2 = N_2^{\,2}\,\mu_o\,\mu_r\,S / l_2$
$L_{12}^{\,2} = L_1\,L_2 = N_1^{\,2}\,\mu_o^{\,2}\,\mu_r^{\,2}\,N_2^{\,2}\,S^2 / l_1\,l_2 \Rightarrow S^2 = L_{12}\,l_1\,l_2 / (\,\mu_o\,\mu_r\,N_1\,N_2\,)^2$
$S^2 = 0{,}2^2\cdot0{,}1\cdot0{,}08 / (\,12{,}56\cdot10^{-7}\cdot200\cdot200\cdot150\,)^2 = 5{,}6\cdot10^{-6}$ m^2 $\Rightarrow S = 2{,}37\cdot10^{-3}$ m
Kako je $S = R^2\,\pi \Rightarrow R^2 = S / \pi = 2{,}37\cdot10^{-3} / 3{,}14 = 0{,}755\cdot10^{-3}$ m^2 = $7{,}55\cdot10^{-4}$ m^2 $\Rightarrow R = 2{,}75$ cm.

8.14. ---- a) $I = E / (\,R + R_g\,) = 1$ A

Drugi navojak se nalazi u magnetnom polju prvog navojka ($\Phi_{12} = B\,S$), te će usled toga u drugom navojku doći do induktivnosti (međusobna induktivnost), koja je jednaka: $L_{12} = \Phi_{12} / I_! = B\,S / I_1 = 2\cdot10^{-4}$ H.
b) $L_{12}^{\,2} = k^2\cdot L_1\cdot L_2 \Rightarrow L_2 = L_{12} / k^2\cdot L_1 = (\,2\cdot10^{-4}\,)^2 / 4\cdot10^{-3}\cdot0{,}3^2 = 1{,}11\cdot10^{-4}$ H = 0,11 mH.

8.15. ---- $M = IN \Rightarrow I = M / N = 6000 / 1000 = 6$ A; $L = N\,\Phi / I = 10^3\cdot4{,}5\cdot10^{-3} / 6 = 0{,}75$ H.

8.16. … 6,4 mH; 128 mV; **8.17.** …. 200; 1 mH; **8.18.** …. 0,3 mV; **8.19.** ….4 H; **8.20.** …. 236 mH;

8.21. …. 15 920; 500; **8.22.** ….. 0,12; **8.23.** …. 127;

8.24. **-----** $L' = N^2\,\Lambda'$; $L'' = N^2\,\Lambda'' \Rightarrow L' / L'' = \Lambda' / \Lambda''$;
$\Lambda' = \mu_o\,\mu_r\,S / l$; $S = (\,r_2 - r_1\,)^2.\pi / 4 = 10^{-4}\,\pi$ [m^2]; $l = d\,\pi = 2\cdot(\,r_1 + r_2\,)\cdot\pi / 2 = 0{,}22\,\pi$ [m]

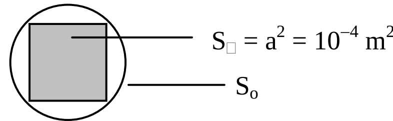
Kod vazdušnog procepa (magnetni otpori se sabiraju), povećava se magnetna provodnost , odnosno smanjuje se magnetna provodnost, i ona sada iznosi:

$$\Lambda'' = (\,\Lambda_1\cdot\Lambda_o\,) / (\,\Lambda_1 + \Lambda_o\,) = (\,\mu_o\,\mu_r\,S / l_1''\,)\cdot\ (\mu_o\,S_o / l_o\,) / [(\,\mu_o\,\mu_r\,S / l_1''\,) + \mu_o\,So / l_o\,)$$

$l_1'' = l - l_o \cong l$, jer je $l >> l_o$, takođe je $B \cong B_o$ (nema magnetnog rasipanja). Uz navedene pretpostavke dalje sledi : $\Lambda'' = (\,\mu_o\,\mu_r\,S / l\,l_o) / [(\,\mu_r\,l_o + l\,) / l\,l_o\,] = \mu_o\,\mu_r\,S / (\,\mu_r\,l_o + l\,) \Rightarrow$
$\Lambda' / \Lambda'' = (\,\mu_r\,l_o + l\,) / l = (\,1000\cdot0{,}001 + 0{,}22\cdot\pi\,)\cdot0{,}22\cdot\pi = 1{,}69 / 0{,}69 \Rightarrow\ \ \Lambda' / \Lambda'' = 2{,}45$.

8.25. ---- $l_p = d\pi\cdot N = 2r\pi\cdot N \Rightarrow N = l_p / 2r\pi$
$L = N^2\,\Lambda = (\,l_p^2 / 4r^2\pi^2\,)\cdot(\,\mu_o\mu_r S / l\,)$; $S = r^2\pi \Rightarrow L = l_p^2\mu_o\mu_r / 4l\pi \Rightarrow l_p^2 = 4l\pi\cdot L / \mu_o\mu_r$
$l_p^2 = 4\cdot 0{,}8\cdot\pi\cdot 2 / 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 1200 = 4\,000 / 3\ [m^2] \Rightarrow l_p = 115{,}33\ [m]$.

8.26. ---- a) $e = -N\,d\Phi_{\square} / dt \Rightarrow d\Phi_{\square} = -e\,dt / N = -705\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}1 = -70{,}5\ \mu Wb$.
$\Phi_{\square}'' - \Phi_{\square}' = -70{,}5\ \mu Wb \Rightarrow \Phi_{\square}' = 70{,}5\ \mu Wb$ (jer je za $I'' = 0$ I fluks $\Phi_{\square}'' = 0$)
za $t = 0 \Rightarrow I' = 2$ A , $\Phi' = 70{,}5\ \mu Wb$, $\Rightarrow B' = \Phi_{\square}' / S = 70{,}5\cdot 10^{-6} / 10^{-4} = 0{,}705\ T \cong B_o$.
$\Phi_{\square}'$ je fluks koji obuhvata kvadratnu konturu. Magnetna indukcija u toj konturi je ista sa indukcijom u torusu, i one su jednake indukciji ukupnog procepa (ako nema magnetnog rasipanja)



b) $I'N = H'\,l' + H_o'\,l_o = B'l' / 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot\mu_r + B'l_o / 12{,}5610^{-7} = (B' / 12{,}56\cdot 10^{-7}) / (\,l'/\mu_r + l_o) \Rightarrow$
$2\cdot N = 56{,}13\cdot 10^{-4}\cdot(\,l' + \mu_r\cdot l_o) / \mu_r$, kako je $l' = l - l_o = 56{,}22$ cm $= 0{,}5622$ m $\Rightarrow$
$N = (0{,}5622 + 1000\cdot 0{,}001)\cdot 56{,}13\cdot 10^4 / 2\cdot 1000 = 997{,}3$ navojaka $\Rightarrow N = 1\,000$ navojaka.

c) $L = N\,\Phi / I$, Kako nam treba fluks torusa sledi da je $\Phi = \Phi_o = B'\cdot S_o = 0{,}705\cdot 3\cdot 10^{-4} = 2{,}115\cdot 10^{-4}$ Wb.
$L = 1000\cdot 2{,}115\cdot 10^{-4} / 2 = 105{,}75\cdot 10^{-3}$ [H] = 105,75 [mH]

8.27. ---- a) $L = N\,\Phi / I \Rightarrow \Phi = L\,I / N = 0{,}01\cdot 5 / 300 = 1{,}67\cdot 10^{-4}$ [Wb] = 167 [μWb]
b) $e = -L\,dI / dt = -0{,}01\cdot[(-5) - 5] / 0{,}008 = 12{,}5$ V.

8.28. ---- a)$L_m = N_1N_2\mu S_2 / l_1 = 1\,500\cdot 500\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 20\cdot 10^{-4} / 60\cdot 10^{-2} = 3{,}14\cdot 10^{-3}$ [H] = 3,14 [mH]
b) $e_2 = -N_2\,d\Phi_{12} / dt = -L_{12}\,dI_1 / dt = 3{,}14\cdot 10^{-3}\cdot 250 = 0{,}785$ V.

8.29. ---- a) $R = \rho l / S$, $l = d\pi\cdot N = 0{,}01\cdot 3{,}14\cdot 1000 = 31{,}4$ m; $S = d_{Cu}^2\cdot\pi / 4 = (0{,}5\cdot 10^{-3})^2\cdot 3{,}14 / 4 = 0{,}196\cdot 10^{-6}$
$S = 0{,}196\ mm^2 \Rightarrow R = 0{,}0175\cdot 31{,}4 / 0{,}196 = 2{,}8\ \Omega$
b) $L = N^2\,\Lambda = N^2\,\mu\,S / l = 10^6\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot S / l$; $S = 0{,}01^2 3{,}14 / 4 = 7{,}85\cdot 10^{-5}\ m^2 \Rightarrow$
$L = 12{,}56\cdot 10^{-1}\cdot 7{,}85\cdot 10^{-5} / 1 = 98{,}6\cdot 10^{-6}$ [H] = 98,6 [μH].
c) $e = -L\,dI / dt = -L\cdot(\,I'' - I'\,) / dt = 98{,}6\cdot 10^{-6}\cdot 10^4 = 0{,}986$ V. Kako se nezna da li struja raste ili opada, nije poznat ni predznak ems. e.
d) $e \pm I\,R - U_{12} = 0 \Rightarrow U_{12} = e \pm I\,R = 0{,}986 \pm 1\cdot 2{,}8$
Ako je tačka 1 na većem potencijalu, I ems e tera struju ka njoj $\Rightarrow U_{12} = 0{,}986 - 2{,}8 = -1{,}814\ V = -U_{21} \Rightarrow$ $U_{21} = 1{,}814$ V, i obrnuto $\Rightarrow U_{12} = 0{,}986 + 2{,}8 = 3{,}786$ V

8.30. ---- $L = N\,d\Phi / dI$; $d\Phi = (B_2 - B_1)\cdot S = (\,1{,}4 - 1\,)\cdot 20\cdot 10^{-4} = 8\cdot 10^{-4} \Rightarrow L = 10^3\cdot 8\cdot 10^{-4} / (\,9 - 4\,)$
$L = 0{,}16$ H.
$e = -L\,dI / dt = -0{,}16\cdot(\,4 - 9\,) / 0{,}05 = 16$ V.

8.31. ---- a) Ako struja u prvom kalemu od 5 A ostvari magnetna fluks od 0,05 mWb, tada će struja od 6 A ostvariti magnetni fluks od 0,05·6 / 5 = 0,06 mWb (fluks je srazmeran sa svojom strujom $\Phi = IN\Lambda = k\,I$), tj. na svaki amper struje pripada fluks od 0.01 mWb.
Induktivna povezanost govori koliki je magnetni fluks jednog kalema na drugi i obrnuto. Ako je k = 60%, to znači da će magnetni fluks prvog kalema sa 60 procenata obuhvatiti drugi kalem (i obrnuto). Dakle, sledi da se fluks prvog kalema menja od 0,06 mWb pa do – 6 mWb, tj. $d\Phi_1 = \Phi_1'' - \Phi_1' = (-60 - 60) \Rightarrow$
$d\Phi_1 = -120\ \mu Wb = -0{,}12$ mWb. Od ovog fluksa 60% prolazi kroz drugi kalem, pa sledi: $d\Phi_{12}' = 0{,}6\cdot 0{,}12 \Rightarrow$
$d\Phi_{12}' = 0{,}072$ mWb.
Konačno, $e = -N\,d\Phi_{12}' / dt = -10^3\cdot(\,-0{,}072\cdot 10^{-3}\,) / 0{,}01 = 7{,}2$ V (pozitivna ems jer fluks opada).

b) $L_m = N_2\,d\Phi_{12}' / dI_1 = 10^3\cdot 0{,}072\cdot 10^{-3} / 12 = 0{,}006$ H = 6 mH

c) $L_1 = N_1\,\Phi_1 / I_1 = 1000\cdot 0{,}05\cdot 10^{-3} / 5 = 0{,}01$ H = 10 mH;
$L_m^2 = L_1L_2 \Rightarrow L_2 = L_m^2 / k^2\,L_1 = 6^2 / 0{,}6^2\cdot 0{,}01 = 0{,}01$ H = 10 mH. Ovo rešenje je logično, jer su kalemovi identični ($L_1 = L_2 = 10$ mH).

8.32. ---- a) $L_m = N_1 N_2 \mu S_{min} / l_{max}$, ova se formula koristi kod približnog računanja međusobne induktivnosti.
Kada bi magnetno kolo bilo savršeno (nema magnetnog rasipanja) $\Rightarrow L_m^2 = L_1L_2 = (N_1^2 \mu S_1 / l_1)\cdot(N_2^2 \mu S_2 / l_2)$.
Kako je rasipanje prisutno kod približnog računajna uzima se uvek manja površina (S_{min}), a iz istog razloga veća dužina (l_{max}). $\Rightarrow S_{min} = 0{,}01^2\cdot\pi = 3{,}14\cdot10^{-4}$ m^2 $\Rightarrow$

$L_m = 500\cdot1500\cdot12{,}56\cdot10^{-7}\cdot3{,}13\cdot10^{-4} / 1 = 0{,}197\cdot10^{-3}$ H = 0,197 mH.

b) $L_1 = N_1^2\,\Lambda_1 = N_1^2\mu\, S_1 / l_1 = 500^2\cdot12{,}56\cdot10^{-7}\cdot3{,}13\cdot10^{-4} / 1 = 0{,}0986\cdot10^{-3}$ H = 0,0986 mH;
$L_2 = N_2^2\,\Lambda_2 = N_2^2\,\mu\, S_2 / l_2 = 1000^2\cdot12{,}56\cdot10^{-7}\cdot0{,}03^2\cdot3{,}14 / 1 = 3{,}55\cdot10^{-3}$ H = 3,55 mH
Ako se fluksevi potpomažu tada je uzajamna induktivnost oba kalema (ukupna) jednaka:
$L_m' = L_1 + L_2 + 2\cdot L_m = 0{,}0986 + 3{,}55 +2\cdot0{,}197 = 4{,}04$ mH
a ako se fluksevi međusobno suprostavljaju sledi:
$L_m'' = L_1 + L_2 - 2\cdot L_m = 0{,}0986 + 3{,}55 - 2\cdot0{,}197 = 3{,}25$ mH.

8.33. ..... 186 V..... **8.34**.... 50 mH. **8.35**.... 4 puta. **8.36**.... 0,04 H.

8.37. ..... $L_m = N_1N_2\mu S / l = 0{,}302$ H; $\Rightarrow$ $e_2 = - L_m(I_2 - I_1) / dt = - 0{,}302\cdot(0 - 10) / 0{,}01 = 302$ V.

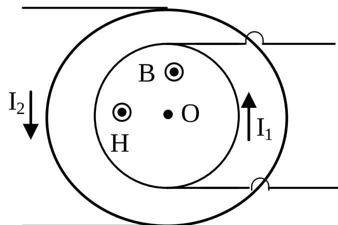
8.38. .... a) $L = N^2\mu S / l = N^2\cdot(B/H)\cdot S / l = 0{,}0796$ H
b) $IN = Hl' + H_ol_o = Hl' + Bl_o / \mu_o$, $l' = l - l_o = d\pi - l_o = 50\cdot\pi - 0.01 = 156$ cm.
$500\ I = 4\ 000\cdot1{,}56 + 1\cdot0{,}01 / 123{,}56\cdot10^{-7} = 6\ 240 + 7\ 961{,}8 \Rightarrow I = 28{,}4$ A.

8.39. .... $L_m = N_1N_2\mu\, S_{min} / l_{max} = N_1N_2\mu\, S_1 / l = 0{,}887$ mH.
$L_1 = N_1^2\,\mu\, S_1 / l_1 = 0{,}887$ mH.
$L_2 = N_2^2\,\mu\, S_2 / l_2 = 3{,}55$ mH.
Kako je $L_m^2 = k^2\cdot L_1\cdot L_2 \Rightarrow k^2 = L_m^2 / L_1L_2 = 0\text{-},887^2 / 0{,}887\cdot3{,}55 \Rightarrow k = 0{,}5$.

8.40. .... $L_m^2 = k^2L_1L_2 = 1\cdot25\cdot44 = 1\ 100 \Rightarrow L_m = 33{,}17$ mH.
$L'' = L_1 + L_2 + 2L_m = 25 + 44 + 66{,}34 = 135{,}3$ mH.
$L' = L_1 + L_2 - 2L_m\ 25 + 44 - 66{,}34 = 2{,}7$ mH.

8.41. ---- $L' = L_1 + L_2 + 2L_m \Rightarrow 0{,}6 = 0{,}2 + L_2 + 2L_m$
$L'' = L_1 + L_2 - 2L_m \Rightarrow \underline{0{,}1 = 0{,}2 + L_2 - 2L_m}$
$0{,}7 = 0{,}4 + 2L_2 \Rightarrow L_2 = 0{,}15$ H.
$2L_m = L' - L_1 - L_2 = 0{,}6 - 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}25 \Rightarrow L_m = 0{,}125$ H.
$k^2 = L_m^2 / L_1L_2 = 0{,}125^2 / 0{,}15\cdot0{,}2 \Rightarrow k = 0{,}72$.

8.42. -----



Usvojimo smerove struja, kao na slici. Ako pretpostavimo da je struja prisutna samo u unutrašnjem solenoidu, tada magnetsko polje postoji samo u feromagnetskom jezgru. To polje je homogeno i ima jačinu:

$$H_1 = \frac{I_1N_1}{l}$$, gde je I_1 jačina struje prvog solenoida.

Sopstvena induktivnost prvog solenoida je:

$$L_1 = N_1^2\cdot\mu\frac{S}{l} = \frac{\mu_o\mu_r a_1^2\pi\cdot N_1^2}{l}$$

Međusobna induktivnost između prvog i drugog solenoida iznosi:

$$L_{12} = N_1N_2\mu\frac{S}{l} = \frac{\mu_o\mu_r a_1^2\pi\cdot N_1N}{l}$$

Pretpostavimo da se struja nalazi samo u spoljašnjem solenoidu, čija je jačina jednaka I_2 ($I_1 = 0$), magnetsko polje je prisutno u celoj unutrašnjosti prvog solenoida. I ovo polje je homogeno i iznosi:

$$H_2 = \frac{I_2 N_2}{l},$$

Magnetska indukcija u jezgru je $B_2 = \mu_o\mu_r \cdot H_2$, dok je u vazdušnom delu $B_{2o} = \mu_o \cdot H_2$, pa je sopstvena induktivnost drugog kalema:

$$L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{N_2\left[B_2 \cdot a_1^2\pi + B_{20}\cdot\left(a_2^2\pi - a_1^2\pi\right)\right]}{I_2} = \frac{N_2\left[\mu_o\mu_r H_2 \cdot a_1^2\pi + \mu_o H_2\left(a_2^2\pi - a_1^2\pi\right)\right]}{I_2} \Rightarrow$$

$$L_2 = \frac{\mu_o N_2 H_2 \pi\left[\mu_r a_1^2 + a_2^2 - a_1^2\right]}{I_2} = \frac{\mu_o N_2 \cdot \frac{I_2 N_2}{l}\pi\left[(\mu_r - 1)\cdot a_1^2 + a_2^2\right]}{I_2} = \frac{\mu_o N_2^2 \pi\left[(\mu_r - 1)\cdot a_1^2 + a_2^2\right]}{l}$$

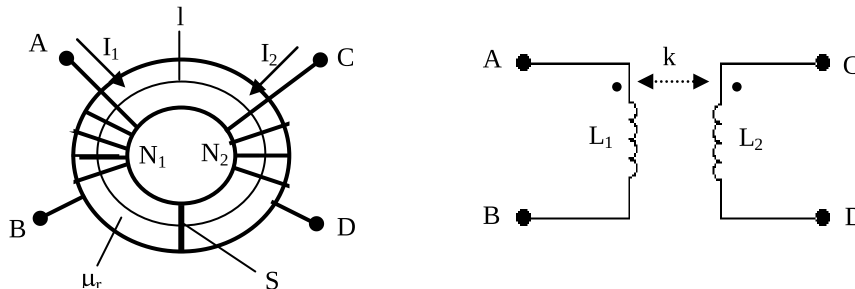
Koeficijent sprege je:

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{\frac{\mu_o\mu_r N_1 N_2 a_1^2 \pi}{l}}{\sqrt{\frac{\mu_o\mu_r N_1^2 a_1^2\pi}{l}\cdot\frac{\mu_o N_2^2\pi\left[(\mu_r - 1)\cdot a_1^2 + a_2^2\right]}{l}}} = \frac{\frac{\mu_o\mu_r N_1 N_2 a_1^2\pi}{l}}{\mu_o a_1 N_1 N_2 \pi\sqrt{\frac{\mu_r(\mu_r - 1)a_1^2 + a_2^2}{l^2}}} \Rightarrow$$

$$k = \frac{\mu_r a_1}{\sqrt{\mu_r(\mu_r - 1)\cdot a_1^2 + a_2^2}} = \frac{\mu_r a_1}{\sqrt{\mu_r^2 a_1^2 - \mu_r a_1^2 + \mu_r a_2^2}} = \frac{\mu_r a_1}{\sqrt{\mu_r^2 a_1^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu_r} + \frac{a_2^2}{\mu_r a_1^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_r - 1 + \frac{a_2^2}{a_1^2}}{\mu_r}}} \Rightarrow$$

$$k = \sqrt{\frac{\mu_r}{\mu_r - 1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}}$$

8.43. -----



Na prvoj slici je predstavljen torus, sa usvojenim smerom namotavanja namotaja, a samim tim i smer struje I_2, je po Lencovom pravilu, u naznačenom smeru. Prema ovoj slici, sopstvena induktivnost (samoindukcija) i međusobna induktivnost iznosi:

$$L_1 = \frac{\mu_o\mu_r S}{l} N_1^2; \quad L_2 = \frac{\mu_o\mu_r S}{l} N_2^2 \quad \text{i} \quad L_{12} = \frac{\mu_o\mu_r S}{l} N_1 N_2.$$

Kako kod ovog magnetnog kola nema magnetnog rasipanja, koeficijent sprege iznosi $k = 1$.
Druga slika predstavlja električnu šemu magnetno spregnutih kola.

9.1.1 ----- 0,5 J; **9.1.2.** ----- 0,5 J; **9.1.3.** ----- 4 J; **9.1.4.** ----- 3,6 J/m^3; **9.1.5.** ----- 7,73 J/m^3;

9.1.6. ----- 0,1 J/m^3; **9.1.7.** ----- 550 J/m^3;

9.1.8. ---- $e = -N\, d\Phi / dt = -L\, dI / dt \Rightarrow L = -e\, dt / dI = (-10)\cdot 0{,}2 / (-0{,}6) = 10/3$ H.
$W_m = L I^2 / 2 = 0{,}6$ J.

9.1.9. ---- $W_m = 3{,}375$ J.

9.1.10. ---- $L = N \Phi_1 / I = 100\cdot 0{,}01 / 2 = 0{,}5\ H \Rightarrow W_m = L I^2 / 2 = 1$ J.

9.1.11. ---- $W_m = M \Phi /2 = IN\cdot BS / 2 = Hl\cdot BS / 2 = B\cdot H \cdot V /2 \Rightarrow W_m/V = B\cdot H / 2 = B^2 / 2\mu$.
$B = \Phi/S = 1\ T \Rightarrow W_m = 76{,}92\ J/m^3$.

9.1.12 ----- 1,7; odnosno 0,78 J.

9.1.13. ---- $W_m = L I^2 / 2 \Rightarrow L = 2 W_m / I^2 = 5{,}3$ mH
$L = N \Phi / I \Rightarrow \Phi = L I / N = 39{,}6\cdot 10^{-6}$ Wb.
$B = \Phi / S = 39{,}6 / 2\cdot 10^{-2}\cdot 12\cdot 10^{-2} = 1{,}65\cdot 10^{-2}$ T.
$W_m = M \Phi / 2 \Rightarrow M = 2\cdot W_m / \Phi = 19\,191{,}92$ A.
$M = I N = H l + H_o l_o \Rightarrow 19\,191{,}92 = H\cdot(d\pi - l_o) + B_o\cdot b / \mu_o = H\cdot 1{,}921 + 157{,}64 \Rightarrow$
$H = 9\,908{,}5$ A/m.
$\mu = B / H = 16{,}6\cdot 10^{-7}\ H/m \Rightarrow \mu_r = \mu / \mu_o = 1{,}32$.

9.1.14.----- smanji se dva puta.

9.1.15. ---- Kako struje u kalemovima stvaraju međusobno suprotne magnetne flukseve, ukupni fluks je jednak njihovoj razlici, a ukupna induktivnost kola jednaka je:$L = L_1 + L_2 - 2L_m = 2 + 4 - 2 = 4$ mH.
$W_m = L I^2 / 2 = 2$ mJ.

9.1.16. ---- $W_m = L I^2 / 2 = N^2 \Lambda I^2 / 2 = \mu S N^2 I^2 / 2 = 0{,}01$ J

9.1.17. ---- $W_o = B\cdot H\cdot V / 2 = B^2\cdot V / 2\mu_o = 1{,}9^2\cdot 0{,}02\cdot 0{,}027\cdot 0{,}001 / 2\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7} = 0{,}775$ J.

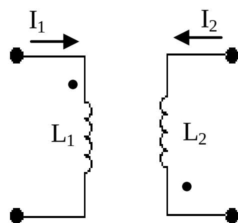
9.1.18. ---- $W_o = B^2\cdot V / 2\mu = B^2\cdot S\cdot d / 2\mu \Rightarrow d = 2\mu\cdot W_o / B^2\cdot S = 0{,}005$ m = 5 mm.

9.1.19. ---- a) $L_A = L_1 + L_2 - 2L_m$; $L_m^2 = k^2 L_1 L_2 = 3\cdot 12 = 36 \Rightarrow L_m = 6$ m H,
$L_A = 3 + 12 + 2\cdot 6 = 27\ mH \Rightarrow W_{mA} = L_A I^2 / 2 = 27\cdot 10^{-3}\cdot 2^2 / 2 = 54\cdot 10^{-3}\ J = 54$ mJ.
b) $L_B = L_1 + L_2 - 2L_m = 3\ mH \Rightarrow W_{mB} = LI^2 / 2 = 6$ mJ.

9.1.20. ---- $H = IN / l = 2\cdot 314 / 0{,}25\cdot\pi = 200 / 0{,}25 = 800$ A/m.
$B = \Phi / S = 1{,}5\cdot 10^{-4} / 2{,}5\cdot 2\cdot 10^{-4} = 0{,}3$ T.
$W_m/V = B H / 2 = 800\cdot 0{,}3 / 2 = 120\ J/m^3$.

9.1.21. ---- $l = 2R\pi = 0{,}628$ m, $H = IN / l = 0{,}1\cdot 500 / 0{,}628 = 79{,}62$ A/m.
$V = S\cdot l = 0{,}628\cdot 10^{-4}\ m^3$,
Kako je gustina energije u torusu ujedno i magnetna energija , koja se utroši za namagnetisanje jezgra (koja nastaje samo pri promeni fluksa) , i ona iznos : $W_m/V = BH / 2 = \mu H^2 / 2 \Rightarrow$
$W_m/V = 4\cdot 10^3\cdot 12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 79{,}62^2 / 2 = 15{,}92\ J/m^3$.
Ukupna energija magnetnog polja je jednaka: $W_m = (W_m/V)\cdot V = 15{,}92\cdot 0{,}628\cdot 10^{-4} \cong 10\cdot 10^{-4} \Rightarrow$
$W_m = 1$ mJ.

9.1.22. ----



Međusobna induktivnost spregnutih kola, prema slici, iznosi:

$$L_{12} = -k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = -0{,}5 \cdot \sqrt{1 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = -10^{-3}[\mathrm{H}] = -1[\mathrm{mH}].$$

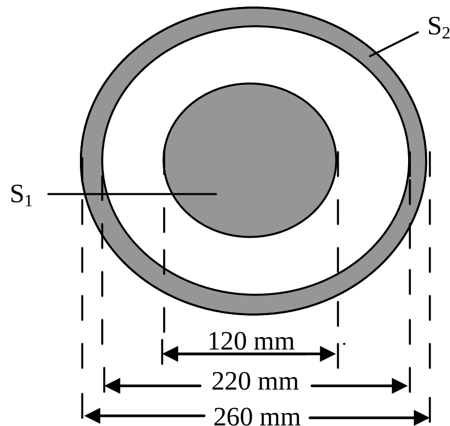
Magnetska energija ovih kontura je:

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^{\,2} + \frac{1}{2}L_2 I_2^{\,2} + L_{12} I_1 I_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} + (-1) \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$W_m = 2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{J}] = 2\ [\mathrm{mJ}].$$

9.2.1. ---- $F = B^2 \cdot 2S / 2\mu_o = B^2 S / \mu_o = 1 \cdot 200 \cdot 10^{-4} / 12{,}56 \cdot 10^{-7} = 15\,924$ N.

9.2.2. ----



$S = S_1 + S_2 = 0{,}060^2\pi + (0{,}13^2 - 0{,}11^2)\,\pi \Rightarrow$
$S = (0{,}0036 + 0{,}0169 - 0{,}0121) \cdot 3{,}14$
$S = 0{,}026376 \text{ m}^2 = 26376 \text{ mm}^2$
$F = B^2 S / 2\mu_o = 0{,}85^2 \cdot 0{,}026376/2 \cdot 12.56 \cdot 10^{-7}$
$F = 7\,586{,}25$ N

9.2.3. ---- $H = IN / l = 2\,500$ A/m. $\Rightarrow$ $B = 0{,}64$ T, iz krive magnećenja.
$F = B^2 \cdot S / 2\mu_o = 0{,}64^2 \cdot 16 \cdot 10^{-4} / 2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} = 261$ N.

9.2.4. ---- $S_1 = 0{,}2^2 \cdot \pi = 0{,}1256 \text{ m}^2$, $S_2 = 0{,}36^2 \cdot \pi - 0{,}3^2 \cdot \pi = (0{,}1296 - 0{,}09) \cdot \pi = 0{,}1243 \text{ m}^2$
$S = S_1 + S_2 = 0{,}1256 + 0{,}1243 = 0{,}25 \text{ m}^2$
$F = B^2 \cdot S / 2\mu_o \Rightarrow B^2 = F \cdot 2 \cdot \mu_o / S = 0{,}296 \Rightarrow B + 0{,}54 \text{ T} \Rightarrow H = 140$ A/m (iz krive magnećenja).
Srednja dužina magnetnih linija jednaka je: $l = 2 \cdot (140 + 100) + 4 \cdot 60 \cdot \pi / 4 = 480 + 188.4 = 668{,}4$ mm.
$H = I N / l \Rightarrow N = H \cdot l / N = 140 \cdot 0{,}6684 / 1{,}5 \cong 63$ navojka.

9.2.5. ---- $F = m \cdot g = 200 \cdot 9{,}81 = 1962$ N
$S = 40 \cdot 60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 2\,400 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$
$F = B^2 \cdot 2S / 2\mu_o = B^2 \cdot S / \mu_o \Rightarrow B^2 = F \cdot \mu_o / S = 1{,}027 \Rightarrow B = 1{,}01$ T
$H = 320$ A /m (iz krive magnećenja)
$I N = H l_1 + H l_2 + 2 H_o l_o$, $l_1 = 2 \cdot 80 + 120 + 2 \cdot 40 \cdot \pi / 4 = 280 + 62{,}8 = 342{,}8$ mm
$l_2 = 100 + 2 \cdot 40 \cdot \pi / 4 = 120 + 62{,}8 = 182{,}8$ mm
$H_o = B / \mu_o = 0{,}54 / 12{,}56 \cdot 10^{-7} = 804\,140$ A/m.
$I N = 320 \cdot 0{,}3428 + 320 \cdot 0{,}1828 + 2 \cdot 804\,140 \cdot 0{,}001 = 1\,776{,}26 \Rightarrow I = 1\,776{,}26 / N = 2{,}96$ A.

Da bi se kotva održavala na rastojanju od 0,1 cm, potrebna je jačina struje od 2,96 A. Ako je struja veća od 2,96 A kotva će biti privučena. Kada je kotva privučena, $l_o = 0$, pa sledi: $I N = H l_1 + H l_2 \Rightarrow$ $I \cdot 600 = 320 \cdot 0{,}343 + 320 \cdot 0{,}183 = 168{,}32 \Rightarrow I = 0{,}28$ A . Dakle, privučenu kotvu u takvom stanju održava struja od 0,28 A.

9.2.6.----- 0,587 T

9.2.7. ---- a) $F = B^2 S / 2\mu_o = 0{,}64^2 \cdot 2 \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}018 / 2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} = 86{,}8$ N.
b) $B^2 = 2\mu F / S = 2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 117{,}72 / 2 \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}018 = 0{,}548 \Rightarrow B = 0{,}74$ T.

9.2.8. ---- $B = 0{,}496$ T, $\Phi = B / S = 0{,}12$ mWb.

9.2.9. ---- $B^2 = 2\mu_o F / S = 4{,}61 \cdot 10^{-2} \Rightarrow B = 0{,}215$ T, $\Phi = B\,S = 0{,}215 \cdot (1{,}75/2)^2 \cdot 10^{-4}\pi = 5{,}16 \cdot 10^{-5}$ Wb.
$L = N \cdot \Phi / I = 18\,000 \cdot 5{,}16 \cdot 10^{-5} / 30 \cdot 10^{-3} = 31$ H.

9.2.10. ---- $F = B^2 S / 2\mu_o$, $F_1 = B_1^2 S_1 / 2\mu_o$, $S_1 = 2 S_2 \Rightarrow B = 2 B_1$, odnosno $B_1 = B / 2$ ($B \sim 1/ S$) $\Rightarrow$
$F_1 = [(B/2)^2 \cdot 2 \cdot S] / 2\mu_o = B^2 \cdot S / 2 \cdot 2\mu_o = F / 2$.
Sila će se smanjiti dva puta.

9.2.11. ---- $F = B^2 \cdot 2S / 2\mu_o \Rightarrow B = 0{,}608\ T \Rightarrow H = 75\ A/m,\ H_2 = 140\ A/m$ (iz krive magnećenja)
$IN = H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_o l_o,\ l_1 = d\pi / 2 = l_2 = 0{,}3 \cdot 3{,}14 / 2 = 0{,}471\ m,$
$H_o = B_o / 12{,}56 \cdot 10^{-7} = 484\ 076\ A/m.$

$1000\ I = 75 \cdot 0{,}471 + 140 \cdot 0{,}471 + 2 \cdot 484\ 076 \cdot 0{,}001 = 35{,}325 + 65{,}94 + 968{,}152 = 1\ 069{,}417 \Rightarrow I = 1{,}07\ A.$

9.2.12. ---- $F = B^2 \cdot 2S / 2\mu_o \Rightarrow B = 0{,}555\ T.\ \Phi = B\ S = 222\ mWb,\ H = 140\ A/m$ (iz krive magnećenja)
$I\ N = H\ l + 2H_o l_o = H \cdot d\pi + 2 \cdot l_o \cdot B / \mu_o = 140 \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}14 + 2 \cdot 441\ 875 \cdot 0{,}001 = 219{,}8 + 883{,}75 \Rightarrow$
$IN = 1\ 103{,}55\ A \Rightarrow$
$I = 1\ 103{,}55 / 3\ 000 = 0{,}37\ A \Rightarrow L = N\ \Phi / I = 3000 \cdot 222 \cdot 10^{-6} / 0{,}37 = 1{,}8\ H$

9.2.13. ---- $N\ I = H\ l \Rightarrow H = I\ N / l = 600\ A/m$ (Amperov zakon) $\Rightarrow B \cong 1{,}26\ T$ (iz krive magnećenja).
$F = B^2 \cdot 2S / 2\mu_o = 505{,}6\ N$

9.2.14. ---- $F = B^2 \cdot 2S / 2\mu_o = B^2 \cdot S / \mu_o \Rightarrow B^2 = F \cdot \mu_0 / S = 0{,}37 \Rightarrow B = 0{,}608\ T$
$H = 140\ A/m$ (iz kar. magnećenja)
$I\ N = H\ l_1 + H l_2 = 140 \cdot 0{,}5 + 140 \cdot 0{,}2 = 98\ A \Rightarrow I = 98 / N = 98 / 100 = 0{,}98\ A.$

10.1. ----- $P_H = p_h \cdot m \cdot f \cdot B_m^2$, $B_m = \Phi_m / S = 0{,}5 \cdot 10^{-3} / 25 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = 0{,}8$ T
$V = S \cdot l = 625 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 10^{-3} \cdot \pi = 157 \cdot 10^{-6}$ m^3
$m = V \cdot \wp = 157 \cdot 10^{-6} \cdot 7550 = 1{,}19$ kg (iz tabele spec. gubitaka se očita $\wp$, p_h i p_v za određenu debljinu lima) . Za lim o,35 mm $\Rightarrow$ $\wp = 7550$ kg/m^3, $p_h = 0{,}0235$ W/kgHzT^2 i $p_{vs} = 0{,}00005$ W/kgHz^{2}T^2 .
$P_H = 0{,}0235 \cdot 1{,}19 \cdot 50 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}895$ W,
$P_{VS} = p_{vs} \cdot m \cdot f^2 \cdot B_m^2 = 0{,}00005 \cdot 1{,}19 \cdot 50^2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0952$ W
$P_{Fe} = P_H + P_{VS} = 0{,}9902$ W.

10.2. ---- $S_{Fe1} = 0{,}9\ S_1 = 450$ mm^2 ; $S_{Fe2} = 0{,}9\ S_2 = 630$ mm^2 ; $V_1 = S_{Fe1}\ l_1 = 0{,}14 \cdot 450 \cdot 10^{-6} = 63 \cdot 10^{-6}$ m^3 ;
$V_2 = S_{Fe2} \cdot l_2 = 0{,}1 \cdot 630 \cdot 10^{-6} = 63 \cdot 10^{-6}$ m$^3 \Rightarrow m_1 = V_1 \wp = 63 \cdot 10^{-6} \cdot 7650 = 0{,}48$ kg, $m_2 = V_2 \cdot \wp = 0{,}48$ kg.
Sva četiri dela u magnetnom kolu imaju istu masu koja iznosi po 0,48 kg. Gubici u uspravnim delovima:
$P_{Fe\,u} = P_H + P_{VS} = p_h\, m\, f\, B_m^2 + p_{vs}\, m\, f^2\, B_{m1}^2$; $B_{m1} = \Phi_m / S_{Fe1} = 1{,}11$ T; $B_{m2} = \Phi_m / S_{Fe2} = 0{,}794$ T
$P_{Fe\,u} = 2\,(0{,}038 \cdot 0{,}48 \cdot 50 \cdot 1{,}11^2 + 0{,}00016 \cdot 0{,}48 \cdot 50^2 \cdot 1{,}11^2) = 2\,(1{,}124 + 0{,}237) = 2{,}721$ W.
Gubici u horizontalnim delovima iznose: $P_{Fe\,h} = p_h\, m\, f\, B_{m2}^2 + p_{vs}\, m\, f^2\, B_{m2}^2 \Rightarrow$
$P_{Fe\,h} = 2\,(0{,}038 \cdot 0{,}48 \cdot 50 \cdot 0{,}794^2 + 0{,}00016 \cdot 0{,}48 \cdot 50^2 \cdot 0{,}794^2) = 2\,(0{,}575 + 0{,}121) = 1{,}392$
Ukupni gubici iznose $P_{Fe} = P_{Fe\,u} + P_{Fe\,h} = 2{,}721 + 1{,}392 = 4{,}113$ W.

10.3. ---- $S_{Fe1} = 0{,}88 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0{,}88 \cdot 10^{-2}$ m^2 ; $S_{Fe2} = 0{,}88 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0{,}44 \cdot 10^{-2}$ m^2
$B_{m1} = \Phi_m / S_{Fe1} = 9 \cdot 10^{-3} / 0{,}88 \cdot 10^{-2} = 1{,}02$ T. $B_{m2} = \Phi_{m2} / S_{Fe2} = 4{,}5 \cdot 10^{-3} / 0{,}44 \cdot 10^{-2} = 1{,}02$ T

$V_1 = S_{Fe1}\, l_1 = 0{,}88 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}2 = 1{,}76 \cdot 10^{-3}$ m^3 ; $V_2 = S_{Fe2} \cdot l_2 = 0{,}44 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot (0{,}4 + 0{,}2) = 5{,}28 \cdot 10^{-3}$ m^3
$m_1 = V_1 \cdot \wp = 1{,}76 \cdot 10^{-3} \cdot 7550 = 13{,}288$ kg, $m_2 = V_2 \cdot \wp = 5{,}28 \cdot 10^{-3} \cdot 7550 = 39{,}864$ kg.
m_1 je masa srednjeg stuba, a m_2 je masa preostalog dela kola (vanjski stupci i horizontalni delovi).
$P_{Fe} = P_h + P_{VS} = p_h\, m_1\, f\, B_{m1}^2 + p_h\, m_2\, f\, B_{m2}^2 + p_{vs}\, m_1\, f^2\, B_{m1}^2 + p_{vs}\, m_2\, f^2\, B_{m2}^2 =$
$= p_h\, f\,(m_1 B_{m1}^2 + m_2 B_{m2}^2) + p_{vs}\, f^2\,(m_1 B_{m1}^2 + m_2 B_{m2}^2) = 0{,}0235 \cdot 50 \cdot (13{,}288 \cdot 1{,}02^2 + 39{,}864 \cdot 1{,}02^2) +$
$+ 0{,}00005 \cdot 50^2 \cdot (13{,}288 \cdot 1{,}02^2 + 39{,}864 \cdot 1{,}02^2) = 1{,}175 \cdot (13{,}825 + 41{,}475) + 0{,}125 \cdot (13{,}825 + 41{,}475)$
$P_{Fe} = 1{,}175 \cdot 55{,}3 + 0{,}125 \cdot 55{,}3 = 71{,}89$ W.

10.4. ---- a) $B_m = \Phi_m / S_{Fe} = 2{,}57 \cdot 10^{-3} / 23 \cdot 10^{-4} = 1{,}12$ T $\Rightarrow$ H = 190 A/m (iz krivulje magnetisanja)
$M = I\,N = H\,l = 190 \cdot 2 \cdot (0{,}12 + 0{,}08)\ 76$ A.
b) $m = S_{Fe} \cdot l \cdot \wp = 23 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 7550 = 6{,}95$ kg.
$P_{Fe} = P_H + P_{VS} = p_h\, m\, f\, B_m^2 + p_{vs}\, m\, f^2\, B_m^2 = 0{,}0235 \cdot 6{,}95 \cdot 50 \cdot 1{,}12^2 + 0{,}00005 \cdot 6{,}95 \cdot 50^2 \cdot 1{,}12^2 \Rightarrow$
$P_{Fe} = 10{,}24 + 1{,}09 = 11{,}33$ W.
c) $P_{Cu} = I^2\, R_{Cu} = 0{,}9^2 \cdot 1 = 0{,}81$ W.
d) $P = P_{Fe} + P_{Cu} = 11{,}33 + 0{,}81 = 12{,}14$ W.

10.5. ---- $p_h\, m\, f_1\, B_m^2 + p_{vs}\, m\, f_1^2\, B_m^2 = 69 \Rightarrow p_h \cdot 10 \cdot 42 \cdot 1{,}5^2 + p_{vs} \cdot 10 \cdot 42^2 \cdot 1{,}5^2 = 69$
$p_h\, m\, f_2\, B_m^2 + p_{vs}\, m\, f_2^2\, B_m^2 = 116 \Rightarrow p_{vs} \cdot 10 \cdot 60 \cdot 1{,}5^2 + p_{vs} \cdot 10 \cdot 60^2 \cdot 1{,}5^2 = 116$
$945\ p_h + 39\ 690\ p_{vs} = 69$
$1350\ p_h + 81\ 000\ p_{vs} + 116$
Rešenjen dveju linearnih jednačina sa dve nepoznate dobiju se sledeća rešenja :
$p_h = 0{,}043$ [W/kgHzT^2], $p_{vs} = 0{,}00071$ [W/kg Hz^{2}T^2].
Na frekvenciji od f = 50 Hz ukupni gubici u gvožđu iznose :
$P_{Fe} = P_{H50} + P_{VS50} = p_h\, m\, f\, B_m^2 + p_{vs}\, m\, f^2\, B_m^2 = 0{,}043 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 1{,}5^2 + 0{,}00071 \cdot 10 \cdot 50^2 \cdot 1{,}5^2$
$P_{Fe} = 39{,}938 + 48{,}375 = 88{,}313$ W.
Ukupni gubici u gvožđu po 1 kg iznose : $p_{Fe} = P_{Fe} / m = 88{,}313 / 10 = 8{,}8313$ [W/kg].

D O D A T A K

Tabela 1.

Važnije fizičke konstante

NAZIV	OZNAKA	VREDNOST I JEDINICA
Masa protona stanju umirovanja	m_P	$(1,67239 \pm 0,00004)\cdot 10^{-27}$ kg
Masa neutrona u stanju mirovanja	m_n	$(1,67470 \pm 0,00004)\cdot 10^{-27}$ kg
Masa elektrona u stanju mirovanja	m_e	$(9,10830 \pm 0,0003)\cdot 10^{-31}$ kg
Elementarno naelektrisanje	q_e	$(1,60210 \pm 0,00007)\cdot 10^{-19}$ C
Dielektrična konstanta vakuuma	ε_o	$(8,85419 \pm 0,00002)\cdot 10^{-12}$ F/m
Magnetna permeabilnost vakuuma	μ_o	$4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m
Brzina proticanja elektromagnetnih talasa u vakuumu	c_o	$(2,997925 \pm 0,000003)\cdot 10^{8}$ m/s

Tabela 2.

Relativna dielektrična konstanta nekih dielektrika (orijentacione vrednosti)

MATERIJAL	ε_r	MATERIJAL	ε_r
Vazduh (1 atm)	1,0006	Guma (razne vrste)	2 – 3,5
Transformatorsko ulje	2,2 – 2,4	Polivinilhlorid	3 – 4
Staklo (razne vrste)	3,5 – 15	Liskun	4 – 7
Parafin	2,2 – 2,3	Glicerin (15°C)	56
Parafinisano drvo (hrast)	4,5 – 5	Alkohol	28,4
Papir	2,5 – 3,5	Čista voda (20°C)	80,0
Papir u ulju	3,5 – 4	Čista voda (0°C)	88,0
Pertinaks	5 – 8	Led (– 5°C)	2,85

Tabela 3.

Dielektrična čvrstoća nekih dielektrika (orijentacione vrednosti)

MATERIJAL	ČVRSTOĆA [KV/mm]	MATERIJAL	ČVRSTOĆA [KV/mm]
Vazduh	2,5 – 3	Guma	20 – 40
Staklo	10 – 40	Polivinilhlorid	40 – 60
Porculan	20	Papir	20
Transformatorsko ulje	15	Papir u ulju	50

Tabela 4.

Specifična električna otpornost i temperaturni koeficijent za neke čiste metale (na 0°C)

METAL	Specifični električni otpor ρ [$\Omega mm^2/m$]	Temperaturni koeficijent α [1/°C]	Opseg temperatore za koju važe proračuni
Aluminijum	0,0262	$4{,}46 \cdot 10^{-3}$	– 80 do + 400
Bakar	0,01588	$4{,}27 \cdot 10^{-3}$	– 80 do + 400
Cink	0,0564	$3{,}468 \cdot 10^{-3}$	– 80 do + 400
Gvožđe	0,0853	$7{,}257 \cdot 10^{-3}$	0 do + 600
Kalaj	0,1048	$4{,}359 \cdot 10^{-3}$	– 80 do + 230
Nikal	0,0693	$5{,}44 \cdot 10^{-3}$	– 80 do + 100
Olovo	0,198	$3{,}955 \cdot 10^{-3}$	– 80 do + 320
Platina	0,0983	$3{,}981 \cdot 10^{-3}$	– 80 do + 1100
Srebro	0,01505	$3{,}89 \cdot 10^{-3}$	–80 do + 400
Volfram	0,05	$5{,}238 \cdot 10^{-3}$	– 80 do + 3300
Zlato	0,0219	$3{,}65 \cdot 10^{-3}$	– 80 do 1000
Živa	0,9407	$0{,}91 \cdot 10^{-3}$	– 30 do + 300

Tabela 5.

Specifična električna otpornost i temperaturni koeficijent za važnije legure (na 0°C).
Svi podaci važe za temperatorni opseg između – 50°C i + 900°C.

LEGURA	ρ [$\Omega mm^2/m$]	α [1/°C]
Hromonikal (60%Ni; 12%Cr; 28%Fe)	1,37	$2 \cdot 10^{-7}$
Konstantan (60%C_u; 40% Ni)	0,49	$\pm 1 \cdot 10^{-5}$
Manganin (84%Cu; 12%Mn; 4%Ni)	0,42	$2 \cdot 10^{-5}$
Mesing (60%C_u; 40%Cn)	0,075	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$
Nihrom (80%Ni; 20%Cr)	1	$4 \cdot 10^{-4}$
Nikelin (55%Cu; 25%Ni; 20% Zn)	0,45	$3 \cdot 10^{-4}$
Reotan (53%Cu; 25%Ni; 17%Zn; 5%Fe)	0,525	$4 \cdot 10^{-4}$

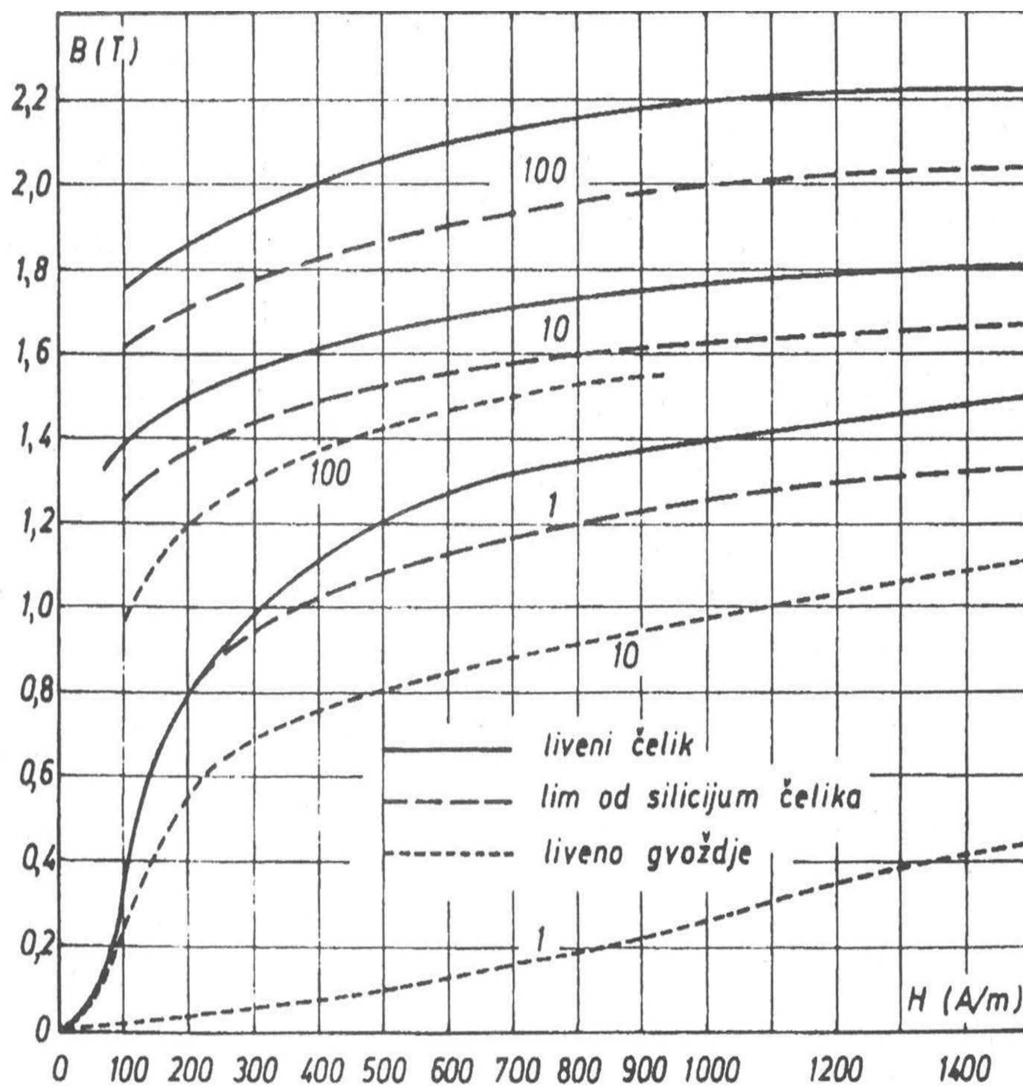
Tabela 6.

Orijentacione minimalne vrednosti specifične otpornosti nekih dielektrika

DIELEKTRIK	ρ [$\Omega mm^2/m$] pri relativnoj vlažnosti		DIELEKTRIK	ρ [$\Omega mm^2/m$] pri relativnoj vlažnosti	
	0 %	70%		0 %	70 %
Bakelit	10^{12}	10^{6}	Parafin	10^{11}	10^{11}
Ćilibar	10^{11}	10^{11}	Polivinilhlorid - meki	10^{3}	10^{3}
Drvo	10^{5}	1	Polivinilhlorid - tvrdi	10^{5}	10^{5}
Ebonit	10^{7}	10^{7}	Prešpan	10^{6}	10
Fibra	10^{6}	1	Staklo	10^{6}	10^{6}
Kvarc	10^{11}	10^{11}	Šelak	10^{7}	10^{6}
Liskun	10^{6}	10^{5}	Transformatorsko ulje	10^{5}	10^{5}
Mramor	10^{4}	1			

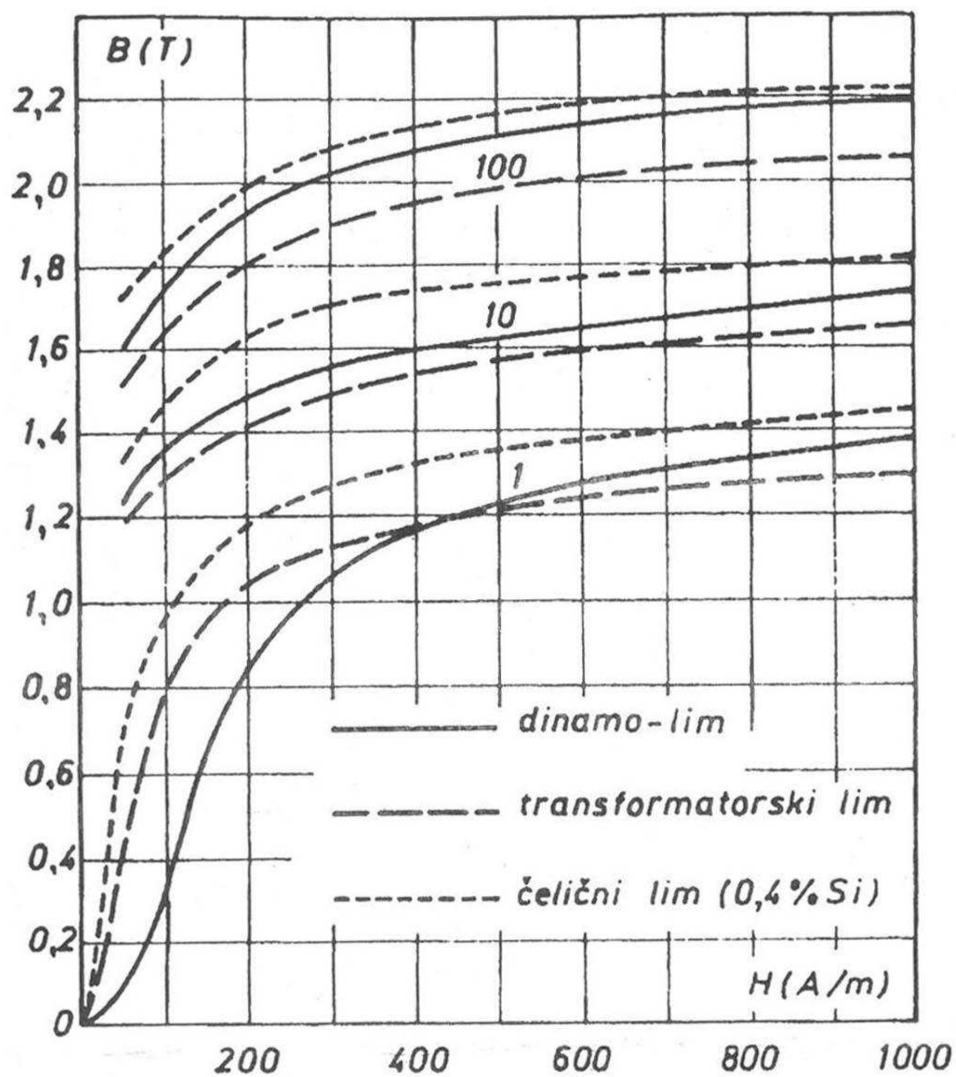
Karakteristika magnetisanja silicijum – čelika, livenog čelika i livenog gvožđa.

Jačinu magnetnog polja očitanu na H osi treba pomnožiti koeficijentom 1, 10 ili 100, koji je naznačen uz krivu.



Karakteristika magnetisanja dinamo – lima, transformatorskog lima i čeličnog lima sa 0,4 % silicijuma.

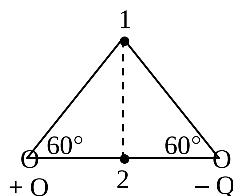
Jačinu magnetnog polja očitanu na H osi treba pomnožiti sa koeficijentom 1, 10 ili 100 što je naznačeno na krivoj.



RAZNI ZADACI

(SA ŠKOLSKIH, REGIONALNIH I REPUBLIČKIH TAKMIČENJA)

1.



U kakvom su odnosu, prema slici, jačine električnih polja u tačkama 1 i 2 ($\frac{E_1}{E_2} = ?$) ?

Zaokružiti tačno rešenje i detaljno obrazložiti.

1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{8}$; 5) $\frac{1}{16}$.

(Školsko takmičenje «*M. Pupin» Novi Sad; 2001 god.)*

2. Data su dva pločasta kondenzatora istih dimenzija. Kondenzatori imaju dva sloja dielektrika koji su raspoređeni kako je prikazano na slici ($\varepsilon_r >$). Oba kondenzatora su priključena na isti napon.



1) Koji od kondenzatora prima veću količinu naelektrisanja ?
2) Koji od kondenzatora ima veći kapacitet ?
3) U kojem kondenzatoru će polje u tački T biti jače ?

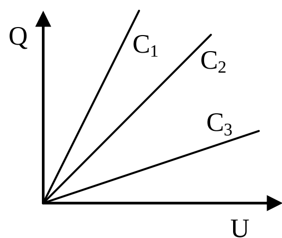
Uz obrazloženje zaokružiti tačno rešenje.

Ponuđena rešenja:

1) a) A; b) B; c) ne može se odrediti; d) oba su iste količine naelektrisanja.
2) a) A; b) B; c) oba imaju isti kapacitet.
3) a) A; b) B; c) ne može se odrediti; d) u oba kondenzatora u tački T polje je isto.

(Školsko takmičenje «*M. Pupin» Novi Sad; 2001 god.)*

3.



Kondenzatori kapacitivnosti C_1, C_2 i C_3 čine karakteristike Q = f (U), prema slici. Ako su kondenzatori vezani paralelno odrediti na kojem će biti najveća količina naelektrisanja.

Ponuđena rešenja:

a) C_1; b) C_2; c) C_3; d) svi su istog naelektrisanja.

(Školsko takmičenje «*M. Pupin» Novi Sad; 2001 god.)*

4. Ista količina naelektrisanja se prenese na malu i na veliku metalnu kuglu (loptu). U blizini koje lopte (uz samu površinu) će biti jače električno polje ?

Ponuđena rešenja: a) male; b) velike; c) ista jačina polja; c) nije moguće dati odgovor.

Uz zaoukruženo rešenje odgovor detaljno obrozložiti.

(Školsko takmičenje: Bačka Palanka*; 2002 god.)*

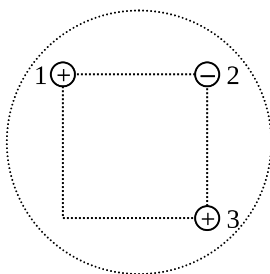
5. Dva tačkasta naelektrisanja od 16 nC i 1 nC nalaze se na rastojanju od 10 cm. Koliki rad treba izvršiti da bi se ta dva naelektrisanja približila na 4 cm ? Da li rad vrši sila električnog polja ili neka spoljna sila ?

(Školsko takmičenje «*N. Tesla*» *Beograd; 2002 god.)*

6. Naelektrisano telo ima potencijal od 100 V, a ako mu naknadno dodamo naelektrisanje od q = +10 nC potencijal mu poraste na 105 V. Koliko naelektrisanje mu nakon toga treba dovesti da bi se telo potpuno razelektrisalo ?

(Školsko takmičenje «*N. Tesla*» *Beograd; 2002 god.)*

7.



Koliki je fluks električnog polja kroz zamišljenu zatvorenu sfernu površinu koja obuhvata sva tri naelektrisanja, prema datoj slici ?

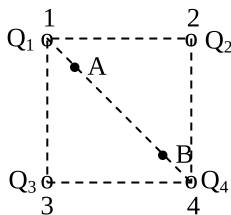
Brojni podaci:
$Q_1 = Q_3 = -Q_2 = 1$ nC.

(Školsko takmičenje «*N. Tesla*» *Beograd; 2000 god.)*

8. U dva temena jednakostraničnog trougla dovedena su ista tačkasta naelektrisanja $q_1 = q_2 = 1$ nC. Koliko naelektrisanje q_3 treba dovesti u težište trougla, da bi potencijal u trećem temenu bio nula u odnosu na beskonačnost ?

(Školsko takmičenje «*N. Tesla*» *Beograd; 2001 god.)*

9.



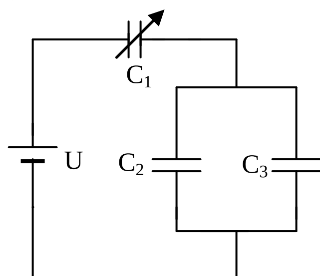
Četiri tačkasta naelektrisanja istog predznaka i inteziteta smeštena su u temenima kvadrata stranice a, kao na slici.

Idući od tačke A ka tačci B jačina električnog polja :
a) raste; b) opada; c) ostaje ista; d) opada a zatim raste
e) raste a zatim opada.

Uz potrebno objašnjenje zaokružiti tačno rešenje.

(Školsko takmičenje *«Mihajlo Pupin» Novi Sad; 2003.*)

10.

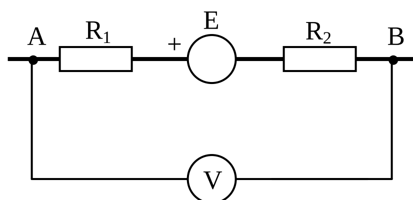


Kako i za koliko će se promeniti energija na kondenzatoru kapaciteta C_3 ako se C_1 udvostruči ?

Brojni podaci: $C_1 = C_2 = C_3 = C$

(Školsko takmičenje *«Mihajlo Pupin» Novi Sad; 2003.*)

11.

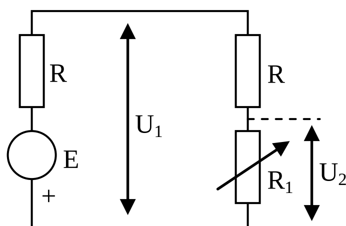


Voltmetar priključen na jednu granu električne mreže meri napon $U_V = 0$ V. Kolika je struja u toj grani ?

Brojni podaci:
$E = 16$ V; $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = 3\ \Omega$.

(Školsko takmičenje «*M. Pupin» Novi Sad; 2001 god.)*

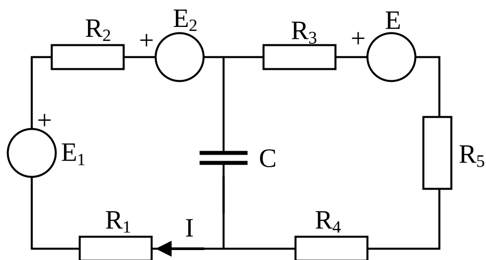
12.



U kolu na slici vrednost otpornika R_1 se menja.
Odrediti $\frac{U_1}{U_2} = f(R_1)$ i nacrtati grafik tražene funkcije.

(Školsko takmičenje «*M. Pupin» Novi Sad; 2001 god.)*

13.

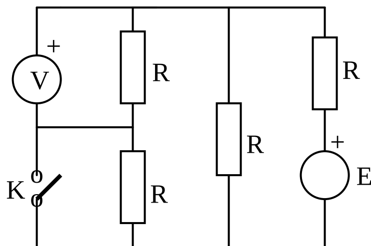


Odrediti struju I i ems E prema datoj slici, ako je opterećenje kondenzatora 0 C.

Brojni podaci:
$R_1 = R_3 = R_5 = 20\ \Omega$; $R_2 = R_4 = 30\ \Omega$;
$E_1 = 20$ V; $E_2 = 30$ V.

(Školsko takmičenje «*N. Tesla» Beograd; 2000 god.)*

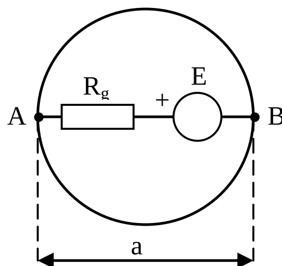
14.



Pri otvorenom prekidaču K, prema slici, idealni voltmetar meri napon $U_V = 30$ V. Kolika je elektromotorna sila izvora E, a koliki će biti napon na voltmetru U_V' nakon uključenja prekidača K ?

(Školsko takmičenje «*N. Tesla*» *Beograd; 2000 god.*)

15.



Na prečnik AB kružne konture od bakarne žice priključen je pomoću bakarne žice istog prečnika izvor ems E = 2 V i otpornosti $R_g = 0{,}915\ \Omega$, prema slici. Površina preseka bakarne žice svuda je ista i iznosi $S = 0{,}2\ mm^2$, a specifična otpornost bakra iznosi $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$, a prečnik konture je a = 2 m.

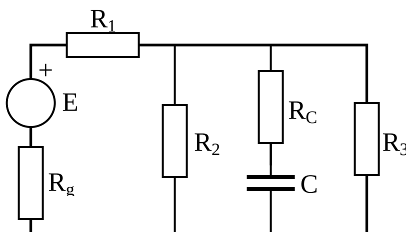
Zanemariti dimenzije izvora i prelazne otpornosti.

(Školsko takmičenje «*N. Tesla*» *Beograd; 2000 god.*)

16. Na kojoj će temperaturi 1,7 m žice od konstantana imati isti otpor kao 2 m žice od bakra. Oba provodnika imaju isti poprečni presek. Specifična otpornost bakra i konstantana na 20 °C iznosi $\rho_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ [Ωm] i $\rho_k = 4 \cdot 10^{-8}$ [Ωm]. Temperaturni koeficijent bakra je $\alpha = 0{,}004$ [1/°C].

(Školsko takmičenje «*N. Tesla*» *Beograd; 2001 god.*)

17.

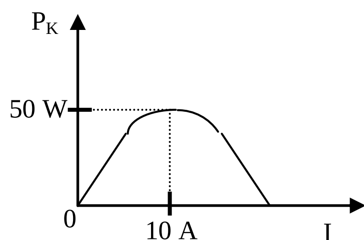


Ako generator, prema slici, radi u režimu maksimalne snage, a napon na kondenzatoru iznosi $U_C = 5$ V, odrediti unutrašnji otpor generatora R_g i otpor potrošača R_3.

Brojni podaci:
E = 50 V; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$; $R_C = 2\ \Omega$

(Školsko takmičenje «*N. Tesla*» *Beograd; 2001 god.*)

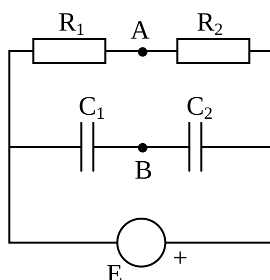
18.



Koristeći grafik promene korisne snage izvora u zavisnosti od struje opterećenja odrediti unutrašnji otpor izvora $\mathbf{R_g}$, njegovu ems **E** i stepen korisnog dejstva **η** pri struji od 2 A.

(Školsko takmičenje «*N. Tesla» Beograd; 2002 god.)*

19.

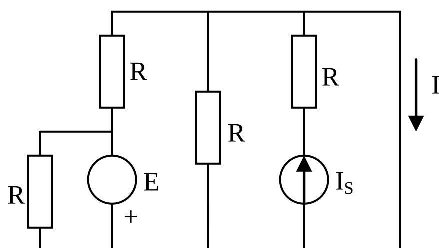


Odrediti napon U_{AB} sa slike ako je poznato da je izvor idealan.

Brojni podaci:
$R_1 = 2R_2$ i $C_2 = 2C_1$

(Školsko takmičenje «*N. Tesla» Beograd; 2002 god.)*

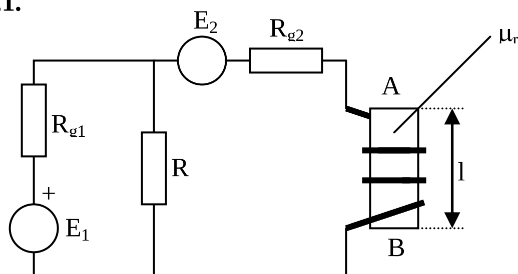
20.



Odrediti struju I u kolu sa slike, ako su $E = 20$ V; $I_S = 1$ A i $R = 10\ \Omega$.

(Školsko takmičenje «*N. Tesla» Beograd; 2002 god.)*

21.

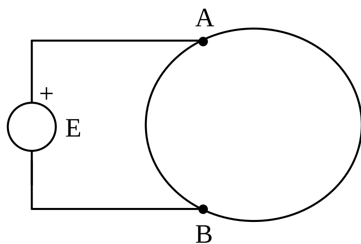


Odrediti magnetnu indukciju u kalemu, i obeleži severni pol elektromagneta (A ili B), ako generator E_1 radi u režimu praznog hoda.

Brojni podaci:
$E_1 = 20$ V; $R_{g1} = 10\ \Omega$; $R = 20\ \Omega$; $\mu_r = 200$;
$N = 200$; $l = 10$ cm i $R_{kalema} = 0$.

(Školsko takmičenje «*N. Tesla» Beograd; 2002 god.)*

22.

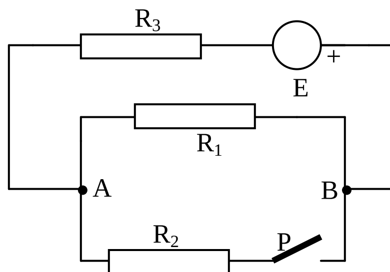


Koliki je otpor metalnog rama na slici ako ako spojevi A i B dele ram u razmeri 1 : 2 i pri čemu kroz izvor protiče struja $I = 9$ A, a snaga električne struje u ramu je $P = 108$ W ?

Unutrašnji otpor izvora je zanemarljiv.

(Peto regionalno takmičenje; 1998.)

23.



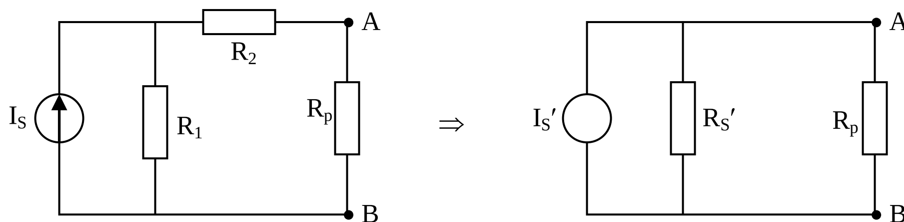
Na delu kola AB prikazanog na slici 4.78. snaga koja se pretvara u toplotu ista je pri otvorenom i pri zatvorenom prekidaču.
Ako je $R_1 = R_2 = R$, naći otpornost R_3.

Uz postupno izvođenje naći i zaokružiti tačno rešenje.

Moguća rešenja: a) $R_3 = \sqrt{2}R$; b) $R_3 = \dfrac{R}{\sqrt{2}-1}$; c) $R_3 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}R$; d) $R_3 = R\left(2-\sqrt{2}\right)$

(Peto regionalno takmičenje; 1998.)

24. Odrediti I_S' i R_S' ako se oni dobiju transformacijom kola prema slici:



(Školsko takmičenje *«Mihajlo Pupin» Novi Sad; 2003.*)

25. Šta se dobije deljenjem napona praznog hoda sa strujom kratkog spoja kod realnog generatora ?

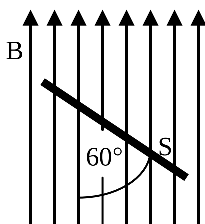
(Deveto regionalno takmičenje; 2003.)

26. Šta je Kirijeva temperatura ? Zaokružiti tačno rešenje.

a) Temperatura pri kojoj metal postaje superprovodnik.
b) Temperatura pri kojoj se gube feromagnetna svojstva materijala.
c) Temperatura paljenja dielektrika (papira)
d) Temperatura pri kojoj materijal prelazi iz grupe paramagneta u grupu feromagneta.
e) Neko drugo rešenje.

(Peto regionalno takmičenje 1998 i Deveto republičko takmičenje 2003.)

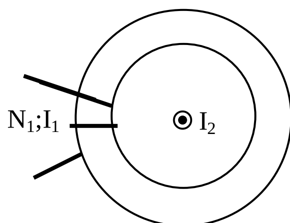
27.



Magnetni fluks kroz neku površinu iznosi $\Phi = 1{,}73$ [Wb] kad je ugao između njene ravni i vektora magnetne indukcije 60° (vidi sliku). Koliki je fluks kroz istu površinu, ako je taj ugao 30°. Magnetno polje je homogeno..

(Školsko takmičenje «*N. Tesla» Beograd; 2001 god.)*

28.

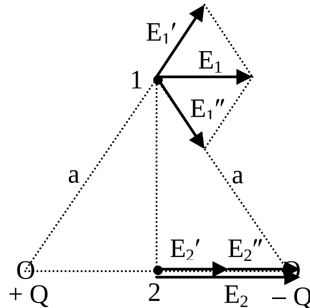


Torus sa N = 100 navojaka postavljen je na jezgro od gvožđa, a u njegovom centru se nalazi provodnik kroz koji protiče struja jačine $I_2 = 2$ A, sa smerom datim na slici. Ako je rezultantna indukcija u torusu jednaka nuli, odrediti intezitet i smer struje I_1.

(Školsko takmičenje «*N. Tesla» Beograd; 2001 god.)*

R E Š E N J A (zadaci sa školskih, regionalnih i republičkih takmičenja):

1. -----



Za tačku 1 jačina električnog polja kojeg stvaraju pojedinačna naelektrisanja iznosi:

$$E_1' = E_1'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a^2}$$

E_1, E_1' i E_1'' čine jedan jednakostranični trougao, pa je:

$$E_1 = E_1' = E_1'' = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}.$$

Jačina polja za tačku 2 je:

$$E_2 = E_2' + E_2'' = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{4Q}{a^2} = 8\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{a^2}$$

Odnos između jačine električnih polja između tačke 1 i 2 je: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{8}$ (odgovor je pod tačkom 4).

2. -----

Kapaciteti kondenzatora su:

$$C_A = \frac{\varepsilon_o\varepsilon_r\cdot\frac{S}{d_1}\cdot\varepsilon_o\cdot\frac{S}{d_2}}{\varepsilon_o\varepsilon_r\cdot\frac{S}{d_1}+\varepsilon_o\cdot\frac{S}{d_2}} = \frac{\frac{\varepsilon_o^2\varepsilon_r S^2}{d_1 d_2}}{\frac{\varepsilon_o\varepsilon_r S d_2+\varepsilon_o S d_1}{d_1 d_2}} = \frac{\varepsilon_o^2\varepsilon_r S^2}{\varepsilon_o S(\varepsilon_r d_2+d_1)} = \frac{\varepsilon_o\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d_2+d_1}$$

$$C_B = \frac{\varepsilon_o\cdot\frac{S}{d_1}\cdot\varepsilon_o\varepsilon_r\cdot\frac{S}{d_2}}{\varepsilon_o\cdot\frac{S}{d_1}+\varepsilon_o\varepsilon_r\cdot\frac{S}{d_2}} = \frac{\frac{\varepsilon_o^2\varepsilon_r S^2}{d_1 d_2}}{\frac{\varepsilon_o S d_2+\varepsilon_o\varepsilon_r S d_1}{d_1 d_2}} = \frac{\varepsilon_o^2\varepsilon_r S^2}{\varepsilon_o S(d_2+\varepsilon_r d_1)} = \frac{\varepsilon_o\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d_1+d_2}$$

Odnos između kondenzatora je:

$$\frac{C_B}{C_A} = \frac{\frac{\varepsilon_o\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d_1+d_2}}{\frac{\varepsilon_o\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d_2+d_1}} = \frac{\varepsilon_r d_2+d_1}{\varepsilon_r d_1+d_2} = \frac{\varepsilon_r d_2+d-d_2}{\varepsilon_r d_1+d-d_1} = \frac{d_2(\varepsilon_r-1)+d}{d_1(\varepsilon_r-1)+d}.$$

Kako je $d_2 > d_1$ sledi da će kapacitet drugog kondenzatora biti veći od prvog, tj. $C_B > C_A$.
Količina naelektrisanja je srazmerna sa kapacitetom, pa je i naelektrisanje $Q_B > Q_A$.

Jačina polja između dve paralelne ploče (kod kondenzatora) iznosi $E = \frac{Q}{\varepsilon S}$, pa je:

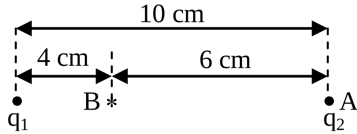
$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\frac{Q_A}{\varepsilon S}}{\frac{Q_B}{\varepsilon_o S}} = \frac{Q_A\varepsilon_o S}{Q_B\varepsilon_o\varepsilon_r S} = \frac{Q_A}{\varepsilon_r Q_B} < 1 \Rightarrow \varepsilon_r Q_B > Q_A \Rightarrow E_B > E_A.$$

Dakle, tačna rešenja za sve tri tačke je pod b)

3. ----- $U_1 = U_2 = U_3 = U$; $Q_1 > Q_2 > Q_3$. Tačno rešenje je pod a)

4. ----- Jače polje će biti kod manje kugle, jer je udaljenost od centra te kugle do posmatrane tačke manje. Dakle, odgovor je pod a)

5. -----



Ako posmatramo rad kojeg će izvršiti drugo nalektrisanje (prvo je statično), tada će u tačkama A i B prvo naelektrisanje stvarati potencijal koji iznosi:

$$V_A = k\cdot\frac{q_1}{r_A} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{16\cdot 10^{-9}}{10\cdot 10^{-2}} = 1440[V],$$

$$V_B = k\cdot\frac{q_1}{r_B} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{16\cdot 10^{-9}}{4\cdot 10^{-2}} = 3600[V]$$

Ubacivanjem drugog naelektrisanja u tačku A ono će pri svom pomeranju obaviti određeni rad. Premeštanjem q_2 iz tačke A u tačku B izvrši se rad koji je jednak:

$A_{AB} = q_2 \cdot U_{AB} = q_2 \cdot (V_A - V_B) = 1\cdot 10^{-9} \cdot (1440 - 3600) = - 2{,}16\cdot 10^{-6}$ [J] = – 2,16 [μJ].

Pošto je rešenje negativno sledi da ovaj rad treba da izvrši neka spoljna sila. To je i logično, jer bi usled električnog polja ova dva naelektrisanja nastojala da se još više udalje (istoimena naelektrisanja).

Čitaocu se preporučuje da posmatra rad kojeg će obaviti prvo naelektrisanje (drugo statično), a mogu istovremeni i oba (što povećava složenost pri rešavanju zadatka). Rešenja su sva ista.

6. ----- Kapacitet naelektrisanog tela je isti pre i posle dodavanja naknadnog naelektrisanja i on iznosi:

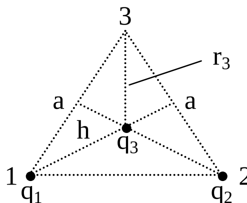
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q+q}{V'} \Rightarrow \frac{Q}{100} = \frac{Q+10\cdot 10^{-9}}{105} \Rightarrow 105Q = 100Q + 1000\cdot 10^{-9} \Rightarrow 5Q = 1000\cdot 10^{-9} \Rightarrow Q = 200[nC].$$

Na početku je naelektrisanje bilo Q = 200 nC, a nakon dodavanja q = 10 nC ukupna količina naelektrisanja je Q_u = 210 nC. Da bi se ova količina naeleltrisanja razelektrisala telu treba dodati količinu naelektrisanja koja je jaednaka: Q′ = –210 [nC].

7. ----- Prema Gausovoj teoremi je:

$$\psi = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\varepsilon_o} = \frac{(1+1-1)\cdot 10^{-9}}{8{,}854\cdot 10^{-12}} = \frac{10^3}{8{,}854} = 112{,}94[Vm]$$

8. -----



$$r_3 = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$r_1 = r_2 = a.$

Iz uslova zadatka, sledi:

$$V_3 = k\cdot\frac{q_1}{r_1} + k\cdot\frac{q_2}{r_2} + k\cdot\frac{q_3}{r_3} = 0 \Rightarrow 2k\cdot\frac{q_1}{a} + k\cdot\frac{q_3}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = 0$$

$$2k\cdot\frac{q_1}{a} = -3k\cdot\frac{q_3}{a\sqrt{3}} \Rightarrow q_3 = -\frac{2\cdot q_1\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}[nC]$$

9. ----- U centru kvadrata jačine električnih polja za pojedinačna naelektrisanja su jednaka. Pošto su ti vektori međusobno normalni, njihov vektorski zbir je jednak nuli. Kako se u zadatku traži samo intezitet (jačina) polja, logično je da je polje najmanje u samom centru kvadrata. Dakle, idući od tačke A ka centru kvadrata polje se smanjuje, dok će od centra ka tačci B polje da raste. Konačan odgovor je pod **d) opada a zatim rasti**.

Napomena! Ako polje posmatramo kao vektor, tada od tačke A ka centru idemo u smeru polja i ono opada od neke vrednosti ka nuli, dok će idući od centra ka tačci B smer polja biti suprotan. (polje opada ako ga posmatramo kao negativnu vrednost – suprotan smer).

10. ----- Za $C_1 = C_2 = C_3 = C \Rightarrow \; C_e = \frac{C_1 \cdot (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{2}{3}C$

Napon na kondenzatoru C_3 iznosi: $U_3 = \frac{Q_{23}}{C_{23}} = \frac{Q}{2C} = \frac{U \cdot C_e}{2C} = \frac{U \cdot \frac{2}{3}C}{2C} \Rightarrow U_3 = \frac{U}{3}$

Energija kondenzatora C_3 je: $W_3 = \frac{U_3 Q_3}{2} = \frac{U_3{}^2 C_3}{2} = \frac{\left(\frac{U}{3}\right)^2 C}{2} = \frac{U^2 C}{18}$.

Za $C_1' = 2C_1 = 2C \Rightarrow C_e' = \frac{2C \cdot 2C}{2C + 2C} = C$

Napon na C_3 sada iznosi: $U_3' = \frac{Q'}{C_{23}} = \frac{U \cdot C}{2C} \Rightarrow U_3' = \frac{U}{2}$.

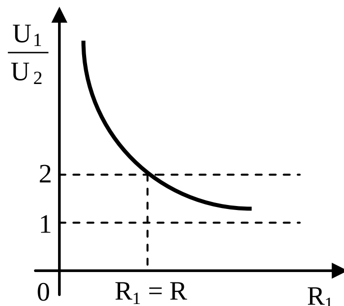
a energija: $W_3' = \frac{U_3'^2 C_3}{2} = \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^2 C}{2} = \frac{U^2 C}{8}$.

Kako je, $\frac{W_3'}{W_3} = \frac{\frac{U^2 C}{8}}{\frac{U^2 C}{18}} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2{,}25$

energija se povećala za 2,25 puta ($W_3' = 2{,}25 W_3$).

11. ----- $U_{AB} + I \cdot R_1 - E + I \cdot R_2 = 0 \;\Rightarrow\; (R_1 + R_2) \cdot I_1 = E \;\Rightarrow\; 8 \cdot I_1 = 16 \;\Rightarrow\; I_1 = 2$ [A].

12. ----- $I = \frac{E}{2R + R_1} \Rightarrow U_1 = I \cdot (R + R_1) = \frac{R + R_1}{2R + R_1} E \Rightarrow U_2 = I \cdot R_1 = \frac{R_1}{2R + R_1} E \Rightarrow$



$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{R + R_1}{2R + R_1} E}{\frac{R_1}{2R + R_1} E} = \frac{R + R_1}{R_1} = \frac{R}{R_1} + 1$$

Za $R_1 = 0 \;\Rightarrow\; U_1/U_2 = \infty$;
Za $R_1 = R \;\Rightarrow\; U_1/U_2 = 2$;
Za $R_1 = \infty \;\Rightarrow\; U_1/U_2 = 1$.

13. ----- $U_C - IR_1 + E_1 - IR_2 - E_2 = 0 \Rightarrow E_1 - E_2 = I \cdot (R_1 + R_2) \;\Rightarrow\; -10 = 50 \cdot I \;\Rightarrow\; I = -0{,}2$ [A];
$U_C = 0$ [V].
$E_1 - E_2 - E = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \;\Rightarrow\; E = E_1 - E_2 - I \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \;\Rightarrow$
$E = -10 + 0{,}2 \cdot 120 = 14$ [V].

14. ----- Ukupni napon na paralelnoj vezi otpornika , pri isključenom K(2R i R) je 60 V,
a otpor tog dela kola je: $R_p = \frac{(R+R)\cdot R}{R+R+R} = \frac{2}{3}R$

Ukupna struja kola je: $I = \frac{2U_V}{R_p} = \frac{60}{\frac{2}{3}R} = \frac{90}{R}$

Pri isključenom prekidaču ukupni otpor kola je ($R_V = \infty$) : $R_e = R + \frac{2R\cdot R}{2R+R} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$

Ems E je: $E = I\cdot R_e = \frac{90}{R}\cdot\frac{5}{3}R = 150[V]$.

Nakon uključenja prekidača K ukupni otpor kola je: $R_e' = R + \frac{R\cdot R}{R+R} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$

Ukupna struja sada iznosi: $I' = \frac{E}{R_e'} = \frac{150}{\frac{3}{2}R} = \frac{100}{R}$

Voltmetar će, nakon uključenja prekidača K izmeriti napon na paralelnoj vezi dvaju otpornika, čija je otpornost jednaka R/2, i taj napon je: $U_V' = I'\cdot\frac{R}{2} = \frac{100}{R}\cdot\frac{R}{2} = 50[V]$.

15. -----
Otpor prečnika konture je: $R_p = \rho\frac{a}{S} = 1{,}7\cdot10^{-8}[\Omega m]\cdot\frac{1[m]}{0{,}2\cdot10^{-6}[m^2]} = 8{,}5\cdot10^{-2}[\Omega]$.

Otpor polovine kružne konture je: $R_K = \rho\frac{\frac{a\pi}{2}}{S} = \rho\frac{a\pi}{2S} = 1{,}7\cdot10^{-8}\cdot\frac{3{,}14}{2\cdot0{,}2\cdot10^{-6}} = 13{,}35\cdot10^{-2}[\Omega]$.

Ukupni otpor celog kola je: $R = R_g + R_p + \frac{R_K\cdot R_K}{R_K+R_K} = 0{,}915 + 0{,}085 + \frac{0{,}1335}{2} = 1{,}06675[\Omega]$.

Ukupna struja kola je: $I = \frac{E}{R} = \frac{2}{1{,}06675} = 1{,}875[A]$.

Napon između tačka A i B je: $U_{AB} = I\cdot\frac{R_K\cdot R_K}{R_K+R_K} = 1{,}875\cdot\frac{0{,}1335}{2} = 0{,}125[V] = 125[mV]$.

16. ----- $R_{Cu} = R_k \Rightarrow R_{Cuo}\cdot[\,1 + \alpha_{Cu}\cdot\Delta\theta\,] = R_{ko}\cdot[\,1+ \alpha_k\cdot\Delta\theta\,] \Rightarrow$

$$\rho_{Cu}\frac{l_{Cu}}{S}\cdot[1+\alpha_{Cu}\cdot\Delta\theta] = \rho_k\frac{l_k}{S}\cdot[1+\alpha_k\cdot\Delta\theta] \Rightarrow 1{,}7\cdot10^{-8}\cdot1{,}7\cdot(1+0{,}004\cdot\Delta\theta) = 2\cdot10^{-8}\cdot(1+\alpha_k\cdot\Delta\theta) \Rightarrow$$

$$1{,}7 + 0{,}0068\Delta\theta = 2 + 2\alpha_k\cdot\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta(0{,}0068 - 2\alpha_k) = 0{,}3 \Rightarrow \Delta\theta = \frac{0{,}3}{0{,}0068-2\alpha_k}$$

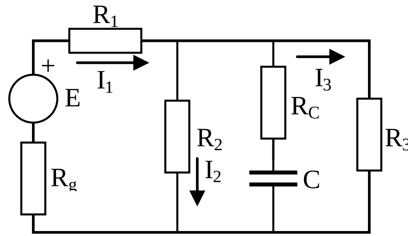
Kako je temperaturni koeficijent za konstantan mnogo manji od koeficijenta za bakar ($\alpha_k = \pm10^{-5}$ 1/°C; vidi tabelu u dodatku ove knjige) on se može zanemariti, pa sledi:

$$\Delta\theta = \frac{0{,}3}{0{,}0068} = 44{,}12[^oC] \Rightarrow \theta - \theta_o = 44{,}12 \Rightarrow \theta = 44{,}12 + 20 = 64{,}12[^oC]$$

Ako uzmemo vrednost za $\alpha_k = 10^{-5}$ [1/°C] , sledi:

$\Delta\theta = \frac{0{,}3}{0{,}0068\pm2\cdot0{,}00001} = \frac{0{,}3}{0{,}0068\pm0{,}00002} \Rightarrow \Delta\theta = 43{,}99(44{,}25)[^oC]$, što potvrđuje predhodnu konstataciju.

17. -----



Kroz granu u kojoj je kondenzator ne protiče struja (u stacionarnom stanju), pa se ona može isključiti (prekid). To znači da su otpori R_2 i R_3 u paralelnoj vezi i na njima vlada napon kondenzatora U_C.

Dakle, $U_2 = U_3 = U_{23} = U_C = 5$ V.

Kako je otpor generatora jednak preostalom otporu kola (P = max), sledi da je na njema isti napon, koji iznosi:

$E = U_g + U = 2U_g \Rightarrow U_g = 25$ V.

$U_g = U = U_1 + U_{23} \Rightarrow U_1 = U - U_{23} = 20$ V.

Struje u kolu su:

$I_1 = U_1/R_1 = 5$ [A]; $I_2 = U_{23}/R_2 = 0{,}5$ [A] i $I_3 = I_1 - I_2 = 4{,}5$ [A].

Otpornost prijemnika R_3 je: $R_3 = \frac{U_{23}}{I_3} = \frac{5}{4{,}5} = \frac{10}{9}[\Omega]$.

Otpor generatora iznosi: $R_g = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 4 + \frac{10 \cdot \frac{10}{9}}{10 + \frac{10}{9}} = 4 + \frac{\frac{100}{9}}{\frac{90+10}{9}} = 5[\Omega]$.

18. ----- Za $P = P_{max} \Rightarrow R = R_g$; $P = I^2R = I^2R_g = 50 \Rightarrow R_g = 50/10^2 = 0{,}5$ [Ω].

Ukupna snaga izvora je $EI = I^2R_g + I^2R = 100$ [W] $\Rightarrow E = 100/I = 100/10 = 10$ [V].

Pri struji od 2 A pad napona na R_g je: $U_g' = I'R_g = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ [V].

Napon na potrošaču je: $U' = E - U_g' = 9$ V.

Stepen korisnog dejstva je: $\eta = \frac{P}{P'} = \frac{U'I'}{EI'} = \frac{U'}{E} = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

19. ----- $U_{R1} = IR_1$; $U_{R2} = IR_2 \Rightarrow U_{R1}/U_{R2} = IR_1/IR_2 = R_1/R_2 = 2R_2/R_2 = 2 \Rightarrow U_{R1} = 2U_{R2}$

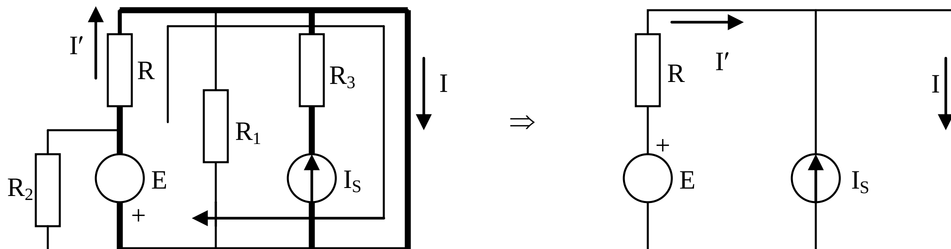
$U_{R1} + U_{R2} = E \Rightarrow 2U_{R2} + U_{R2} = E \Rightarrow U_{R2} = E/3$.

$U_{C1} = Q/C_1$; $U_{C2} = Q/C_2 \Rightarrow U_{C1}/U_{C2} = C_2/C_1 = 2C_1/C_1 = 2 \Rightarrow U_{C1} = 2U_{C2}$;

$U_{C1} + U_{C2} = E \Rightarrow 2U_{C2} + U_{C2} = E \Rightarrow U_{C2} = E/3$

$U_{AB} + U_{R1} - U_{C1} = 0 \Rightarrow U_{AB} = U_{C1} - U_{R1} = E/3 - E/3 = 0$ [V].

20. -----



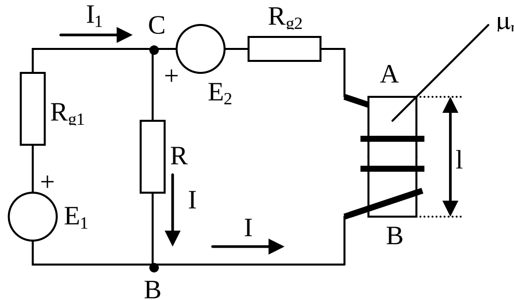
Zbog kratke veze otpornik R_1 nema uticaja. Otpornik R_2 je bez uticaja, jer na njegovim krajevima vlada ems E (bez obzira na vrednost R_2). Na isti način i otpornik R_3 je nebitan, jer kroz ovu granu protiče struja strujnog generatora I_S (koja ne zavisi od otpornika R_3). Izbacivanjem navedenih otpornika dolazi se do nove, znatno prostije, slike iz koje sledi (prema drugom Kirhofovom zakonu):

$$- E - I'R = 0 \Rightarrow I' = - E/R = -20/10 = -2 \text{ [A]}.$$

Primenom prvog Kirhofovog zakona sledi:

$$I = I' + I_S = -2 + 1 = -1\ [A].$$

21. -----



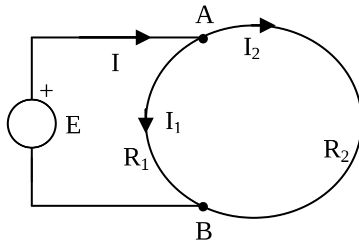
Da bi prvi generator radio u praznom hodu ($I_1 = 0$) drugi generator treba da mu to omogući, a to će se postići ako su im polovi suprotni. Usled ems E_2 i struja I su smera kao na slici. Pravilom desne ruke lako se konstatuje da je N pol u tački A.

Napon između tačaka C i B je $U_{CB} = E_1 = 20$ V (prazan hod E_1).

Struja I je: $I = U_{CB}/R = 20/20 = 1$ [A].

Magnetna indukcija u kalemu iznosi: $B = \mu \cdot H = \mu_o \cdot \mu_r \cdot \dfrac{IN}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot \dfrac{1 \cdot 200}{0{,}1} = 0{,}5[T].$

22. -----



$I_1 = U_{AB}/R_1$; $I_2 = U_{AB}/R_2$ $\Rightarrow$ $I_1/I_2 = R_2 : R_1 = 2:1$ $\Rightarrow$ $I_1 = 2I_2$.

$I = I_1 + I_2 = 3I_2$ $\Rightarrow$ $I_2 = 3$ A; $I_1 = 6$ A.

Ukupna snaga rama je:

$P = E \cdot I = U_{AB} \cdot I$ $\Rightarrow$ $U_{AB} = P/I = 108/9 = 12$ [V].

Pojedinačni otpori rama su:

$R_1 = U_{AB}/I_1 = 12/6 = 2$ [Ω] i $R_2 = U_{AB}/I_2 = 12/3 = 4$ [Ω].

Ukupni otpor celog rama je:

$$R = R_1 + R_2 = 6\ [\Omega].$$

23. ----- Kada je prekidač isključen struja u kolu je: $I_1 = \dfrac{E}{R_1 + R_3} = \dfrac{E}{R_3 + R}$,

a kada je uključen: $I_2 = \dfrac{E}{R_3 + R_{12}} = \dfrac{E}{R_3 + \dfrac{R}{2}} = \dfrac{E}{\dfrac{2R_3 + R}{2}} = \dfrac{2E}{2R_3 + R}$.

Snage u delu kola između tačaka A i B su:

- pri isključenom prekidaču : $P_1 = I_1^2 R_1 = \left[\dfrac{E}{R_3 + R}\right]^2 \cdot R = \dfrac{RE^2}{(R_3 + R)^2}$
- pri uključenom prekidaču : $P_2 = I_2^2 \cdot R_{12} = \left[\dfrac{2E}{2R_3 + R}\right]^2 \cdot \dfrac{R}{2} = \dfrac{4E^2 R}{(2R_3 + R)^2 \cdot 2} = \dfrac{2RE^2}{(2R_3 + R)^2}$

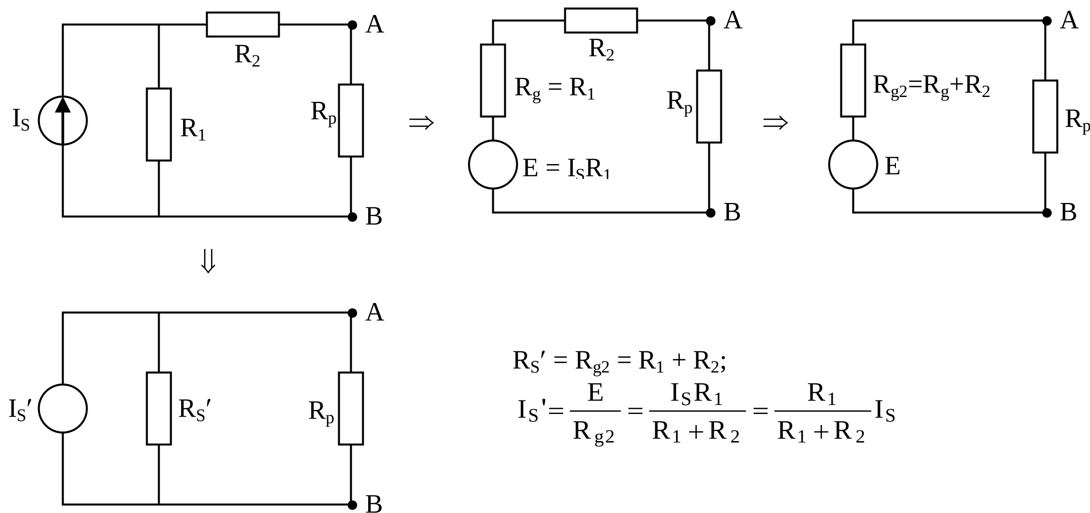
Iz uslova zadatka, $P_1 = P_2$, sledi:

$$\frac{RE^2}{(R_3 + R)^2} = \frac{2RE^2}{(2R_3 + R)^2} \Rightarrow 2(R_3 + R)^2 = (2R_3 + R)^2 \Rightarrow \sqrt{2}(R_3 + R) = 2R_3 + R \Rightarrow \sqrt{2}R_3 + \sqrt{2}R = 2R_3 + R \Rightarrow$$

$$R(\sqrt{2} - 1) = R_3(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow R_3 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} R .$$

Tačan odgovor je pod c)

24.-----



$R_S' = R_{g2} = R_1 + R_2;$

$$I_S' = \frac{E}{R_{g2}} = \frac{I_S R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_S$$

25. ----- Kako je $U_o = E$, a $I_{KS} = \frac{E}{R_g} \Rightarrow R_g = \frac{E}{I_{KS}} = \frac{U_o}{I_{KS}}$.

Deleći napon praznoh hoda U_o sa strujom kratkog spoja I_{KS} dobije se unutrašnji otpor realnog generatora.

26. ----- Odgovor je pod b) Gube se feromagnetna svojstva.

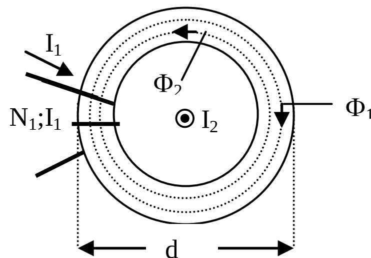
27. ----- $\Phi = B\cdot S\cos\alpha = B\cdot S\cos(90-60) = BS\cos 30°$, gde je α ugao između normale na površinu i B.

Iz navedenog izraza sledi: $B = \frac{\Phi}{S\cos 30^o} = \frac{1{,}73}{S\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\cdot 1{,}73}{S\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{S}$

Kada je ravan površine pod uglom od 30° u odnosu na vektor B, tada će normala na tu površinu biti pod uglom α' u odnosu na vektor B, koji iznosi : $\alpha' = 90 - 30 = 60°$.

U ovom slučaju magnetni fluks je: $\Phi' = BS\cos\alpha' = \frac{2}{S}\cdot S\cdot\cos 60^o = 2\cdot 0{,}5 = 1[\text{Wb}]$.

28. -----



Da bi indukcija bila jednaka nuli u jezgru, moraju se indukcije struja I_1 i I_2 poništiti ($\Phi_1 = -\Phi_2$). Primenom amperovog pravila desne ruke, uz poznat smer Φ_2 odredimo smer struje I_1, koji je prikazan na slici.

Kako je $H_p = H_n$, ali suprotnog smera, sledi:

$$\frac{I_2}{d\pi} = \frac{I_1 N}{d\pi} \Rightarrow I_1 N_1 = I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{I_2}{N_1} = \frac{2}{1000} = 2\cdot 10^{-3}[A] = 2[mA]$$

KRAJ